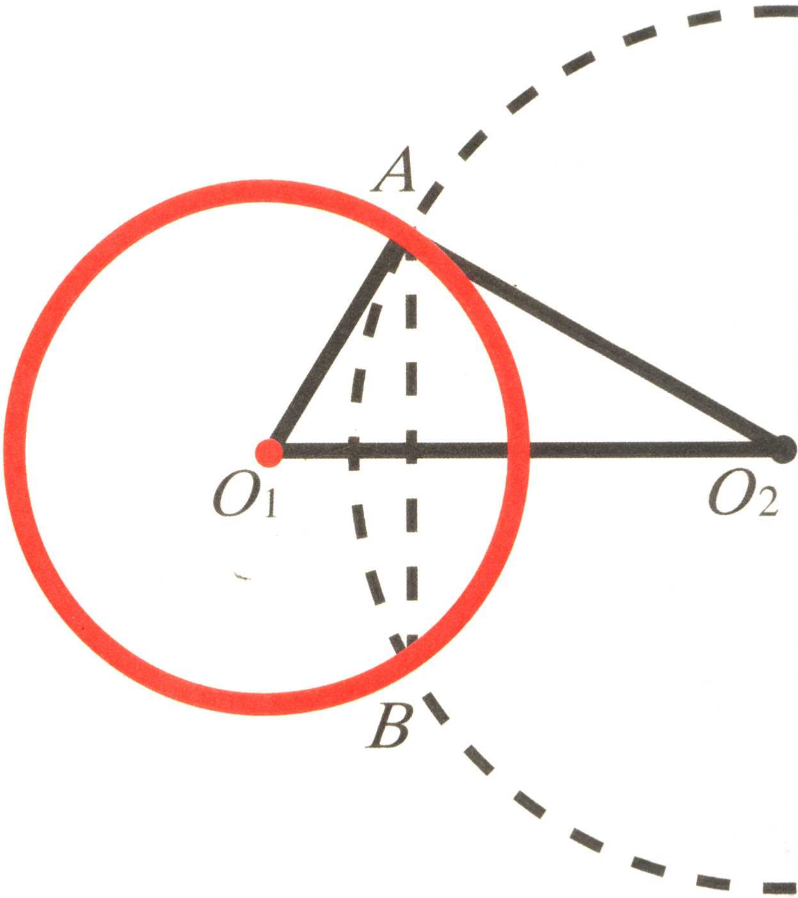
数学方法论入门

SHUXUEFANGFALUNRUMEN

郑毓信 著



浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

数学方法论入门

SHUXUEFANGFALUNRUMEN

郑毓信 著

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论入门/郑毓信著.—杭州：浙江教育出版社，2006.3

ISBN 7-5338-6332-1

Ⅰ.数… Ⅱ.郑… Ⅲ.数学方法—方法论 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018038 号

数学方法论入门

郑毓信　著

● 出版发行　浙江教育出版社
（杭州市天目山路 40 号　邮编 310013）
● 责任编辑　蒋　婷
● 装帧设计　曾国兴
● 责任校对　戴正泉
● 责任出版　程居洪
● 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
● 印刷装订　杭州富春印务有限公司

▶ 开　本　787×1092　1/16
▶ 印　张　12
▶ 字　数　240000
▶ 版　次　2006 年 3 月第 1 版
▶ 印　次　2006 年 3 月第 1 次
▶ 印　数　0001-5000
▶ 书　号　ISBN 7-5338-6332-1/G·6302
▶ 定　价　20.00 元

联系电话　0571-85170300-80928
E-mail：zjjy@zjcb.com
网址：www.zjeph.com

再版说明

《数学方法论入门》原出版于1985年。尽管在发行初期曾由于发行渠道不够通畅遭遇到了一定困难，但有幸得到了《中学数学》杂志编辑部、特别是原主编唐复苏教授的大力支持，结果首印5000册书在两个月内就通过邮购销售一空，更有不少读者因未能买到此书而表示遗憾。

自1985年以来，已经整整20个年头过去了。在这一期间，数学方法论已由当时的一门新兴学科逐渐成为了广大数学教师耳熟能详的一门重要学科，更有不少教师在如何用数学方法论指导实际教学活动这一方面作出了很好的工作。如果说《数学方法论入门》一书也曾在这一过程中发挥了一定作用，这无疑是令笔者十分高兴的。

