

大專用書

常微分方程式論

—複變域中常微分方程—

楊重駿譯



國立編譯館出版

大專用書

常微分方程式論

—複變域中常微分方程—

楊重駿譯

國立編譯館出版

中華民國七十一年五月一日台初版

常微分方程式論

版權所有
翻印必究

定價：精裝新台幣 叁佰伍拾元
平裝新台幣 叁佰貳拾元

譯者：楊 重 駿

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館址：台北市舟山路二四七號

電話：三二一六一七一

目 錄

第一章 導言

I	代數及幾何的結構	1
1-1	向量空間	1
1-2	度量空間	4
1-3	映像	6
1-4	由 C^n 到其自身上的線性變換；矩陣	9
1-5	定點定理	12
1-6	泛函不等式	18
II	解析結構	26
1-7	正則函數	26
1-8	冪級數	31
1-9	Cauchy 積分	36
1-10	成長率的估值	46
1-11	解析延續；函數方程的不變性	49
	參考文獻	57

第二章 存在性及唯一性定理

2-1	方程式及其解	59
2-2	定點法	64

2 目 錄

2-3	逐次近似法	69
2-4	優函數及優函數法則	75
2-5	Cauchy 氏優函數	85
2-6	Lindelöf 氏優函數	90
2-7	支配函數及劣函數的使用	95
2-8	參數變值法	101
	參考文獻	112

第三章 奇異點論

3-1	固定的及可移的奇異點	115
3-2	解析延續，可移奇異點	121
3-3	Painlevé 氏的確定性定理；奇異點	131
3-4	不定形	144
	參考文獻	152

第四章 Riccati 氏方程式

4-1	古典理論	155
4-2	內在參數的相關性；交叉比	160
4-3	一些幾何上的應用	166
4-4	Nevanlinna 氏定理摘要	171
4-5	Nevanlinna 氏定理摘要，II	183
4-6	Malmquist 氏定理及其一些推廣	197
	參考文獻	217

第五章 線性微分方程式

5-1	一般性理論：一次式的情形	223
5-2	一般性理論：二次式的情形	229
5-3	正則奇異點	239
5-4	成長率的估計	250
5-5	在實線上的漸近情形	265
5-6	在平面上的漸近情形	278
5-7	解析延續；單值性的群	298
	參考文獻	307

第六章 特殊的二次線性微分方程式

6-1	超越幾何方程式	311
6-2	Legendre 氏方程式	324
6-3	Bessel 氏方程式	330
6-4	Laplace 氏方程式	338
6-5	Laplacian；Hermite—Weber 氏方程式； 拋物柱面函數	356
6-6	Mathieu 氏方程式；橢圓柱面函數	366
6-7	一些其他的方程式	380
	參考文獻	388

第七章 代表式定理

7-1	Psi 級數	391
7-2	積分代表式	397

4 目 錄

7-3	Euler 氏變換	404
7-4	超越幾何的 Euler 氏變換	415
7-5	Laplace 變換	423
7-6	Mellin 氏及 Mellin—Barnes 變換	430
	參考文獻	440

第八章 複數域中的振動定理

8-1	Sturm 氏方法，Green 氏變換	444
8-2	無零點區域及影響線	455
8-3	其他比較定理	468
8-4	特殊方程式的應用	480
	參考文獻	497

第九章 n 次線性及矩陣微分方程式

9-1	解的存在性及獨立性	501
9-2	星狀內矩陣解的解析性	508
9-3	解析延續及單值群	512
9-4	趨近於一奇異點的情況	518
9-5	正則奇異點	531
9-6	Fuchsian 簇，Riemann 氏問題	548
9-7	非正則奇異點	559
	參考文獻	575

第十章 席瓦茲導數及應用

10-1	席瓦茲導數	581
------	-------	-----

10-2	保角映照上的應用	586
10-3	超越幾何方程式的代數解	593
10-4	單價性及 Schwarzian	600
10-5	藉模函數的單值化	609
	參考文獻	620

