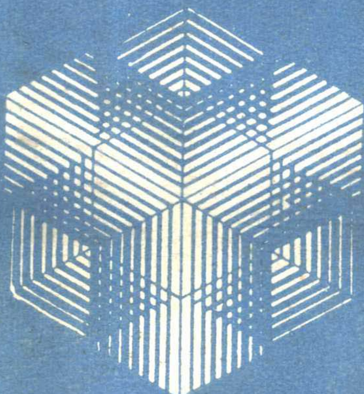
初中数学解题方法总汇

田钦　张慈明　编著



北京少年儿童出版社

初中数学解题方法总汇

田　钦　张慈明 编著

北京少年儿童出版社

初中数学解题方法总汇
CHUZHONG SHUXUE JIETI FANGFA ZONGHUI
田钦　张慈明　编著
*
北京少年儿童出版社出版
（北京北三环中路6号）
新华书店北京发行所发行
安 平 印 刷 厂 印 刷
*
787×1092毫米　32开本　　18.5印张　409,000字
1988年11月第1版　　1988年11月第1次印刷
印数 1—7,200
ISBN 7-5301-0094-7/G·78
定　价：5.55 元

内 容 提 要

以教学大纲为基本要求，精炼出各章内容包含的基本解题方法，为学生解题提供有利的依据和手段。

内容的安排上，按照教材的顺序，依次分析各部分内容中的解题方法，同时配备大量的例题进行说明，便于学生理解和掌握。

习题的选择上，基本上囊括了初中阶段代数和几何中各类典型题目。尤其是相当一部分题目用较高观点作指导分析，有利于提高学生的数学素质和能力。

目　录

一、有 理 数

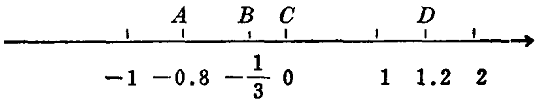
1. 比较法

比较两个有理数的大小，常用两种方法：一是利用有理数运算，计算两个数的差，根据差为正数、零、负数来确定两个数的大小；二是将两个数在数轴上标出，根据两个点的相对位置，决定两个数的大小．这两种方法，前者比较两数的差，后者比较两数对应点的位置，都进行了比较，我们把它们叫比较法．

例 1 用"大于"符号，将下列各数从大到小排列起来：

$-\frac{1}{3}$，-0.8，0，1.2.

解：〈**方法一**〉 先将这四个数在数轴上表示出来：



其中 A 点表示-0.8，B 点表示$-\frac{1}{3}$，C 点表示0，D 点表示 1.2．这四个点从左到右依次为：$A\to B\to C\to D$．因为数轴上越靠右的点，表示的数越大，所以这四个数用"大于"号排列起来，应为：$1.2>0>-\frac{1}{3}>-0.8$.

〈方法二〉 计算两个数的差，观察其结果．

$\because$ $1.2-0=1.2$，$1.2>0$，

$\therefore\quad 1.2>0.$

$\because\quad 0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}>0,$

$\therefore\quad 0>-\frac{1}{3}.$

$\because\quad \left(-\frac{1}{3}\right)-(-0.8)=\frac{7}{15},\ \frac{7}{15}>0,$

$\therefore\quad -\frac{1}{3}>-0.8.$

$\therefore\quad 1.2>0>-\frac{1}{3}>-0.8.$

利用两个数的差，判断两数大小的方法的原理是：对于任意两个有理数 a、b，当 $a-b>0$ 时，$a>b$；当 $a-b=0$ 时，$a=b$；当 $a-b<0$ 时，$a<b$. 将这个原理应用到有理数的各种情况，得出如下结论：任何正数大于零；任何正数大于负数；两个正数，绝对值较大的数较大；两个负数，绝对值较小的数较大. 具体两个有理数比较大小，既可用上述结论，也可以直接计算它们的差.