20年后，浙江教育出版社有意将《数学方法论入门》充实再版，这当然是对于当年工作的直接肯定，同时考虑到这一著作作为一本通俗易懂的数学方法论入门书，对于新进者仍有一定的参考价值。正是基于这样的考虑，再版时对原版中的主要内容（第1章至第5章）基本上保留了原来的面貌；同时，为了充分反映这一领域中的最新进展，以及更好地促进数学方法论与实际数学教学活动的紧密联系，再版时增加了6、7两章。希望能再次得到广大读者的肯定。

一本著作在出版20年后能够再版，对于作者当然是一件十分开心的事，同时也应感谢浙江教育出版社、特别是张宝珍同志的大力支持，更感谢广大读者、特别是一线数学教师多年来所一直给予的认同与信任。

郑毓信

2005年8月于南京大学

前　言

QIANYAN

随着数学科学的深入发展，讲究数学研究的艺术并对数学的研究方法本身进行专门的研究已成为必然的发展趋势。对此国外早已开始了研究，如著名数学家G.波利亚就曾以数十年的时间从事数学方法论的研究。近年来，我国数学界也开始了数学方法论的研究，徐利治教授的专著《数学方法论选讲》（华中工学院出版社，1983）就是一例。为了进一步促进数学方法论的学习和研究，在徐利治教授的支持与鼓励下，笔者写了《数学方法论入门》一书，希望能引起广大读者的兴趣，并能从中得到一定的启发和提高。

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创造等法则的一门新兴学科。由于数学方法论的涉及面十分广泛，本书作为一部“入门书”自然就不可能对所有这些问题都作出详尽的讨论，而只能从整体的角度对数学方法论中一些具有普遍意义的问题进行分析和讨论。也正因如此，本书论述的重点就不在于各种具体的研究方法，而是一般性的思想方法；分析的范围也不局限于任一特殊的数学分支，而是着眼于各个数学分支中共性的东西。

一部好的数学方法论著作应当是深入浅出的。因为，即使是初等题材的研究，也需要正确的研究方法，而且，就如法国著名数学家J.阿达玛在其名著《数学领域中的发明心理学》中所指出的，一个学生解决某一代数或几何问题的过程与数学家作出发现或创造的过程具有相同的性质，至多只有程度

上的差异而已。当然,初等的题材毕竟不可能完全体现现代数学的特点,解题方法的分析也只是数学方法论研究的一个侧面,因此,数学方法论的著作又必须包含一定的提高成分,所涉及的题材也必须超出解题方法的范围。处理好普及与提高、特殊与一般的关系,即是本书的一个努力方向。希望不仅能对大、中学生起到直接的帮助作用,也能有助于广大数学教师改进自己的教学工作,还能对从事数学、数学哲学及方法论研究的专业工作者具有一定的参考价值。

作为数学发展规律与研究方法的分析,特别是思想方法的研究,数学方法论不仅涉及思维对象(数学本体)的辩证性质,而且也涉及思维过程(认识及反映过程)的辩证性质,因此,正确的哲学思想对于数学方法论的研究就具有特殊的意义。本书也有意识地加强了这一方面的分析。由于数学方法论尚属于一门新兴的学科,因此,本书的选题与立论就难免有不妥之处,希望专家与读者能予以批评、指正。

笔者在数学方法论方面的研究工作得到了徐利治教授的直接指导,因此,本书如果具有一定价值的话,主要应感谢徐利治教授的帮助和指导。我的哲学导师夏基松教授在哲学方面也给予我很大的帮助。对此特表示诚挚的谢意。

郑毓信

1985年2月于南京大学

目录
MULU

第 1 章
数学家的思维方式

第一节　善于使用化归是数学家思维方式的重要特点

一、化归法的一般模式

在数学方法论的研究中，容易首先想到的一个问题是：与一般的科学家（如物理学家）相比，数学家们在思维方法上是否有其独特的地方？对此，一种可能的回答是：数学家们特别善于使用化归的方法来解决问题。也就是说，在解决问题时，数学家们往往不是对问题进行直接的攻击，而是对此进行变形、使之转化，直到最终把它化归成某个（或某些）已经解决的问题。