第十一章 一次非線性微分方程式

11-1	一些 Briot – Bouquet 方程式	623
11-2	成長性質	632
11-3	二項式 Briot – Bouquet 方程式的橢圓函數論	646
	參考文獻	669

第十二章 二次非線性微分方程式及自主的方程組

12-1	通論； Briot – Bouquet 氏方程式	671
12-2	Painleve' 氏的超越函數	680
12-3	Boutroux 氏的漸近線	688
12-4	Emden 氏及 Thomas – Fermi 氏方程式	695
12-5	二次方程組	705
12-6	其他自主的多項式的方程組	713
	參考文獻	720

第一章 導言

在本章內我們將要證明或不證明的一些與以後用到的事實列舉出來。其大致可分兩項：(1)是有關代數及幾何方面結構的，(2)解析結構方面的。在第一項下我們將提到一些抽象空間、度量、線性向量空間、數模、定點定理、泛函不等式、偏序、線性變換、矩陣、及代數等。在第二項下我們討論解析函數：解析性、Cauchy 氏積分、Taylor 氏及Maclaurin 氏的級數、整函數及有理整函數、冪級數、成長率、解析延續及函數方程的永合性。這是一個相當繁重的節目，讀者或許會覺得內容過密。我們建議讀者在初看時，不妨略過此章，等到以後的章節內，遇到有關的需要時再回來翻看。

I、代數及幾何的結構

1.1. 向量空間

抽象空間一詞往往與集合或點集表示同樣的事情，這只是論著者有意賦于該集合一個代數的或幾何的或兩者皆具的結構。將 Euler 氏空間 R^n 視爲一原始空間，由它我們抽象化（抽掉）其中某些性質就可得到一抽象空間。在此一提的是性質一詞是不明確的。我們用 X 表示空間，用 x, y, z 等表其中的元素，如果有一個或更多的代數運算能夠施用於元素間，或某一次序的概念至少對其中某些元素有意義，我們就說這個空間賦于了代數的結構。

於一集合，如其可施行加法及數積，則其可成爲一線性向量空間，同時此集合要在加法下爲 Abel 群，若 $x, y \in X$ 則 $x + y$ 仍是 X 的元素，且加法有結合性及可換性，並且有唯一的中性元素 0 使得

2 常微分方程式論

對所有的 x 有 $x+0=x$ ，及對於每一個元素 x 存在唯一的 $-x$ 使得 $x+(-x)=0$ 。

至於定義一個數量乘積，首先需要一個數量域，通常是取實數域 R 或複數域 C 。對於任何一個數量 α 及元素 x 相應地有唯一的元素 αx ；數量乘積為結合性的，對加法是分配性的，及 $1 \cdot x=x$ 其中 1 是數量域的單位元素。

通常我們稱一個實空間或複空間是依據其數量域為 R 或 C 而定的。也可稱 X 中的元素為向量。一個線性向量空間如果包括所有兩個元素的乘積，又被稱為一代數。所有以 t 為變數的多項式的集合，顯然為一代數，同樣地所有在點 t_0 為連續的函數所成的集合也是一代數。

設有一集合含有 X 的 n 個向量 x_j ，又設數量域為 F 。若

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \quad (1.1.1)$$

及所有數量 α_i 非為 0 不可，則稱這 n 個向量 x_j 對於 F 為線性無關。如可找到一組數量 α_j 滿足 $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| > 0$ 及滿足 (1.1.1)，則稱這 n 個向量 x_j 對於 F 為線性相關。此處我們要強調的是所謂相關或無關是針對 F 而言的。如果換了一個 F 的子域 F^0 或延展 F 到一更大的域 F^* 會影響線性有關或無關性的關係的。例如 1 及 $\sqrt{2}$ 對於有理數域 Q 來講為線性無關，但對所有代數數域 A 來言就不然了。又如空間 X 含有一組 n 個線性無關的向量及對於 (X 中) 任何 $n+1$ 個向量必線性相關，稱此空間為 n 維。如對於任何正整數 n 在 X 中都可找一組 n 個線性無關的向量，我們就稱 X 為無限維空間。

