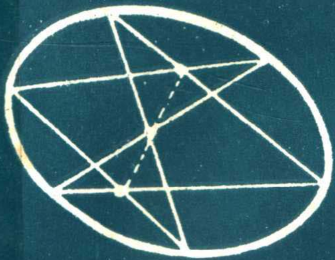
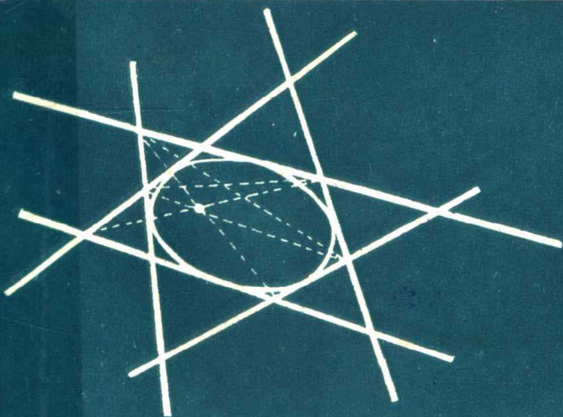
高等几何讲义



楚蜀湘 主编 杨文茂 审校



湖北科学技术出版社

高等几何讲义

楚蜀湘　主编
杨文茂　审校

湖北科学技术出版社

高等几何讲义

楚蜀湘主编　杨文茂审校

*

湖北科学技术出版社出版发行　新华书店湖北发行所经销
湖南省华容县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　8.875印张　194千字
1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷
ISBN7—5352—0193—8/O·0009
印数：1—13,000　定价：2.20元

内　容　提　要

本书是根据国家教育委员会最新颁布的师范专科全日制大纲、中学教师进修师范专科全日制大纲、专科函授大纲及中学教师过关考试自学大纲等编写而成．主要内容包含仿射几何简介，一维、二维射影几何及几何基础简介三大部分．二维射影几何中主要讨论二次曲线的射影性质与度量性质．并用群论的观点对古典的几何学进行了比较．

本书可作为师范专科数学专业的教材和高等师范院校有关专业的教学参考书及函授教材，同时也可作为中学教师过关考试的教科书．

前 言

高等几何是师专和中学教师进修数学专业的专业课程。根据教学大纲的要求，本课程在学员已学习初等几何、解析几何和高等代数的基础上，系统地讲授实射影平面几何的基本知识，简要介绍几何基础的初步知识；从而使学生认识射影空间的基本特征和研究方法，初步了解几何学的群论观点和运用近代公理法建立几何逻辑体系的基本思想，以便在教学中能用较高的观点来处理初等几何、平面解析几何中的有关问题，更深入地掌握中学几何教材，另一方面，也使之掌握一些进一步研究几何学的基本知识与方法。

本书就是本着这一基本思想编写的。鉴于师专、中学教师进修与过关考试及专科函授的特点，为有利于教学和自学，在编写过程中，我们力求文字浅显，通俗易懂，密切联系中学数学实际，紧扣教学大纲，着重基础，培养能力。

在本书的编写过程中，我们采取了综合法与解析法并用，偏重于解析的方法，因为解析法以代数作为工具，把高等代数与射影几何紧密联系起来，更有利于学员的学习。考虑到面向中学，加强直观性，充分利用综合法简捷巧妙的特点，有时也为了比较，因而在许多地方采用了综合法。

考虑到师专、中学教师进修与过关考试及专科函授的要求不同，我们把附在每一章后面的习题分为两类：必作题和补

充题，补充题亦可作为课堂讲授和习作课之用。

在本书的编写过程中，我们参考和引用了许多兄弟院校的教材，特别是朱德祥先生编的和梅向明先生等编的高等几何教材，在此深表谢意。

本书是集体协作的成果。我们先后两次在宜昌地区教师进修学院召开了编写会议和审稿会议。最后在沙市市教师进修学院召开了定稿会议。本书第一章由庞正琳编写，第二章由吴传易、莫莉萍编写，第三章由白纯瑜、邓敏编写，第四章由饶克威、周玉广编写，第五章由帅绪之、龚发松编写，第六章由孙厚雄、胡必桥、宋来忠、王绍恒编写，第七章由靳先根、李承材编写，第八章由张长省、贺家勇编写，第九章由贾淑芹编写；武汉大学杨文茂副教授亲自参加和指导编写讨论会，并审校了全书。