例 2 比较下列每对数的大小：

$-\frac{5}{7}$与$-\frac{2}{3}$，$-\frac{5}{7}$与$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$与$\frac{2}{3}$，$-\frac{247}{2000}$与-0.1235，-2^4与$(-2)^4$.

解：〈方法一〉 $-\frac{5}{7}$与$-\frac{2}{3}$同为负数，

$\because\quad \left|\frac{5}{7}\right|>\left|\frac{2}{3}\right|,\ \therefore\quad -\frac{5}{7}<-\frac{2}{3}.$

$-\frac{5}{7}$与$\frac{2}{3}$符号相反，$\therefore\quad \frac{2}{3}>-\frac{5}{7}.$

$\frac{5}{7}$与$\frac{2}{3}$同为正数，

$\because \quad \left|\frac{5}{7}\right|>\left|\frac{2}{3}\right|$， $\therefore \quad \frac{5}{7}>\frac{2}{3}$.

$-\frac{247}{2000}$与-0.1235 同为负数，

$\because \quad \left|\frac{247}{2000}\right|=|0.1235|$， $\therefore \quad -\frac{247}{2000}=-0.1235$.

-2^4 是负数，$(-2)^4$ 是正数， $\therefore \quad (-2)^4>-2^4$.

〈方法二〉 $-\frac{5}{7}-\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{21}$， $-\frac{1}{21}<0$,

$\therefore \quad -\frac{5}{7}<-\frac{2}{3}$.

$-\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=-\frac{29}{21}$， $-\frac{29}{21}<0$,

$\therefore \quad -\frac{5}{7}<\frac{2}{3}$.

$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{1}{21}$， $\frac{1}{21}>0$,

$\therefore \quad \frac{5}{7}>\frac{2}{3}$.

$-\frac{247}{2000}-(-0.1235)=0$,

$\therefore \quad -\frac{247}{2000}=-0.1235$.

例 3 x 比 y 大 $4\frac{1}{7}$，那么 $x-2\frac{7}{8}$与 $y+2\frac{8}{9}$谁大?大多少?

解：依题意 $x=y+4\frac{1}{7}$,

$\therefore \quad x-2\frac{7}{8}=y+4\frac{1}{7}-2\frac{7}{8}=y+1\frac{15}{56}.$

$$\left(x-2\frac{7}{8}\right)-\left(y+2\frac{8}{9}\right)=-1\frac{313}{504}.$$

$\therefore \quad y+2\frac{8}{9}$比$x-2\frac{7}{8}$大$1\frac{313}{504}$.

例 4 什么数的相反数比它本身小？比它本身大？等于它本身？什么数的倒数等于它本身？

解：设这个有理数为 a，则它的相反数为 $-a$.

① 欲使 $a>-a$，

须要并且只须要 $a-(-a)>0$，

$a+a>0$，

即 $a>0$.

就是说：当一个数为正数时，它的相反数比它本身小.

(下面将“须要并且只须要”，简述为“须且只须”)

② 欲使 $a<-a$，

须且只须 $a-(-a)<0$，

$2a<0$，

即 $a<0$.

当一个数为负数时，它们相反数大于它本身.

③ 欲使 $a=-a$，

须且只须 $a-(-a)=0$，

$2a=0$，

即 $a=0$.

只有零的相反数才等于它本身.

④ 设一个有理数为 a，则它的倒数是 $\frac{1}{a}$.

欲使 $a=\frac{1}{a}$，

须且只须 $a-\frac{1}{a}=0$，

$\frac{a^2-1}{a}=0$，

$a^2-1=0$，

$a^2=1$，

即 $a=1$ 或 $a=-1$.

只有 $+1$ 或 -1 的倒数等于本身.

例 5 $a-b$ 的值一定小于 a 吗？

解：$(a-b)-a=a-b-a=-b$.

因为 b 符号不定，$-b$ 符号也不定，$a-b$ 与 a 的大小关系也不定. 实际上，

当 $b>0$ 时，

$-b<0$，$a-b$ 小于 a；

当 $b=0$ 时，

$-b=0$，$a-b$ 等于 a；

当 $b<0$ 时，

$-b>0$，$a-b$ 大于 a.