偏序的概念為代數結構的另一種形式。即如在 X 中對於某些對元素 x, y 有一次序關係 $x \leq y$ (相等於 $y \geq x$) 其為反身性的，常態的，及可遷性的，也即是 (i) 對於所有的 $x, x \leq x$, (ii) $x \leq y, y \leq z$ 導致 $x \leq z$, (iii) $x \leq y, y \leq z$ 導致 $x \leq z$ 。設 X 為線

性空間及賦有一偏序則對任何向量 a

$$x \leq y \Rightarrow x + a \leq y + a \quad (1.1.2)$$

及對任何正數量 α

$$\alpha x \leq \alpha y \quad (1.1.3)$$

這時 X 可定有一正角錐 X^+ ，其定為所有滿足 $x \geq 0$ 關係的元素 x 的集合。這個正角錐在加法及用正數量乘之 F 是不變的。它含有中性元素 0 也就是通常所謂的零元素。只要 $y - x \in X^+$ 我們就有 $x \leq y$ 。(譯者加註今後所謂正元素，就是屬於 X^+ 者)。

所有在閉區間 $[0, 1]$ 為連續的實數值函數所成的集合 $C[0, 1]$ 是一代數。我們定它的正角錐 X^+ 為其所有非負值函數的集合。若 $f, g \in C[0, 1]$ 又 $g - f$ 在 $[0, 1]$ 為非負值，則我們有 $f \leq g$ 。

練習 1.1

1. 設有一空間 X 其為所有實數值的實變數函數多項式 $P(t)$ 所組成。試證 X 為一代數。
2. 同樣上題中設 X 一秩序關係 $P < Q$ 是依據規定如 P 對充分大的正實數取正值則定 P 為正元素。試證此一秩序為三分法。也就是對於任何一元素 P 僅有三個可能性：(i) P 為正元素，(ii) $-P$ 為正元素，或 (iii) $P = 0$ 。
3. 我們稱一個秩序關係為亞基米得的 (Archimedean)，如果對於 $x < y \Rightarrow$ 存在一正整數 n 使得 $y < nx$ (為人熟習的實數的秩序就是亞基米得的)。試證在問題 2 中定的秩序非為亞基米得的。這是因為所有的元素歸屬於不同的排集 R_x ，這兒的 R_x 是所

4 常微分方程式論

有多項式次數為 k 的集合，每個 R_k 本身為亞基米得的，但如果 f, g 分屬於 R_j 與 R_k 且 $j < k$ ，則 $f < g$ 及對任何正整數 n ， $nf < g$ 。

4. 證明 $1, t, t^2, \dots, t^n$ 對於 R 為線性無關。又問由這些元素所構成的空間維數是多少？

§ 1.2 度量空間

一度量空間為一空間中定了距離概念，依據下列的幾個條件：

D_1 對於 X 的一對元素 P 及 Q 可定出一實數 $d(P, Q) \geq 0$ ，又稱由 P 到 Q 的距離，及若且若 $P=Q$ 則 $d(P, Q)=0$ 。

D_2 $d(P, Q) = d(Q, P)$

D_3 對於任何元素 R 我們總有 $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ 。

這些概念可追溯到公元 1890 年敏可夫斯基 (Minkowski) (1864—1909) 他在有關的所謂“數目的幾何”的論著中，主要著重在一次式跟二次式的極端性質下，發現規定不同的距離以適應不同的問題。值得注意的是敏氏並不要求條件 D_2 。條件 D_3 又稱為三角不等式。

