大專用書

常微分方程式論

—複變域中常微分方程—

楊重駿 譯

國立編譯館出版

大 專 用 書

常微分方程式論

—複變域中常微分方程—

楊 重 駿 譯

國 立 編 譯 館 出 版

中華民國七十一年五月一日台初版

常微分方程式論

定價：精裝新台幣叁佰伍拾元
平裝新台幣叁佰貳拾元

譯　者：楊　重　駿

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館　址：台北市舟山路二四七號

電　話：三二一六一七一

目 錄

第一章 導言

第二章 存在性及唯一性定理

第三章 奇異點論

第四章 Riccati氏方程式

第五章 線性微分方程式

第六章 特殊的二次線性微分方程式

第七章 代表式定理

第一章　導　言

在本章內我們將要證明或不證明的一些與以後用到的事實列擧出來。其大致可分兩項：(1)是有關代數及幾何方面結構的，(2)解析結構方面的。在第一項下我們將提到一些抽象空間、度量、線性向量空間、數模、定點定理、泛函不等式、偏序、線性變換、矩陣、及代數等。在第二項下我們討論解析函數：解析性、Cauchy 氏積分、Taylor 氏及Maclaurin 氏的級數、整函數及有理整函數、冪級數、成長率、解析延續及函數方程的永合性。這是一個相當繁重的節目，讀者或許會覺得內容過密。我們建議讀者在初看時，不妨略過此章，等到以後的章節內，遇到有關的需要時再回來翻看。

I、代數及幾何的結構

1.1. 向量空間

抽象空間一詞往往與集合或點集表示同樣的事情，這只是論著者有意賦于該集合一個代數的或幾何的或兩者皆具的結構。將 Euler 氏空間 R^n 視爲一原始空間，由它我們抽象化（抽掉）其中某些性質就可得到一抽象空間。在此一提的是性質一詞是不明確的。我們用 X 表示空間，用 x，y，z 等表其中的元素，如果有一個或更多的代數運算能夠施用於元素間，或某一次序的概念至少對其中某些元素有意義，我們就說這個空間賦于了代數的結構。

於一集合，如其可施行加法及數積，則其可成爲一線性向量空間，同時此集合要在加法下爲 Abel 群，若 x，$y \in X$ 則 $x+y$ 仍是 X 的元素，且加法有結合性及可換性，並且有唯一的中性元素 0 使得

對所有的 x 有 $x+0=x$， 及對於每一個元素 x 存在唯一的 $-x$ 使得 $x+(-x)=0$。

至於定義一個數量乘積，首先需要一個數量域，通常是取實數域 R 或複數域 C。對於任何一個數量 α 及元素 x 相應地有唯一的元素 αx；數量乘積爲結合性的，對加法是分配性的，及 $1\cdot x=x$ 其中 1 是數量域的單位元素。

通常我們稱一個實空間或複空間是依據其數量域爲 R 或 C 而定的。也可稱 X 中的元素爲向量。一個線性向量空間如果包括所有兩個元素的乘積，又被稱爲一代數。所有以 t 爲變數的多項式的集合，顯然爲一代數，同樣地所有在點 t_0 爲連續的函數所成的集合也是一代數。

設有一集合含有 X 的 n 個向量 x_j，又設數量域爲 F。若

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots\cdots+\alpha_n x_n=0 \tag{1.1.1}$$

及所有數量 α_i 非爲 0 不可，則稱這 n 個向量 x_j 對於 F 爲線性無關。如可找到一組數量 α_j 滿足 $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots\cdots+|\alpha_n|>0$ 及滿足（1.1.1），則稱這 n 個向量 x_j 對於 F 爲線性相關。此處我們要強調的是所謂相關或無關是針對 F 而言的。如果換了一個 F 的子域 F^0 或延展 F 到一更大的域 F^* 會影響線性有關或無關性的關係的。例如 1 及 $\sqrt{2}$ 對於有理數域 Q 來講爲線性無關，但對所有代數數域 A 來言就不然了。又如空間 X 含有一組 n 個線性無關的向量及對於（ X 中）任何 $n+1$ 個向量必線性相關，稱此空間爲 n 維。如對於任何正整數 n 在 X 中都可找一組 n 個線性無關的向量，我們就稱 X 爲無限維空間。

