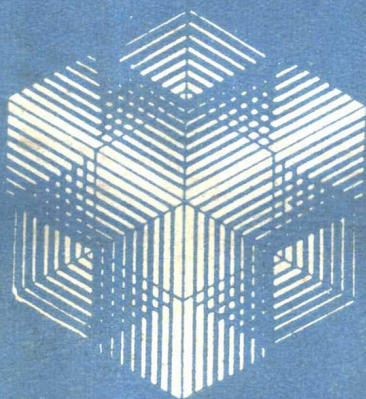


初中数学 解题方法总汇

田 钦 张慈明 编著



北京少年儿童出版社

初中数学解题方法总汇

田 钦 张慈明 编著

北京少年儿童出版社

初中数学解题方法总汇

CHUZHONG SHUXUE JIETI FANGFA ZONGHUI

田钦 张慈明 编著

*

北京少年儿童出版社出版

(北京北三环中路6号)

新华书店北京发行所发行

安平印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 18.5印张 409,000字

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数 1--7,200

ISBN 7-5301-0094-7/G·78

定 价: 5.55 元

内 容 提 要

以教学大纲为基本要求，精炼出各章内容包含的基本解题方法，为学生解题提供有利的依据和手段。

内容的安排上，按照教材的顺序，依次分析各部分内容中的解题方法，同时配备大量的例题进行说明，便于学生理解和掌握。

习题的选择上，基本上囊括了初中阶段代数和几何中各类典型题目。尤其是相当一部分题目用较高观点作指导分析，有利于提高学生的数学素质和能力。

目 录

一、有理数..... (1)

1. 比较法 (1)
2. 绝对值讨论法 (7)
3. 综合运算法 (12)
4. 加乘运算法 (19)
5. 分析归纳法 (21)

二、多项式..... (27)

1. 平铺直叙法 (27)
2. 割补法 (31)
3. 综合法 (35)
4. 分析法 (50)
5. 分离系数法 (53)
6. 公式法 (59)
7. 配平方法 (66)
8. 待定系数法 (71)
9. 十字相乘法及双十字相乘法 (85)
10. 换元法 (91)
11. 求根法 (96)
12. 归纳法 (106)

三、分式..... (112)

1. 综合法 (112)
2. 分析法 (134)
3. 待定系数法 (141)
4. 讨论法 (143)

四、根式..... (150)

1. 分、配、拆、提法 (150)
2. 综合法 (157)
3. 配方法 (165)
4. 讨论法 (172)
5. 根式化指数式的方法 (176)

五、指数与对数..... (180)

1. 对数和指数互化的方法 (180)
2. 化成同底法 (188)
3. 比较法 (192)
4. 综合法 (195)
5. 分析法 (209)

六、方程与方程组	(217)
1. 代数方程的一般解法	(217)
2. 因式分解法	(226)
3. 配方法	(229)
4. 换元法	(242)
5. 消元法	(267)
6. 讨论法	(286)
7. 待定系数法	(294)
8. 图像法	(297)
9. 其它解方程的方法	(298)
10. 布列方程的方法	(309)
七、不等式	(327)
1. 比较法	(327)
2. 定量变定性法	(332)
3. 图像法	(334)
4. 配方法	(338)
5. 讨论法	(341)
6. 综合法和分析法	(353)
7. 反证法	(359)
八、函数	(364)
1. 函数研究的一般方法	(364)
2. 代入法	(372)
3. 待定系数法	(381)
4. 描点法	(386)
5. 翻折、平移图像法	(389)
6. 化为基本函数法	(396)
九、二次函数	(404)
1. 配方法	(404)
2. 待定系数法	(409)
3. 图像法	(412)
4. 综合法	(425)
十、直线、角、三角形	(437)
1. 代数计算法	(437)
2. 利用三角形全等的方法	(446)
3. 截长补短法	(451)
4. 平行移动法	(459)
5. 等量代换法	(462)
6. 面积法	(472)
7. 同一法	(476)
8. 反证法	(477)
十一、四边形	(480)

1. 代数计算法 (480) 2. 利用三角形全等的方法 (483) 3. 平行线移动法 (487)
- 十二、相似形..... (496)
 1. 代数计算法 (496) 2. 利用相似三角形的方法 (505) 3. 平行线移动法 (514)
- 十三、圆..... (526)
 1. 代数计算法 (526) 2. 分析法 (532) 3. 综合法 (537) 4. 间接证法 (546)
- 十四、作图..... (549)
 1. 三角形奠基法 (549) 2. 轨迹交接法 (553) 3. 代数法 (555) 4. 位似法 (558)
 5. 对称法 (562)
- 十五、选择题..... (564)
 1. 直接解法 (564) 2. 间接解法 (572)