我們稱一線性向量空間為數模的如果其中下列條件成立：

N_1 對於每一個 $x \in X$ 相應地指定一數值 $\|x\| \geq 0$ ，及若且若 $x=0$ 時，則 $\|x\|=0$ 。

N_2 對於每個數量 α ， $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ 。

N_3 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

如對於一數模的空間設定一度量如下：

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

則此空間亦成爲一度量空間。在一度量空間我們可討論分析。因爲在分析中基本的運算爲求一序列的極限此時就顯得有意義了。設 $\{x_n\}$ 爲度量空間 X 的一序列，如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) = 0 \quad (1.2.2)$$

則我們稱 x_n 收斂于 x_0 。又設如對任何給定的正數 ϵ ，存在著正整數 $N(\epsilon)$ 使得對於所有的 $m, n > N$ 恆有

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad (1.2.3)$$

則我們稱 $\{x_n\}$ 爲一 Cauchy 數列。一般若 (1.2.2) 式成立說明 $\{x_n\}$ 爲一 Cauchy 數列，但其逆並不常爲真。這是因爲所討論的空間本身可能有間隙。一度量空間 X 如果其中所有的 Cauchy 數列都收斂于其相應且存在於 X 中的元素，則我們稱 X 爲一完備空間。所有的 Euler 氏空間皆爲完備空間，還有其他一些以後要遭遇到的函數空間皆爲完備空間。但由所有有理數所構成的空間 Q 不是完備的。

許多在實數分析的概念如閉包、開集、閉集及 ϵ -鄰近 在完備的度量空間都仍具有意義。然而 Bolzano-Weierstrass 定理在完備的度量空間不見得一定成立，也即是說對某些完備的度量空間存在著一有界的無窮點集，而無一極限點存在。在此順便一提的所謂某集是“有界的”是指說這個集能被包含於一球體 $\{x \mid d(x, 0) < R\}$ 內。又所謂一個 X 的子集 S 的拓撲直徑 $d(S)$ 是指對於所有點 $x, y \in S$ 其所有距離 $d(x, y)$ 的最小上限。

練習 1.2

1. 對於屬於 C^n 的元素 x 其 Euler 氏數模定爲

6 常微分方程式論

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ 其中 } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_j$$

可為複數。另外可定的數模有 $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ 及 $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ 。試證此兩式定的確為數模，又對於點集 $\|x\|_2 = 1$ 該兩數模的上下限各為多少？

2. 問在此三個數模的拓撲如何定義一空集？試證凡對於其中之一拓撲為空集者對其他二拓撲亦然。並驗證 C^n 對於這三個數模所定的度量而言，皆為完備的空間。
3. 設 $X = C[0, 1]$ 為由所有在閉區間 $[0, 1]$ 的連續函數 f 所構成，其中的 Cauchy 數列的數模定為 $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ 。

試證此空間為完備的。

1.3 映像

我們將討論從一個完備度量空間 X 到另外一完備度量空間 Y 的映像（寫像）。通常我們考慮的是 x 與 y 為相同的。事實上一個映像 T 為一對對的點對 $\langle x, y \rangle$ ，其中 $x \in X$ ， $y \in Y$ 。最緊要的是對每一個元素 $x \in X$ 被唯一地指定一個相應的元素 $y \in Y$ ，對於不同的元素 x_1, x_2 所相應的元素 y_1, y_2 可相同也可不相同。有時所有的 $x \in X$ 都可指定對應到同一個元素 $y_0 \in Y$ 上。對於一映像如果使每個 Y 中的元素 y ，至少可有一個 X 中的元素 x 使得 y 成為 x 的像點，我們稱這樣的映像是映成映像。如果

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = T(x_1) \neq T(x_2) = y_2 \quad (1.3.1)$$