空洞的分析不如具体的事例，下面就让我们举些实例来说明。

【例 1】 假设我们已经证明了三角形的内角和为 180°，那么，（凸）多边形的内角和就可按照图 1－1 所示的方法来进行计算。

由于四边形可以分割成两个三角形，因此，它的内角和就是 2×180°；五边形可以分成三个三角形，因此，它的内角和是 3×180°；……一般地，由于 n 边形可以分割成 $(n-2)$ 个三角形，因此，它的内角和就是 $(n-2)\cdot 180°$。

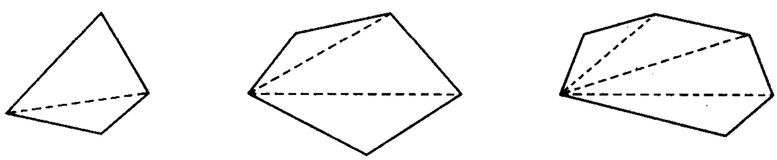


图 1－1

对上述的解题过程进行分析，容易看出：其中的关键在于把多边形分割成（若干个）三角形，而事实上这就是把原来的求取多边形内角和的问题化归成了求取三角形内角和的问题. 由于后一问题是已经解决了的，这样，原来的问题通过化归也就得到了解决。

【例 2】 在掌握了一元一次方程的解法以后，我们就可以利用加减消元法或代入消元法来求解二元一次方程组（更为一般地说，就是求解线性方程组）。

例如，方程组$\begin{cases}3x+y=14, & ①\\ 2x-y=6。 & ②\end{cases}$可以求解如下：

解法 1 （加减消元法）：

①+②得　$5x=20$，即　$x=4$。

把 $x=4$ 代入①并化简可得 $y=2$，

故原方程的解为$\begin{cases}x=4,\\ y=2。\end{cases}$

解法 2 （代入消元法）：

由①得　$y=14-3x$，　③

把③代入②得　$2x-(14-3x)=6$，

化简可得　$x=4$。

把 $x=4$ 代入③得 $y=2$。

故原方程组的解为$\begin{cases}x=4,\\ y=2。\end{cases}$

从方法论的角度看，显然，这里所使用的也是化归的方法：通过加减或代入，我们把原来的求解二元一次方程组的问题转化成了求解一元一次方程的问题（即达到了“消元”的目的），由于后一问题已经得到了解决，原来的问题也就迎刃而解了。

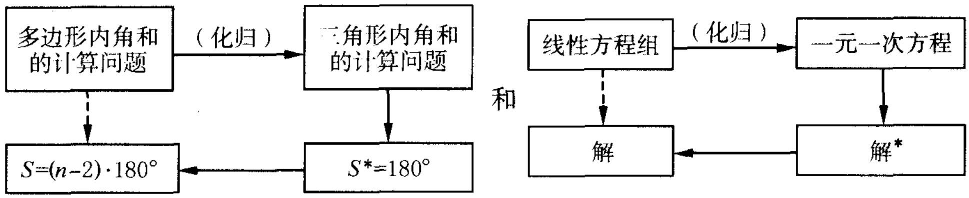
【例 3】 在国外学术界中广为流传着这样一个笑话，和先前的例子相比，它也许更能体现数学家的思维特点：

有人提出了这样一个问题：“假设在你面前有燃气灶、水龙头、水壶，你想烧些开水，应当怎样去做？”对此，某人这样回答：“在水壶中放入水，点燃燃气灶，再把水壶放到燃气灶上。”提问者肯定了这一回答。但是，他又追问道：“如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那你又应当怎样去做？”这时被提问者往往会很有信心地回答说：“点燃燃气灶，再把水壶放到燃气灶上。”但是，提问者指出，这一回答并不能使他感到满意。因为，更好的回答应是这样的：“只有物理学家才会这样做；而数学家们则会倒去水壶中的水，并声称我已经把后一问题化归成先前的问题了。”

利用化归法解决问题的过程可简单地归结为：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{问题}} \arrow[r, "\text{（化归）}"] \arrow[d, dashed] & \boxed{\text{问题}^*} \arrow[d] \\
\boxed{\text{解答}} & \boxed{\text{解答}^*} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

例如，前面两个例子中的解题过程就可分别表示为：



二、化归的方向

由未知到已知、由难到易、由繁到简　在用化归法解决问题时，一个必要的条件是：与原来的问题相比，化归后所得出的问题* 必须是已经解决了的，或者是较为容易、较为简单的。也就是说，化归的方向应当是：由未知到已知，由难到易，由繁到简。