例 6 在什么条件下，下列结论正确：

(1) a 大于 $2a$；(2) a^2 大于 a；(3) 1 小于 $\frac{1}{a}$；(4) $\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$.

解：a 是用字母表示的数，无法在数轴上找到表示它的点，这时必须用考查两数差的方法. 值得指出的是，像本题这种用字母表示的数，它们的大小关系，一般无确定结论.

它随字母表示的数的变化而变化.

(1) 欲使 $a>2a$,

须且只须 $a-2a>0$,

$-a>0$,

$a<0$.

$\therefore$ 当 $a<0$ 时, a 大于 $2a$.

(2) 欲使 $a^2>a$,

须且只须 $a^2-a>0$,

$a(a-1)>0$,

根据乘法符号法则:

$$\begin{cases} a>0, \\ a-1>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0, \\ a-1<0. \end{cases}$$

即 $a>1$ 或 $a<0$.

$\therefore$ 当 $a>1$ 或 $a<0$ 时, a^2 大于 a.

(3) 欲使 $1<\frac{1}{a}$,

须且只须 $1-\frac{1}{a}<0$,

$\frac{a-1}{a}<0$,

相反符号的数相除才能得负数.

$$\begin{cases} a-1<0, \\ a>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a-1>0, \\ a<0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a<1, \\ a>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a>1, \\ a<0. \end{cases}$$

即 $0<a<1$.

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，1 小于 $\frac{1}{a}$.

(4) 欲使 $\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$,

须且只须 $\frac{5}{13}a-\frac{8}{17}a=0$,

$a\left(\frac{5}{13}-\frac{8}{17}\right)=0$,

即 $a\times\frac{-19}{13\times17}=0$,

两数乘积为零，其中至少有一个数为零. 而 $\frac{-19}{13\times17}\neq0$, 只有 $a=0$.

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$.

2. 绝对值讨论法

绝对值有两种定义，代数定义是：一个正数的绝对值是它本身；零的绝对值是零；负数的绝对值是它的相反数. 几何定义是：一个数的绝对值，是在数轴上表示它的点到原点的距离. 两种定义的本质相同，从效果看都有 $|x|\geqslant0$. 绝对值运算时最主要的方法，是将带有绝对值符号的数，通过讨论的办法，去掉绝对值符号. 去绝对值符号的规律是：

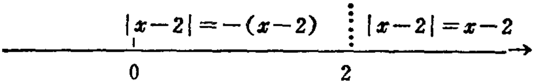
$$|a|=\begin{cases}a & \text{当}\, a>0\, \text{时;}\\ 0 & \text{当}\, a=0\, \text{时;}\\ -a & \text{当}\, a<0\, \text{时.}\end{cases}$$

这里 a 可能是一个数，也可能是多项式. 为了讨论时方便，通常把使 $|a|=0$ 的 a 的值叫做 $|a|$ 的零点. 一个绝对值表示的数，可以以零点为界分成三种情况. 如 $|x-2|$ 的零点是

2，于是有：

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{当 } x>2 \text{ 时；} \\ 0 & \text{当 } x=2 \text{ 时；} \\ -(x-2) & \text{当 } x<2 \text{ 时.} \end{cases}$$

从数轴上看就是：



例 1 用讨论的方法将下列各式的绝对值符号去掉：(1) $|2-x|$；(2) $|-a|$；(3) $|3x+4|$；(4) $|x+1|+|x-1|$.