一、有 理 数

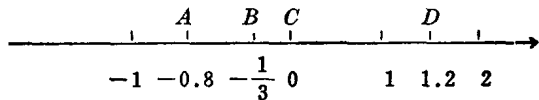
1. 比较法

比较两个有理数的大小，常用两种方法：一是利用有理数运算，计算两个数的差，根据差为正数、零、负数来确定两个数的大小；二是将两个数在数轴上标出，根据两个点的相对位置，决定两个数的大小。这两种方法，前者比较两数的差，后者比较两数对应点的位置，都进行了比较，我们把它们叫比较法。

例 1 用“大于”符号，将下列各数从大到小排列起来：

$$-\frac{1}{3}, -0.8, 0, 1.2.$$

解：〈方法一〉 先将这四个数在数轴上表示出来：



其中 A 点表示 -0.8 ，B 点表示 $-\frac{1}{3}$ ，C 点表示 0 ，D 点表示 1.2 。这四个点从左到右依次为： $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 。因为数轴上越靠右的点，表示的数越大，所以这四个数用“大于”号排列起来，应为： $1.2 > 0 > -\frac{1}{3} > -0.8$ 。

〈方法二〉 计算两个数的差，观察其结果。

$$\therefore 1.2 - 0 = 1.2, 1.2 > 0,$$

$$\therefore 1.2 > 0.$$

$$\because 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore 0 > -\frac{1}{3}.$$

$$\because \left(-\frac{1}{3}\right) - (-0.8) = \frac{7}{15}, \frac{7}{15} > 0,$$

$$\therefore -\frac{1}{3} > -0.8.$$

$$\therefore 1.2 > 0 > -\frac{1}{3} > -0.8.$$

利用两个数的差，判断两数大小的方法的原理是：对于任意两个有理数 a 、 b ，当 $a-b>0$ 时， $a>b$ ；当 $a-b=0$ 时， $a=b$ ；当 $a-b<0$ 时， $a<b$ 。将这个原理应用到有理数的各种情况，得出如下结论：任何正数大于零；任何正数大于负数；两个正数，绝对值较大的数较大；两个负数，绝对值较小的数较大。具体两个有理数比较大小，既可用上述结论，也可以直接计算它们的差。

例 2 比较下列每对数的大小：

$$-\frac{5}{7} \text{ 与 } -\frac{2}{3}, -\frac{5}{7} \text{ 与 } \frac{2}{3}, \frac{5}{7} \text{ 与 } \frac{2}{3}, -\frac{247}{2000} \text{ 与 } -0.1235, \\ -2^4 \text{ 与 } (-2)^4.$$

解：〈方法一〉 $-\frac{5}{7}$ 与 $-\frac{2}{3}$ 同为负数，

$$\because \left| \frac{5}{7} \right| > \left| \frac{2}{3} \right|, \therefore -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}.$$

$$-\frac{5}{7} \text{ 与 } \frac{2}{3} \text{ 符号相反}, \therefore \frac{2}{3} > -\frac{5}{7}.$$

$\frac{5}{7}$ 与 $\frac{2}{3}$ 同为正数,

$$\therefore \left| \frac{5}{7} \right| > \left| \frac{2}{3} \right|, \therefore \frac{5}{7} > \frac{2}{3}.$$

$-\frac{247}{2000}$ 与 -0.1235 同为负数,

$$\therefore \left| \frac{247}{2000} \right| = |0.1235|, \therefore -\frac{247}{2000} = -0.1235.$$

-2^4 是负数, $(-2)^4$ 是正数, $\therefore (-2)^4 > -2^4$.

$$\langle \text{方法二} \rangle \quad -\frac{5}{7} - \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{21}, \quad -\frac{1}{21} < 0,$$

$$\therefore -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}.$$

$$-\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = -\frac{29}{21}, \quad -\frac{29}{21} < 0,$$

$$\therefore -\frac{5}{7} < \frac{2}{3}.$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{1}{21}, \quad \frac{1}{21} > 0,$$

$$\therefore \frac{5}{7} > \frac{2}{3}.$$

$$-\frac{247}{2000} - (-0.1235) = 0,$$

$$\therefore -\frac{247}{2000} = -0.1235.$$

例 3 x 比 y 大 $4\frac{1}{7}$, 那么 $x - 2\frac{7}{8}$ 与 $y + 2\frac{8}{9}$ 谁大? 大多少?