偏序的概念爲代數結構的另一種形式。即如在 X 中對於某些對元素 x，y 有一次序關係 $x\leq y$（相等於 $y\geq x$）其爲反身性的，常態的，及可遷性的，也即是（i）對於所有的 x，$x\leq x$，（ii）$x\leq y$，$y\leq x$ 導致 $x=y$，（iii）$x\leqslant y$，$y\leq z$ 導致 $x\leq z$。設 X 爲線

性空間及賦有一偏序則對任何向量 a

$$x \leq y \Rightarrow x+a \leq y+a \tag{1.1.2}$$

及對任何正數量 α

$$\alpha x \leq \alpha y \tag{1.1.3}$$

這時 X 可定有一正角錐 X^+ ，其定爲所有滿足 $x \geqslant 0$ 關係的元素 x 的集合。這個正角錐在加法及用正數量乘之 F 是不變的。它含有中性元素 0 也就是通常所謂的零元素。只要 $y-x \in X^+$ 我們就有 $x \leq y$。(譯者加註今後所謂正元素，就是屬於 X^+ 者)。

所有在閉區間〔0，1〕爲連續的實數值函數所成的集合 C〔0，1〕是一代數。我們定它的正角錐 X^+ 爲其所有非負值函數的集合。若 f，$g \in C$〔0，1〕又 $g-f$ 在〔0，1〕爲非負值，則我們有 $f \leq g$。

練習　1.1

1. 設有一空間 X 其爲所有實數值的實變數函數多項式 $P(t)$ 所組成。試證 X 爲一代數。
2. 同樣上題中設 X 一秩序關係 $P<Q$ 是依據規定如 P 對充分大的正實數取正值則定 P 爲正元素。試證此一秩序爲三分法。也就是對於任何一元素 P 僅有三個可能性：(i) P 爲正元素，(ii) $-P$ 爲正元素，或 (iii) $P=0$。
3. 我們稱一個秩序關係爲亞基米得的（Archimedean），如果對於 $x<y \Rightarrow$ 存在一正整數 n 使得 $y<nx$（爲人熟習的實數的秩序就是亞基米得的）。試證在問題 2 中定的秩序非爲亞基米得的。這是因爲所有的元素歸屬於不同的排集 R_k，這兒的 R_k 是所

有多項式次數為 k 的集合，每個 R_k 本身為亞基米得的， 但如果 f ， g 分屬於 R_j 與 R_k 且 $j<k$ ，則 $f<g$ 及對任何正整數 n ， $nf<g$ 。

4. 證明 $1, t, t^2 \cdots\cdots t^n$ 對於 R 為線性無關。又問由這些元素所構成的空間維數是多少？

§1.2 度量空間

一度量空間為一空間中定了距離概念，依據下列的幾個條件：

D_1 對於 X 的一對元素 P 及 Q 可定出一實數 $d(P, Q) \geq 0$ ，又稱由 P 到 Q 的距離，及若且若 $P=Q$ 則 $d(P, Q)=0$ 。

D_2 $d(P, Q)=d(Q, P)$

D_3 對於任何元素 R 我們總有 $d(P, Q) \leq d(P, R)+d(R, Q)$ 。

這些概念可追溯到公元 1890 年敏可夫斯基（ Minkowski ）（ 1864 — 1909 ） 他在有關的所謂 " 數目的幾何 " 的論著中，主要著重在一次式跟二次式的極端性質下，發現規定不同的距離以適應不同的問題。值得注意的是敏氏並不要求條件 D_2 。條件 D_3 又稱為三角不等式。