可以用以下的例子来说明化归法所应满足的条件：

【例 4】　解方程组：$\begin{cases} x^2+y^2+7xy+4x+4y=31, & ① \\ xy=2。 & ② \end{cases}$

对此有两种可能的解法：

解法 1：

①$-5\times$②得　$x^2+y^2+2xy+4x+4y=21$，

即　$(x+y)^2+4(x+y)-21=0$。

令 $x+y=u$，就有 $u^2+4u-21=0$。

容易解得　$u_1=3, u_2=-7$；即　$x+y=3$ 或 $x+y=-7$。

从而，原来的问题就化归成了如何求解如下的两个方程组：

$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=2。 \end{cases}$　这已经是不难解决的了。

解法 2：

由②可得　$y=\dfrac{2}{x}$。③

把③代入①，有：

$x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+7x\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)+4x+4\left(\dfrac{2}{x}\right)=31$. 即 $x^4+4x^3-17x^2+8x+4=0$。

从而，只要能求得这个四次方程的解，原来的问题也就解决了。

应当说这两种解法在逻辑上都是无可非议的，即都可被看成化归法的具体运用。但是，与解法 2 相比，解法 1 显然更为可取。因为，一般的四次方程的求解问题是相当困难的，而只有解法 1 才真正达到了“化未知为已知，化难为易，化繁为简”的目的。

但是，对于所说的“繁”和“简”、“难”和“易”等，我们不能仅从形式上去看待，而必须具体问题具体分析。例如，从形式上看，用加倍法去计算一个未知量显然要比直接

计算这个未知量更为繁琐(例如,有这样一个笑话:一个蠢人想要弄清自己究竟有多少头羊,他不是直接去对羊进行点数,而是趴在地上计算羊腿的数目……);但是,对于以下的问题,如果能想到用"加倍法",就很容易解决:

$S_1=1+2+3+\cdots+99=?$

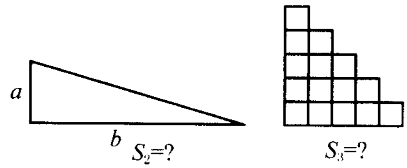


图 1-2

因为,通过"加倍法"所得出的问题*,或者是已经解决了的,或者是较为容易解决的。即有:

$2S_1=1+2+3+\cdots+99+99+98+97+\cdots+1=99\times100=9\ 900$。

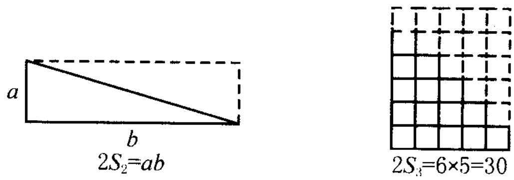


图 1-3

从而就有 $S_1=\frac{1}{2}\times9\ 900=4\ 950$,

$S_2=\frac{1}{2}ab$,

$S_3=\frac{30}{2}=15$。

为了更清楚地说明问题,可以再举一个例子。

【例 5】 用一根定长的绳子在海滩上围出一个面积尽可能大的沙滩(临海的一面不用围),试问:应当采取什么样的形状?

运用"加倍法",这一问题就容易得到解决。因为,我们已经知道:在具有相同周长的各种平面图形中,以圆形的面积为最大。因此,在现在的情况下,我们就应采取圆心在海岸线上的半圆形式。

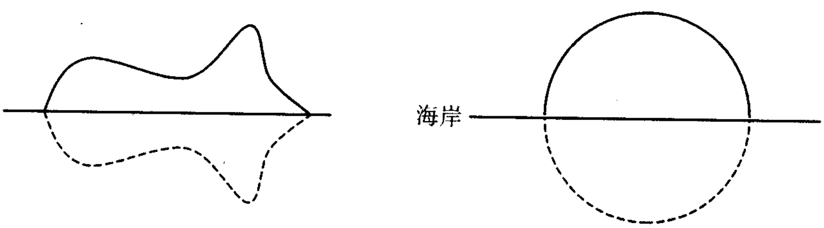


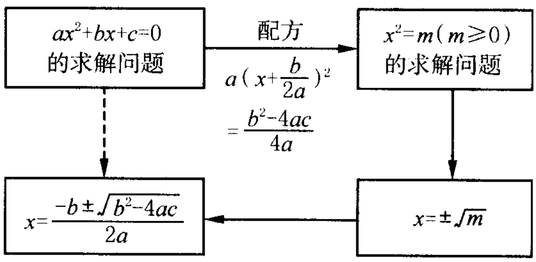
图 1-4

由于加倍后的未知量可以看成“原像”与“镜像”的“合成”(例如,可以把上例中的海岸线想像成一面镜子),因此,上述的方法就常常被称为“镜像法”(颇有趣的是,在 $S=1+2+3+\cdots+99$ 的例子中,未知元素的“镜像”恰好就处于最理想的排列方式:$99+\cdots+3+2+1$)。