解：

(1) $|2-x|=|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{当 } x\geqslant 2 \text{ 时；} \\ -(x-2) & \text{当 } x<2 \text{ 时.} \end{cases}$

(2) $|-a|=|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时；} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时.} \end{cases}$

(3) $|3x+4|=\begin{cases} 3x+4 & \text{当 } x\geqslant -\dfrac{4}{3} \text{ 时；} \\ -(3x+4) & \text{当 } x<-\dfrac{4}{3} \text{ 时.} \end{cases}$

(4) -1 是 $|x+1|$ 的零点，即 $x<-1$ 时，$|x+1|=-(x+1)$；当 $x\geqslant -1$ 时，$|x+1|=x+1$.

1 是 $|x-1|$ 的零点，即 $x<1$ 时，$|x-1|=-(x-1)$；当 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$.

如果以 -1 为分界点，将有理数分成 $x<-1$ 和 $x\geqslant -1$ 两部分，则在 $x<-1$ 时，$|x+1|$ 与 $|x-1|$ 去掉绝对值符号后均有准确的结果，但在 $x\geqslant -1$ 时，$|x-1|$ 去掉绝对值符

号后的结论不确定，既可能等于 $x-1$，也可能等于 $-(x-1)$，没有统一的符号规律，因此，以 -1 为分界点，将有理数分成的两部分不能完成绝对值的化简工作．同理，以 1 为分界点，将有理数分成两部分也不能解决问题．

如果将有理数以 -1 和 1 为分界点分成三部分，则：

在 $x<-1$ 时，$|x+1|=-(x+1)$，$|x-1|=-(x-1)$；

在 $-1\leqslant x<1$ 时，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$；

在 $x\geqslant 1$ 时，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=x-1$．

每一范围内，$|x+1|$ 与 $|x-1|$ 去掉绝对值符号后，都有确定的符号，从而解决了 $|x+1|+|x-1|$ 的化简问题．

$$\therefore\quad |x+1|+|x-1|=\begin{cases}-(x+1)-(x-1)=-2x & \text{当 } x<-1 \text{ 时；}\\ (x+1)-(x-1)=2 & \text{当 } -1\leqslant x<1 \text{ 时；}\\ (x+1)+(x-1)=2x & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时．}\end{cases}$$

由此看出：当题目含有一个绝对值时，将数分成两部分；当题目含有两个绝对值时，依两个零点为界，将数分成三部分；当题目有三个绝对值时，依三个零点将数分成四部分；依此类推，当题目含有 n 个绝对值时，将数分成 $n+1$ 个部分．

例 2 求下列各式中 x 的值：

(1) $|x|=5$；(2) $|x|\leqslant 5$，其中 x 为整数；(3) $3|x|=6$；(4) $|x|+2=5$；(5) $|x-2|=3$；(6) $2<|x|\leqslant 5$，其中 x 为整数．

解：这类比较简单题目，不一定用讨论法来解，可以从

定义直接得出结果.

(1) $x=\pm 5$;

(2) $x=-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

(3) 由 $3|x|=6$，得 $|x|=2$，

$\therefore \quad x=\pm 2$;

(4) 由 $|x|+2=5$，得 $|x|=3$，

$\therefore \quad x=\pm 3$;

(5) $x-2=3$ 或 $x-2=-3$，

$\therefore \quad x=5$ 或 $x=-1$;

(6) $x=\pm 5, \pm 4, \pm 3$.

例 3 下面式子在什么条件下正确：

(1) $|-a|=-a$; (2) $|x-2|=2-x$; (3) $\frac{x}{|x|}=-1$.

解：(1) $\because \ |-a|=|a|$，原式化为 $|a|=-a$，$\therefore$ 当 $a\leqslant 0$ 时这个式子正确；

(2) 当 $x\leqslant 2$ 时，$|x-2|=2-x$;

(3) 如果 $\frac{x}{|x|}=-1$，那么 $\frac{x}{|x|}$ 的分子与分母一定是除零以外的两个相反数. 当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，恰符合条件；

$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$\frac{x}{|x|}=-1$ 正确.

例 4 化简 $|2x-1|-\left|x+\frac{1}{2}\right|-2|x-6|$.

解：原式三个绝对值有三个零点：$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$ 和 6，应将