我們稱一線性向量空間為數模的如果其中下列條件成立：

N_1 對於每一個 $x \in X$ 相應地指定一數值 $\| x \| \geq 0$ ， 及若且若 $x=0$ 時，則 $\| x \|=0$ 。

N_2 對於每個數量 α ， $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$ 。

N_3 $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ 。

如對於一數模的空間設定一度量如下：

$$d(x, y)=\| x-y \|$$

則此空間亦成爲一度量空間。在一度量空間我們可討論分析。因爲在分析中基本的運算爲求一序列的極限此時就顯得有意義了。設 $\{x_n\}$ 爲度量空間 X 的一序列，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0 \tag{1.2.2}$$

則我們稱 x_n 收斂于 x_0。又設如對任何給定的正數 ε，存在著正整數 $N(\epsilon)$ 使得對於所有的 m，$n > N$ 恆有

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \tag{1.2.3}$$

則我們稱 $\{x_n\}$ 爲一 Cauchy 數列。一般若 (1.2.2) 式成立說明 $\{x_n\}$ 爲一 Cauchy 數列，但其逆並不常爲眞。這是因爲所討論的空間本身可能有間隙。一度量空間 X 如果其中所有的 Cauchy 數列都收斂于其相應且存在於 X 中的元素，則我們稱 X 爲一完備空間。所有的 Euler 氏空間皆爲完備空間，還有其他一些以後要遭遇到的函數空間皆爲完備空間。但由所有有理數所構成的空間 Q 不是完備的。

許多在實數分析的概念如閉包、開集、閉集及 ϵ - 鄰近 在完備的度量空間都仍具有意義。然而 Bolzano-Weierstrass 定理在完備的度量空間不見得一定成立，也即是說對某些完備的度量空間存在著一有界的無窮點集，而無一極限點存在。在此順便一提的所謂某集是"有界的"是指說這個集能被包含於一球體 $\{x \mid d(x, 0) < R\}$ 內。又所謂一個 X 的子集 S 的拓撲直徑 $d(S)$ 是指對於所有點 x，$y \in S$ 其所有距離 $d(x, y)$ 的最小上限。

練習 1.2

1. 對於屬於 C^n 的元素 x 其 Euler 氏數模定爲

$\|x\|_2=\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}$，其中 $x=(x_1, x_2\cdots\cdots x_n)$，$x_j$ 可為複數。另外可定的數模有 $\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|x_j|$ 及 $\|x\|_\infty=\sup_{1\leq j\leq n}|x_j|$。試證此兩式定的確為數模，又對於點集 $\|x\|_2=1$ 該兩數模的上下限各為多少？

2. 問在此三個數模的拓撲如何定義一空集？試證凡對於其中之一拓撲為空集者對其他二拓撲亦然。並驗證 C^n 對於這三個數模所定的度量而言，皆為完備的空間。

3. 設 $X=C[0, 1]$ 為由所有在閉區間 $[0, 1]$ 的連續函數 f 所構成，其中的 Cauchy 數列的數模定為 $\|f\|=\sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)|$。試證此空間為完備的。

1.3　映像

我們將討論從一個完備度量空間 X 到另外一完備度量空間 y 的映像（寫像）。通常我們考慮的是 x 與 y 為相同的。事實上一個映像 T 為一對對的點對 $\langle x, y\rangle$，其中 $x\in X$，$y\in Y$。最緊要的是對每一個元素 $x\in X$ 被唯一地指定一個相應的元素 $y\in Y$，對於不同的元素 x_1，x_2 所相應的元素 y_1，y_2 可相同也可不相同。 有時所有的 $x\in X$ 都可指定對應到同一個元素 $y_0\in Y$ 上。對於一映像如果使每個 Y 中的元素 y，至少可有一個 X 中的元素 x 使得 y 成為 x 的像點，我們稱這樣的映像是映成映像。如果

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow y_1=T(x_1)\neq T(x_2)=y_2 \qquad (1.3.1)$$