总之,我们既应注意化归的必要条件,又应具体问题具体分析,不能犯教条主义的错误。

由一般到特殊　相对于一般而言,特殊问题的解决往往比较容易、比较简单,因此,数学中就经常用到由一般到特殊的化归。

【例 6】　由于特殊类型的一元二次方程 $x^2=m\ (m\geqslant 0)$ 的求解问题是容易解决的,因此,只要能把一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 转化成这种特殊类型(可以通过“配方”来实现),一元二次方程的求解问题就解决了。即:



【例 7】　正如前面求取多边形内角和的例子(例 1)所表明的,在平面直线图形的研究中,我们经常用到由一般的多边形向特殊的多边形——三角形的化归。对此还可以四边形的研究为例,作出进一步的说明。

具体地说,任一四边形都可用对角线分割成两个三角形;特殊地,平行四边形、菱形、矩形及正方形等特殊四边形更可以分割成一些特殊的三角形,即分割成两个全等的三角形、全等的等腰三角形、全等的直角三角形及全等的等腰直角三角形(如图 1-5)。这样,依据各种特殊三角形的性质,我们就可以立即推出相应的四边形的性质。

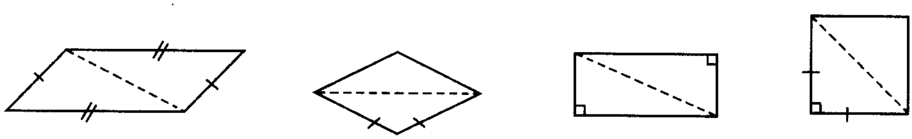


图 1-5

例如,依据全等三角形对应边相等、对应角相等的事实,就可推知平行四边形具有以下一些性质:①对边相等;②对角相等,邻角互补;③对角线互相平分。其次,依据等腰三角形“底边上的中线垂直于底边且平分顶角”的事实,我们则可推知:菱形的对角线互相垂直且平分顶角(如图 1-6)。从而,菱形具有以下一些性质:①四条边都相等;②对角相等、邻角互补;③对角线互相垂直平分且平分顶角。

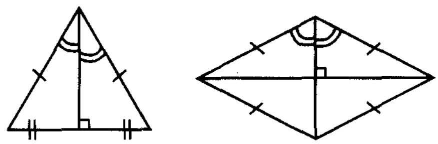


图 1－6

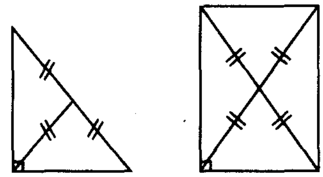


图 1－7

类似地，依据直角三角形“斜边上的中线等于斜边的一半”这一事实，就可推知矩形的对角线相等（如图 1－7）。从而，矩形具有以下一些性质：①对边相等；②四个角都等于 90°；③对角线相等且互相平分。最后，由于正方形既可被看作菱形，又可被看作矩形，因此正方形具有以下性质：①四条边都相等；②四个角都等于 90°；③对角线相等且互相垂直平分，且平分顶角。正方形的这些性质也可通过将它分割成两个全等的等腰直角三角形来直接推出（如图 1－8）。

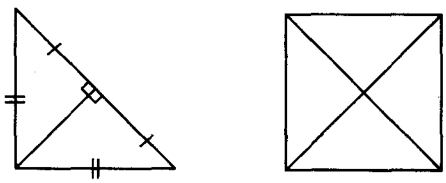
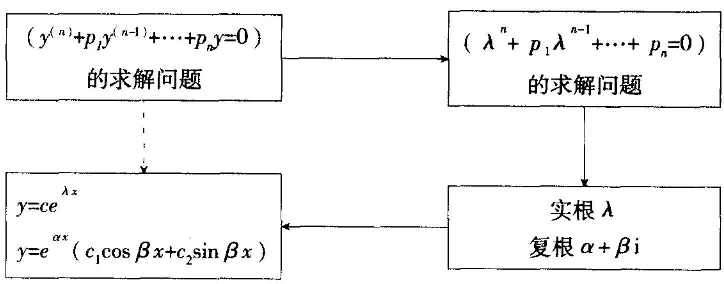