解: 依题意 $x = y + 4\frac{1}{7}$,

$$\therefore x - 2\frac{7}{8} = y + 4\frac{1}{7} - 2\frac{7}{8} = y + 1\frac{15}{56}.$$

$$\left(x - 2\frac{7}{8}\right) - \left(y + 2\frac{8}{9}\right) = -1\frac{313}{504}.$$

$$\therefore y + 2\frac{8}{9} \text{ 比 } x - 2\frac{7}{8} \text{ 大 } 1\frac{313}{504}.$$

例 4 什么数的相反数比它本身小？比它本身大？等于它本身？什么数的倒数等于它本身？

解：设这个有理数为 a ，则它的相反数为 $-a$ 。

① 欲使 $a > -a$ ，

须要并且只须要 $a - (-a) > 0$ ，

$$a + a > 0,$$

$$\text{即 } a > 0.$$

就是说：当一个数为正数时，它的相反数比它本身小。

（下面将“须要并且只须要”，简述为“须且只须”）

② 欲使 $a < -a$ ，

须且只须 $a - (-a) < 0$ ，

$$2a < 0,$$

$$\text{即 } a < 0.$$

当一个数为负数时，它们相反数大于它本身。

③ 欲使 $a = -a$ ，

须且只须 $a - (-a) = 0$ ，

$$2a = 0,$$

$$\text{即 } a = 0.$$

只有零的相反数才等于它本身。

④ 设一个有理数为 a ，则它的倒数是 $\frac{1}{a}$ 。

欲使 $a = \frac{1}{a}$,

须且只须 $a - \frac{1}{a} = 0$,

$$\frac{a^2 - 1}{a} = 0,$$

$$a^2 - 1 = 0,$$

$$a^2 = 1,$$

即 $a = 1$ 或 $a = -1$.

只有 $+1$ 或 -1 的倒数等于本身.

例 5 $a - b$ 的值一定小于 a 吗?

解: $(a - b) - a = a - b - a = -b$.

因为 b 符号不定, $-b$ 符号也不定, $a - b$ 与 a 的大小关系也不定. 实际上,

当 $b > 0$ 时,

$-b < 0$, $a - b$ 小于 a ;

当 $b = 0$ 时,

$-b = 0$, $a - b$ 等于 a ;

当 $b < 0$ 时,

$-b > 0$, $a - b$ 大于 a .

例 6 在什么条件下, 下列结论正确:

(1) a 大于 $2a$; (2) a^2 大于 a ; (3) 1 小于 $\frac{1}{a}$; (4)

$\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$.

解: a 是用字母表示的数, 无法在数轴上找到表示它的点, 这时必须用考查两数差的方法. 值得指出的是, 像本题这种用字母表示的数, 它们的大小关系, 一般无确定结论.

它随字母表示的数的变化而变化.

(1) 欲使 $a > 2a$,

须且只须 $a - 2a > 0$,

$-a > 0$,

$a < 0$.

$\therefore$ 当 $a < 0$ 时, a 大于 $2a$.

(2) 欲使 $a^2 > a$,

须且只须 $a^2 - a > 0$,

$a(a-1) > 0$,

根据乘法符号法则,

$$\begin{cases} a > 0, \\ a-1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0, \\ a-1 < 0. \end{cases}$$

即 $a > 1$ 或 $a < 0$.

$\therefore$ 当 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, a^2 大于 a .

(3) 欲使 $1 < \frac{1}{a}$,

须且只须 $1 - \frac{1}{a} < 0$,

$$\frac{a-1}{a} < 0,$$

相反符号的数相除才能得负数.

$$\begin{cases} a-1 < 0, \\ a > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-1 > 0, \\ a < 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a < 1, \\ a > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > 1, \\ a < 0. \end{cases}$$

即 $0 < a < 1$.

∴ 当 $0 < a < 1$ 时, 1 小于 $\frac{1}{a}$.

(4) 欲使 $\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$,

须且只须 $\frac{5}{13}a - \frac{8}{17}a = 0$,

$$a\left(\frac{5}{13} - \frac{8}{17}\right) = 0,$$

$$\text{即 } a \times \frac{-19}{13 \times 17} = 0,$$

两数乘积为零, 其中至少有一个数为零. 而 $\frac{-19}{13 \times 17} \neq 0$,
只有 $a = 0$.

∴ 当 $a = 0$ 时, $\frac{5}{13}a$ 等于 $\frac{8}{17}a$.

2. 绝对值讨论法

绝对值有两种定义, 代数定义是: 一个正数的绝对值是它本身; 零的绝对值是零; 负数的绝对值是它的相反数. 几何定义是: 一个数的绝对值, 是在数轴上表示它的点到原点的距离. 两种定义的本质相同, 从效果看都有 $|x| \geq 0$. 绝对值运算时最主要的方法, 是将带有绝对值符号的数, 通过讨论的办法, 去掉绝对值符号. 去绝对值符号的规律是:

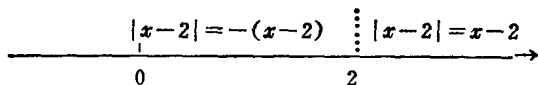
$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a > 0 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } a = 0 \text{ 时;} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

这里 a 可能是一个数, 也可能是多项式. 为了讨论时方便, 通常把使 $|a| = 0$ 的 a 的值叫做 $|a|$ 的零点. 一个绝对值表示的数, 可以以零点为界分成三种情况. 如 $|x-2|$ 的零点是

2, 于是有:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{当 } x > 2 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } x = 2 \text{ 时;} \\ -(x-2) & \text{当 } x < 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

从数轴上看就是:



例 1 用讨论的方法将下列各式的绝对值符号去掉:

(1) $|2-x|$; (2) $|-a|$; (3) $|3x+4|$; (4) $|x+1| + |x-1|$.