宜昌地区教师进修学院、沙市市教师进修学院的领导和数学科的老师们为本书的编写和出版做了大量的工作，胡逾男、屠文伟、胡先新、周武能、王仁由等同志为本书的编写提出了许多宝贵意见，我们在此深表谢意。

编　者

一九八七年六月

目　　录

第一章　仿射几何

本章是射影几何的引论，主要是仿射几何的基本概念，以便我们从欧氏几何过渡到射影几何。

§1.1　平行射影与仿射对应

在同一平面内，直线L与直线a、a'都不平行，通过直线a上诸点A、B、C、D、…，作L的平行线，交a'于A'、B'、C'、D'、…，这样的一一对应关系称为直线a与a'间的**平行射影**或**透视仿射**（如图1—1）。

称直线a上的点为原象点，线a'上的对应点为映象点，L是平行射影的方向，把这个透视仿射记为T，则写$A'=T(A)$、…．显然，平行射影和射影的方向有关，当方向变了，就有不同的平行射影，使得a上各点在a'上有不同的对应点。

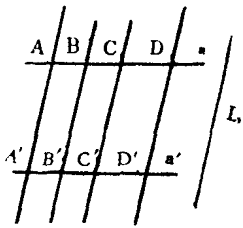


图1—1

现设同一平面内有几条直线a_1、a_2、…、a_n（如图1—2），用T_1、T_2、…、T_{n-1}顺次表示a_1到a_2、a_2到a_3、…、a_{n-1}到a_n的透视仿射，经过这一串平行射影，a_1上的点和a_n上的点建立了一个一一对应，称为a_1到a_n的仿射或**仿射对**

应，这个仿射或仿射对应也记为T。那么，$T=T_{n-1}\cdots T_2T_1$称为T_1、T_2、…、T_{n-1}按这个顺序的乘积。例如：

$T(A_1)=T_{n-1}\cdots T_2T_1(A_1)=$

$T_{n-1}\cdots T_2(A_2)=\cdots=A_n$，

$T(B_1)=B_n$。

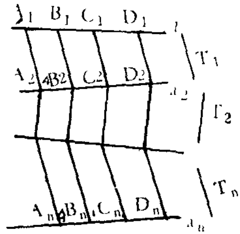


图1—2

由以上讨论可知：仿射是由有限回的平行射影的积所组成的，所以仿射是透视仿射链或平行射影链。要断定一个仿射是否是透视仿射，只要看原象点和映象点的连线是否平行就可以了。

同样，可以定义两个平面π到π'的平行射影或透视仿射T，平行射影的方向L要求既不与π又不与π'平行。同理，射影方向改变了就得出另外的从π到π'的透视仿射。若$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，$T(C)=C'$，且A、B、C共线，则易见A'、B'、C'也共线。设以a表直线ABC以a'表直线$A'B'C'$，则写$T(a)=a'$（如图1—3）。因此，二平面间的平行射影有这样的性质：

性质1.1.1 一个平面上的点与另一平面上的点一一对应着，一个平面上的直线与另一个平面上的直线也一一对应着．这就是说，透视仿射保留同素性（在这对应下，几何元素保持同一种类而不改变）。

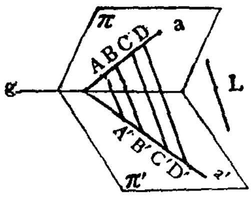


图1—3

性质1.1.2 一个平面上的直线a变为另一平面上的直线a'，且当点A在直线a上时，其对应点A'在对应直线a'上，

这就是说，透视仿射保留点与直线的接合性（即对应点在对应直线上的性质）。

在同一平面上，两相交直线的透视仿射有一个自对应点，即两直线的公共点。同样，若两相交平面的透视仿射则交线g为自对应点的轨迹，称为对应轴。对应直线a与a'或相交于对应轴上，或都与对应轴平行。

仿照直线到直线的仿射，那么平面到平面的仿射也是由有限回的平行射影的积所组成的，或者说，仿射是透视仿射链。

§1.2 仿射不变性与不变量

经过一切透视仿射不改变的性质与数量称为仿射不变性与仿射不变量。因为仿射对应是由有限回的透视仿射对应的积组成的，所以讨论仿射对应下的不变性质与不变量时，只要讨论透视仿射对应下的不变性质与不变量就行了。