图 1－8

【例 8】 在高等数学中，也可以找到很多由一般向特殊化归的应用实例。例如，n 阶常系数齐次线性微分方程（$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0$）就可通过相应的代数方程——特征方程（$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n=0$）来求解。即



更为一般地说，“由特殊到一般，由一般到特殊”可以被看成人类认识的一个基本规律。这一规律在数学中也有着十分广泛的应用。对此我们将从各个不同的角度逐步地予以介绍。

三、变化的成分

对所需解决的问题进行变形时，既可以对整个问题，即已知成分（条件）及未知成分（结论）同时进行变形，也可以仅对其中的某一部分进行变形。例如，前面所介绍的“加倍法”就可看成对未知成分进行变形的例子，因为在解题过程中，我们不是直接去求取未知量 S，而是先求取它的 2 倍，即 $2S$；另外，美国著名的数学家和数学教育家 G. 波利亚在《数学的发现》一书中所给出的关于“鸡兔同笼”问题的如下解法，则可以被看成对已知成分进行变形的具体例子。

【例 9】 波利亚所讨论的问题是这样的：“一个农夫有若干只鸡和兔子，它们共有 50 个头和 140 只脚，问鸡兔各有多少只？”

波利亚指出，我们可以假想出现了这样一种奇特的现象（**注意**：这可以被看成“思想实验”在数学中的具体应用）：每只鸡都仅用一只脚站在地下，而兔子则举起了前腿。这时，问题就不难解决了。因为，在这种情况下，①脚的总数减少了一半，即只剩下 70 只脚（这就是已知条件的变化）；②鸡头的数量与鸡脚的数量是相等的，而如果有 1 只兔子，脚的总数就要比头的总数大 1。因此，现在的脚的总数（70）与头的总数（50）的差就是兔子的数目，即有 $70-50=20$ 只兔子；进而，鸡的数目就是 $50-20=30$ 只。

以下问题则可以看成对整个问题进行变形的例子。

【例 10】 如图 1－9，已知三角形 ABC 的三条中线，求作这个三角形。

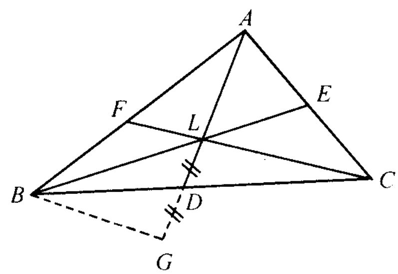


图 1－9

依据中线定理，我们知道：$DL=\frac{1}{3}m$，$BL=\frac{2}{3}n$，$CL=\frac{2}{3}p$（其中，m,n,p 分别代表 BC,AC,AB 边上的中线的长）。因此，如果延长 LD 至 G 点，使 $DG=LD$，就有 $LG=\frac{2}{3}m$，$BL=\frac{2}{3}n$，$BG=\frac{2}{3}p$（因为 $\triangle BDG\cong\triangle CDL$）。这样，原来的问题就化归成已知三边求作三角形（$\triangle BLG$）的问题，而这就不难解决了。具体作法略。

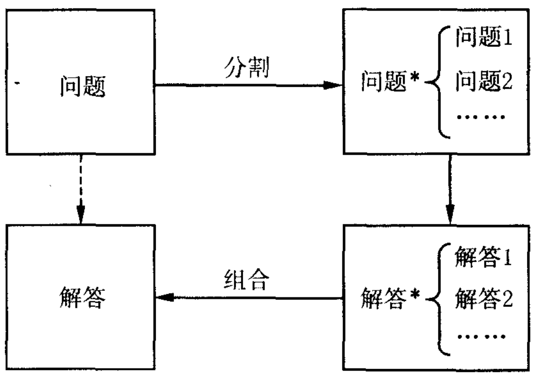
总之，在求解问题的过程中，我们应既善于对未知成分或已知成分进行变形，又善于对整个问题进行变形。一言以蔽之，就是用可变的观点、而不是用静止的眼光来看待问题。