我們稱此映像 T 為 1 對 1 的。假使存在一有限常數 M 使得

$$d[T(x_1), T(x_2)] \leq Md(x_1, x_2)$$

則稱T爲有界的。這定義是Lipschitz 條件的擴張，也導致T在X上爲連續的結論。

設X，Y爲兩線性向量空間且兩者依據于同樣的數量域，如其滿足下列條件，則稱T爲線性變換如

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \tag{1.3.3}$$

若且若

$$d[T(x), 0] \leq Md(x, 0) \tag{1.3.4}$$

稱T爲有界，最重要的一種情形是當X及Y兩者皆爲完備數模的線性向量空間，我們稱此類空間爲巴拿赫（ Banach ）空間爲紀念波蘭數學家Stefan Banach（ 1892—1945 ），他定之爲B空間。在此情形下，不等式（ 1.3.4 ）具有下面形式：

$$\| T(x) \| \leq M \| x \| \tag{1.3.5}$$

若T爲一線性變換，則$T(0)=0$， 又其爲1對1若滿足：

$$T(x)=0 \Rightarrow x=0$$

若X及Y皆爲B- 空間，則集合$E(X, Y)$ 其元素爲所有由X到Y上的線性有界的變換T並賦于數模

$$\| T \| = \sup \| T(x) \| \tag{1.3.6}$$

成爲一B空間，此中的最小上限是對所原元素x數模爲1者而言。

很自然的一個代數運算在$E(X, Y)$上可定如下：

$$[T_1+T_2](x)=T_1(x)+T_2(x)，(\alpha T)(x)=\alpha T(x) \quad (1.3.7)$$

如$Y=X$，則我們用$E[X]$來表示$E(X,X)$ 並注意乘積很自然地可定如下：

$$(T_1T_2)(x)=T_1(T_2(x)) \quad (1.3.8)$$

由此可得

$$\|T_1T_2\|\leq\|T_1\|\|T_2\| \quad (1.3.9)$$

我們可以證明$E(X,Y)$及$E(X)$在數模度量下爲完備的，所以是B-空間。同時$E(X)$不但是一數模代數，且爲一B- 代數，因它是B-空間加上滿足不等式(1.3.9)。

設$T\in E(X)$同時是1對1的映像，這時存在一逆轉換T^{-1}使得對所有的元素x及$y=T(X)$

$$T^{-1}[T(x)]=x \quad 及 \quad T[T^{-1}(y)]=y \quad (1.3.10)$$

練習 1.3

1. 採用在問題1.2：1 中的任何C^n的度量，證明$E(C^n)$爲完備的。
2. 若T爲一線性變換，試驗證$T(0)=0$。此式中右方表Y的零元素，而左方表作用在X的零元素上。
   [提示：$T(0+0)=T(0)$]
3. 設T爲1對1，何以$T(x)=0\Rightarrow x=0$，及$T(0)=0$？
4. 何以式子(1.3.6)所定爲一數模？並證此數模爲式子(1.3.5)

所能取的M值最小者。

5. 證明式子(1.3.9)。

§1.4　由C^n到其自身上的線性變換；矩陣

所有線性變換中最簡單者爲那些映像C^n到其自身上者。設T爲如此一映像，則T可由其線性及其作用於C^n的一組基上唯一地決定。任何一組n個線性無關的向量可作爲一組基，我們不妨取單位向量。

$$e_j=(\delta_{jk}) \tag{1.4.1}$$

此地的δ_{jk}是Kronecker氏的δ，也就是此向量其第j個分量爲1，其餘的分量皆爲0，由此可得

若x在e_j所定的坐標軸爲(x_1，x_2……，x_n)則

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots\cdots+x_ne_n \tag{1.4.2}$$

現若T在向量上取得向量，因此存在者有n^2個複數a_{jk}使得

$$T[e_k]=a_{ik}e_1+a_{2k}e_2+\cdots\cdots+a_{nk}e_n，k=1，2\cdots\cdots n \tag{1.4.3}$$

依據T的線性則有

$$T[x]=T(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k)=\sum_{k=1}^{n}x_kT[e_k]$$

或

$$T[x]=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\ x_k)e_j=y \tag{1.4.4}$$

由此可得向量y的各分量。

所稱的矩陣是下面二次式的陣列