定理1.2.1 二直线间的平行性是仿射不变性。

证明 设a、b是平面π内的两条平行线，a'、b'是它们在平面π'内的仿射象。

若a'与b'不平行则它们相交于一点P'（如图1—4），且设P为P'的原象点.那么，由于仿射保留接合性，点P应该既在a上又在b上，因而a和b相交。这与假设矛盾。所以$a' /\!/ b'$。

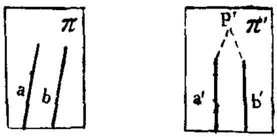


图1—4

推论 平行四边形是仿射不变图形。

定义1.2.1 设P_1、P_2是有向直线上的两个定点，P是

这有向直线上的另一点，P分有向线段$\overline{P_1P_2}$为两个有向线段$\overline{P_1P}$和$\overline{P_2P}$，则其数量的比$\frac{P_1P}{P_2P}$叫做三点P_1、P_2、P的**简比**，记为(P_1P_2P)．即$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P}$，其中$P_1$、$P_2$叫做**基点**，$P$叫做**分点**．不难看出：

当P内分$\overline{P_1P_2}$时，　$(P_1P_2P)<0$；

当P外分$\overline{P_1P_2}$时，　$(P_1P_2P)>0$；

当P与P_1重合时，　$(P_1P_2P)=0$；

当P是$\overline{P_1P_2}$中点时，$(P_1P_2P)=-1$．

在解析几何中讲过有向线段的定比分割，若点P分割有向线段$\overline{P_1P_2}$的分割比记为λ，则

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1P}{-P_2P}=-(P_1P_2P)$$

所以简比(P_1P_2P)等于点P分割有向线段的分割比的相反数．

定理1.2.2　共线三点的简比是仿射不变量．

已知：A、A'，B、B'，C、C'为透视仿射的三对对应点（如图1—5）．

求证：$(ABC)=(A'B'C')$．

证明：连结AA'、BB'、CC'．因为A、A'，B、B'，C、C'为透视仿射的对应点，根据透视对应的定义，有

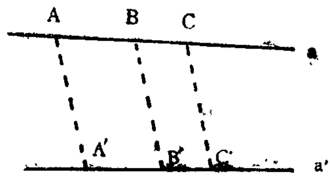


图1—5

$$AA' \parallel BB' \parallel CC'$$

由初等几何的平行截割定理，知

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

利用合比性质，可得

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

所以 $$(ABC) = (A'B'C').$$

定理1.2.3 两条平行线段之比是仿射不变量。

证明 设AB与CD是平面π内的平行线段，$A'B'$与$C'D'$是它们在平面π'内的仿射象(如图 1—6)．由定理1.2.1可知$C'D' \parallel A'B'$.

在平面π内，过点C作$CE \parallel DB$交AB于E，在平面π'内过点C'作$C'E' \parallel D'B'$交$A'B'$于E'，容易看出E'是E的仿射象．由定理1.2.2，得

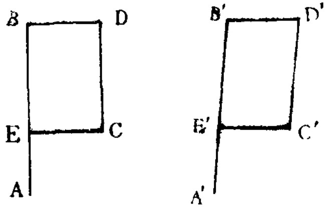


图1—6

$$(AEB) = (A'E'B')$$

即 $$\frac{AB}{EB} = \frac{A'B'}{E'B'}$$ 或 $$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

定理1.2.4 一直线上任两线段之比是仿射不变量。

证明 设AB、CD为同一直线上任两条有向线段(如图 1—7)，则有

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CB}{CD}$$

图1—7.

$$= (ACB) \cdot \frac{BC}{DC}$$

$$= (ACB)(BDC)$$

由定理1.2.2，(ACB)、(BDC)均为仿射不变量．故 $\dfrac{AB}{CD}$也为仿射不变量．

注意　由定理1.2.3和定理1.2.4可知，共线或平行二线段之比在仿射对应下不变．但任意二线段之比在仿射对应下并不保留．

为了证明二图形的面积之比也是仿射不变量，我们先引进下面的

引理　在透视仿射下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个常数．

证明　设A与A'，B与B'是两对透视仿射对应点，从而$AA' /\!/ BB'$，由这些点向对应轴作垂线AA_0、$A'A_0'$、BB_0、$B'B_0'$，又设AB与$A'B'$相交于轴g上一点X(如图1—8)．因为

$$\Delta AA_0X \backsim \Delta BB_0X,$$

$$\Delta A'A_0'X \backsim \Delta B'B_0'X$$

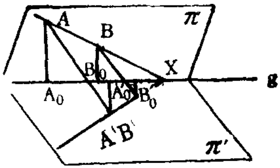


图1—8

所以 $\dfrac{AA_0}{BB_0}=\dfrac{AX}{BX}$，

$$\frac{A'A_0'}{B'B_0'}=\frac{A'X}{B'X}$$

在$\Delta AA'X$中，有

$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X}\quad 故\quad \frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A_0'}{B'B_0'}$$