第二节　化归的方法

运用化归法时，关键在于如何将所要解决的问题转化成已经解决或较为容易（简单）的问题。数学中用以实现化归的方法是很多的。这里我们仅介绍几种常用的方法。

一、分割法

什么是分割法？对此，可以用法国著名哲学家、数学家笛卡尔的一段话来回答："把你所考虑的每个问题，按照可能和需要，分成若干部分，使它们更易于求解。"一般地说，用分割法解决问题的过程可归结为：



形体分割法　在面积或体积的计算中经常用到的分割法（在此特称为"形体分割法"，以与我们在此所介绍的广义"分割法"相区别）可以看成通过对未知成分进行分割实现化归的典型例子。

【例 1】　图 1－10 所示为弓形面积的计算方法：

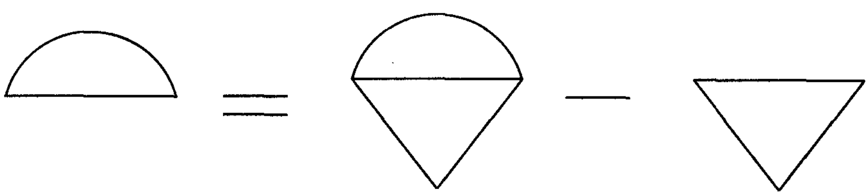


图 1－10

即 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$

又，图 1－11 所示为“隧道形截面积”的计算方法：

即 $S_{\text{隧道截面积}}=S_{\text{弓形}}+S_{\text{矩形}}$。

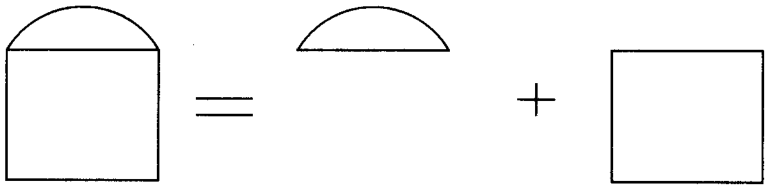
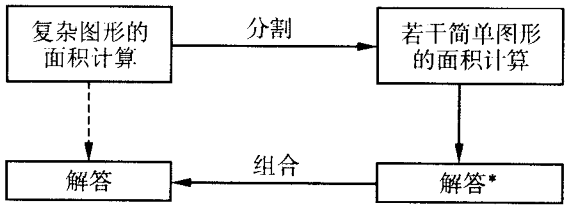


图 1－11

一般地说，这种计算面（体）积的过程可归结为：



叠加法　在数学研究中，对未知成分的分割常常被用以实现由一般向特殊的化归。例如，通常所谓的“叠加法”就是这样的情况。

【例 2】　平面几何中关于圆周角及同弧所对的圆心角之间关系的研究可以看作叠加法的典型例子。

如果圆心位于圆周角的一边上（如图 1－12 甲），所说的问题就不难解决了。因为，此时显然有 $\angle ACB=\angle OBC$，从而就有 $\angle AOB=\angle ACB+\angle OBC=2\angle ACB$，也就是说，圆周角等于同弧所对的圆心角的一半。

对于圆心并不位于圆周角的一边上的一般情况来说，只需要进行适当的“分割”就可化归成上述的特殊情况（如图 1－12 乙）。其中，$\angle ACB=\angle DCB+\angle ACD$（或 $\angle ACB=\angle DCB-\angle ACD$）。通过相应的线性组合，我们就可证明上述关于“圆周角等于同弧所对圆心角的一半”的结论。

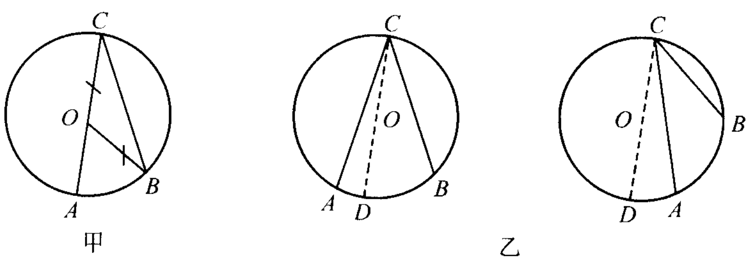


图 1－12

对上述例子进行分析，可以看出：