我們稱此映像 T 為 1 對 1 的。假使存在一有限常數 M 使得

$$d[T(x_1), T(x_2)] \leq Md(x_1, x_2)$$

則稱 T 為有界的。這定義是 Lipschitz 條件的擴張，也導致 T 在 X 上為連續的結論。

設 X, Y 為兩線性向量空間且兩者依據于同樣的數量域，如其滿足下列條件，則稱 T 為線性變換如

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \quad (1.3.3)$$

若且若

$$d[T(x), 0] \leq Md(x, 0) \quad (1.3.4)$$

稱 T 為有界，最重要的一種情形是當 X 及 Y 兩者皆為完備數模的線性向量空間，我們稱此類空間為巴拿赫 (Banach) 空間為紀念波蘭數學家 Stefan Banach (1892—1945)，他定之為 B 空間。在此情形下，不等式(1.3.4)具有下面形式：

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad (1.3.5)$$

若 T 為一線性變換，則 $T(0) = 0$ ，又其為1對1若滿足：

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

若 X 及 Y 皆為 B -空間，則集合 $E(X, Y)$ 其元素為所有由 X 到 Y 上的線性有界的變換 T 並賦于數模

$$\|T\| = \sup \|T(x)\| \quad (1.3.6)$$

成爲一 B 空間，此中的最小上限是對所原元素 x 數模為1者而言。

很自然的一個代數運算在 $E(X, Y)$ 上可定如下：

$$[T_1 + T_2](x) = T_1(x) + T_2(x), (\alpha T)(x) = \alpha T(x) \quad (1.3.7)$$

如 $Y = X$ ，則我們用 $E[X]$ 來表示 $E(X, X)$ 並注意乘積很自然地可定如下：

$$(T_1 T_2)(x) = T_1(T_2(x)) \quad (1.3.8)$$

由此可得

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\| \quad (1.3.9)$$

我們可以證明 $E(X, Y)$ 及 $E(X)$ 在數模度量下為完備的，所以是 B -空間。同時 $E(X)$ 不但是一數模代數，且為 B -代數，因它是 B -空間加上滿足不等式 (1.3.9)。

設 $T \in E(X)$ 同時是 1 對 1 的映像，這時存在一逆轉換 T^{-1} 使得對所有的元素 x 及 $y = T(x)$

$$T^{-1}[T(x)] = x \quad \text{及} \quad T[T^{-1}(y)] = y \quad (1.3.10)$$

練習 1.3

1. 採用在問題 1.2 : 1 中的任何 C^n 的度量，證明 $E(C^n)$ 為完備的。
2. 若 T 為一線性變換，試驗證 $T(0) = 0$ 。此式中右方表 Y 的零元素，而左方表作用在 X 的零元素上。
[提示： $T(0+0) = T(0)$]
3. 設 T 為 1 對 1，何以 $T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ，及 $T(0) = 0$ ？
4. 何以式子 (1.3.6) 所定為一數模？並證此數模為式子 (1.3.5)

所能取的 M 值最小者。

5. 證明式子(1.3.9)。

§ 1.4 由 C^n 到其自身上的線性變換；矩陣

所有線性變換中最簡單者為那些映像 C^n 到其自身上者。設 T 為如此一映像，則 T 可由其線性及其作用於 C^n 的一組基上唯一地決定。任何一組 n 個線性無關的向量可作為一組基，我們不妨取單位向量。

$$e_j = (\delta_{jk}) \quad (1.4.1)$$

此地的 δ_{jk} 是Kronecker 氏的 δ ，也就是此向量其第 j 個分量為1，其餘的分量皆為0，由此可得

若 x 在 e_j 所定的坐標軸為 (x_1, x_2, \dots, x_n) 則

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (1.4.2)$$

現若 T 在向量上取得向量，因此存在者有 n^2 個複數 a_{jk} 使得

$$T[e_k] = a_{1k} e_1 + a_{2k} e_2 + \dots + a_{nk} e_n, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.4.3)$$

依據 T 的線性則有

$$T[x] = T\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k T[e_k]$$

或

$$T[x] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k\right) e_j = y \quad (1.4.4)$$

由此可得向量 y 的各分量。

所稱的矩陣是下面二次式的陣列