因此 $\dfrac{A'A'_0}{AA_0}=\dfrac{B'B'}{BB_0}=k$(常数)

常数k随给定的透视仿射而定．

定理1.2.5　任意两个三角形面积之比是仿射不变量．

分下面两种情形进行证明：

（1） 设对应三角形ABC和 $A'B'C'$ 有两对对应顶点A和A'，B和B'重合在透视仿射对应轴g上（如图1—9）.

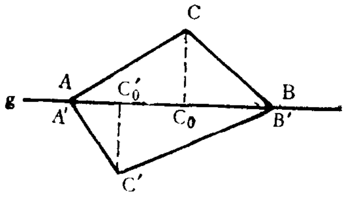


图1—9

自第三对对应顶点C和C'在两个三角形各自的平面上向对应轴g作垂线 CC_0和$C'C_0'$，则

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC}=\frac{C'C_0'}{CC_0}$$

这里ΔABC表示三角形 ABC 的面积，余此类推.

由引理，上面等式的右端为一常数k，所以

$$\Delta A'B'C'=k\Delta ABC.$$

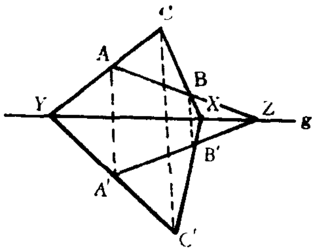


图1—10

（2） 对应三角形的三对对应顶点都不在对应轴上，这时如图1—10所示，三角形ABC与其透视仿射对应三角形$A'B'C'$中，三对对应边相交于对应轴g上，由（1）的证明可得

$$\begin{aligned}\Delta A'B'C'&=\Delta C'YX+\Delta B'XZ-\Delta A'YZ\\&=k\Delta CYX+k\Delta BXZ-k\Delta AYZ\\&=k(\Delta CYX+\Delta BXZ-\Delta AYZ)\\&=k\Delta ABC\end{aligned}$$

即
$$\Delta A'B'C'=k\Delta ABC.$$

推论1 任意两个多边形面积之比是仿射不变量.

推论2 任意两条封闭凸曲线所围成的面积之比是仿射

不变量.

§1.3 平面内的仿射变换及其决定

我们知道，利用平行投影建立两相交平面间的透视仿射对应，则交线 g为自对应点的轨迹，称为对应轴. 现设这对应的两平面绕对应轴旋转直到两平面摊成一个平面为止，并且假定对应关系并不因此而改变，那么，两相交平面间的点对应变为同一平面内的点对应了，这时那条对应轴不能再看做是两平面的交线，而只能说是同一平面内自身对应点所成的直线，把这种同一平面内的透视仿射对应称为**透视仿射变换**. 它的特征是：对应点的连线互相平行，对应直线的交点在同一直线上或者平行于一直线，这条直线就是对应轴，有限回透视仿射变换的积组成仿射变换. 也就是说，由透视仿射变换链所组成的变换叫做**仿射变换**.

因为仿射变换就是同一平面内的仿射对应,所以仿射变换下的不变性与不变量就是仿射对应下的不变性质与不变量.

定理1.3.1 平面内的透视仿射变换由对应轴与一对对应点完全决定.

证明 设已知对应轴g与不在其上的一对对应点A、A'，B为平面上任一已知点，我们要证明B的透视仿射象B'可以唯一地确定（如图1—11）.

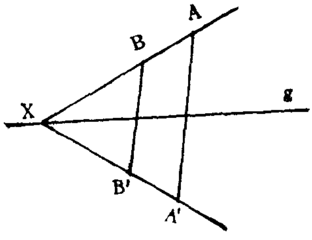


图1—11

连直线AB，设与对应轴相交于X，连X与A'，则AX与$A'X$是一对对应直线，过