解:

$$(1) |2-x| = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{当 } x \geq 2 \text{ 时;} \\ -(x-2) & \text{当 } x < 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(2) |-a| = |a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时;} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(3) |3x+4| = \begin{cases} 3x+4 & \text{当 } x \geq -\frac{4}{3} \text{ 时;} \\ -(3x+4) & \text{当 } x < -\frac{4}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

(4) -1 是 $|x+1|$ 的零点, 即 $x < -1$ 时, $|x+1| = -(x+1)$; 当 $x \geq -1$ 时, $|x+1| = x+1$.

1 是 $|x-1|$ 的零点, 即 $x < 1$ 时, $|x-1| = -(x-1)$; 当 $x \geq 1$ 时, $|x-1| = x-1$.

如果以 -1 为分界点, 将有理数分成 $x < -1$ 和 $x \geq -1$ 两部分, 则在 $x < -1$ 时, $|x+1|$ 与 $|x-1|$ 去掉绝对值符号后均有准确的结果, 但在 $x \geq -1$ 时, $|x-1|$ 去掉绝对值符

号后的结论不确定,既可能等于 $x-1$,也可能等于 $-(x-1)$,没有统一的符号规律,因此,以 -1 为分界点,将有理数分成的两部分不能完成绝对值的化简工作.同理,以 1 为分界点,将有理数分成两部分也不能解决问题.

如果将有理数以 -1 和 1 为分界点分成三部分,则:

在 $x < -1$ 时, $|x+1| = -(x+1)$, $|x-1| = -(x-1)$;

在 $-1 \leq x < 1$ 时, $|x+1| = x+1$, $|x-1| = -(x-1)$;

在 $x \geq 1$ 时, $|x+1| = x+1$, $|x-1| = x-1$.

每一范围内, $|x+1|$ 与 $|x-1|$ 去掉绝对值符号后,都有确定的符号,从而解决了 $|x+1| + |x-1|$ 的化简问题.

$$\therefore |x+1| + |x-1| = \begin{cases} -(x+1) - (x-1) = -2x & \text{当 } x < -1 \text{ 时;} \\ (x+1) - (x-1) = 2 & \text{当 } -1 \leq x < 1 \text{ 时;} \\ (x+1) + (x-1) = 2x & \text{当 } x \geq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此看出:当题目含有一个绝对值时,将数分成两部分;当题目含有两个绝对值时,依两个零点为界,将数分成三部分;当题目有三个绝对值时,依三个零点将数分成四部分;依此类推,当题目含有 n 个绝对值时,将数分成 $n+1$ 个部分.

例 2 求下列各式中 x 的值:

(1) $|x| = 5$; (2) $|x| \leq 5$, 其中 x 为整数; (3) $3|x| = 6$; (4) $|x| + 2 = 5$; (5) $|x-2| = 3$; (6) $2 < |x| \leq 5$, 其中 x 为整数.

解: 这类比较简单题目,不一定用讨论法来解,可以从

定义直接得出结果.

(1) $x = \pm 5$;

(2) $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

(3) 由 $3|x| = 6$, 得 $|x| = 2$,

$\therefore x = \pm 2$;

(4) 由 $|x| + 2 = 5$, 得 $|x| = 3$,

$\therefore x = \pm 3$;

(5) $x - 2 = 3$ 或 $x - 2 = -3$,

$\therefore x = 5$ 或 $x = -1$;

(6) $x = \pm 5, \pm 4, \pm 3$.

例 3 下面式子在什么条件下正确:

(1) $|-a| = -a$; (2) $|x-2| = 2-x$; (3) $\frac{x}{|x|} =$

-1 .

解: (1) $\because |-a| = |a|$, 原式化为 $|a| = -a$,

$\therefore$ 当 $a \leq 0$ 时这个式子正确;

(2) 当 $x \leq 2$ 时, $|x-2| = 2-x$;

(3) 如果 $\frac{x}{|x|} = -1$, 那么 $\frac{x}{|x|}$ 的分子与分母一定是除零以外的两个相反数. 当 $x < 0$ 时, $|x| = -x$, 符合条件;

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $\frac{x}{|x|} = -1$ 正确.

例 4 化简 $|2x-1| - \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2|x-6|$.

解: 原式三个绝对值有三个零点: $-\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$ 和 6, 应将