

///

高等学校理工科
电子信息类课程

学习辅导丛书



电磁场理论 学习辅导与典型题解

苏东林 陈爱新 谢树果 等编著

- ▶ 学习要点
- ▶ 典型例题解析
- ▶ 精选习题详解
- ▶ 往届考研真题

学习的帮手 考研的参谋



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校理工科电子信息类课程学习辅导丛书

电磁场理论 学习辅导与典型题解

苏东林 陈爱新 谢树果 等编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书内容包括电磁场定律、静电场的分离变量法、静磁场及其位函数、电磁场的功率与能量关系、平面电磁波及其反射和折射、电磁波的辐射等问题的分析和求解。全书共分十章,每章均由基本概念和公式、典型例题解析和习题解答三部分组成,旨在通过对基本概念的讲述,典型例题的分析、解答,以及习题的具体解答这种学习过程的引导,提高学生分析和解决问题的能力。

本书可作为高等学校电子信息类专业本科生学习电磁场理论和研究生入学考试的学习辅导书,也可供有关专业的研究生、教师和工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论学习辅导与典型题解/苏东林,陈爱新,谢树果编著. —北京:电子工业出版社,2005.10

(高等学校理工科电子信息类课程学习辅导丛书)

ISBN 7-121-01823-3

I. 电... II. ①苏...②陈...③谢... III. 电磁场—理论—高等学校—教学参考资料 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 116696 号

责任编辑:韩同平 特约编辑:杨逢仪

印 刷:北京牛山世兴印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×980 1/16 印张:14.25 字数:346.6 千字

印 次:2005 年 10 月第 1 次印刷

印 数:5000 册 定价:19.80 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言

电磁场理论是工科电子类专业的一门重要的基础课程,也是微波、天线、电波传播、电磁兼容等后续课程的理论基础。它理论性强,概念抽象,数学推导繁琐,历来被公认为是一门“难教”、“难学”和“难考”的课程,因此如何解决这一“难”字,提高学习效果,成为亟待解决的重要问题。本书编写的目的即在于此,希望在电磁场理论教学的基础上,通过本书的学习指导,能够使学生用较少的时间,掌握和巩固较多的电磁场理论知识。

本书共分十章,每章均由以下三个部分组成。

(1) 基本概念和重要公式

这部分是对该章基本内容的归纳总结,包括需要重点掌握的基本概念和重要公式。

(2) 典型例题解析

这部分用于加深对电磁场基本概念的理解和掌握,通过典型例题的求解,纠正学生在学习初期容易出现的错误认识,培养正确的解题思路,提高对电磁场问题的分析和解决能力。

(3) 习题解答

这部分对所列习题给出一种解答方法。读者可以将自己的解答方法与之对照,通过对比进一步加深对基本概念和基本定律的理解,掌握分析电磁场问题的方法,提高解题能力。

本书是在北京航空航天大学内部讲义《工程电磁场基础习题解答》(苏东林、徐永斌、张海莹编)的基础上编写完成的。第1、2、3章和附录由陈爱新编写,第4、5章由赵京城编写,第6、7章由谢树果编写,第8、9章由全绍辉编写,第10章由杨争光编写,全书由苏东林统稿。

本书承徐永斌教授审阅,本书的出版还得到电子工业出版社韩同平编辑的大力支持,编者在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平,书中难免有不足之处,请不吝指正。

编 者
于北京航空航天大学

本书中的文字符号及其说明

x, y, z	直角坐标系坐标变量	μ_0	自由空间磁导率
i_x, i_y, i_z	直角坐标系坐标单位矢量	μ	媒质磁导率
r_c, φ, z	柱坐标系坐标变量	μ_r	相对磁导率
i_{r_c}, i_φ, i_z	柱坐标系坐标单位矢量	χ_m	媒质磁化率
r_s, θ, φ	球坐标系坐标变量	σ	媒质电导率
$i_{r_s}, i_\theta, i_\varphi$	球坐标系坐标单位矢量	i_n	边界法线方向
r	空间某点的矢径	Φ	静电场标量位(电位)
r_P	空间 P 点的矢径	p	矢量电偶极矩
r_{QP}	Q 点到 P 点的位移	A	矢量磁位
ds	矢量线元	Φ_m	标量磁位
da	矢量面元	P	极化强度
dV	体元	ρ_P	束缚电荷体密度
ρ	体电荷密度	η_P	束缚电荷面密度
η	面电荷密度	J_P	极化电流
λ	线电荷密度	M	磁化强度
Q	电荷量	J_a	磁化电流体(安培电流)密度
J	体电流密度	K_a	磁化电流面(安培电流)密度
K	面电流密度	J_f	自由电流密度
I	电流强度	ρ_f	自由电荷密度
E	电场强度	W_E	静电场的能量
H	磁场强度	w_E	静电场的能量密度
D	电位移矢量	W_H	静磁场的能量
B	磁感应强度	w_H	静磁场的能量密度
ϵ_0	自由空间介电常数	W_e	电能
ϵ	媒质介电常数	w_e	电能密度
ϵ_r	相对介电常数	W_m	磁能
χ_e	媒质极化率		

w_m	磁能密度	α	衰减常数
ψ	磁通量	β	相位常数
S	坡印廷矢量	β	实传播矢量
c	自由空间光速	β_0	自由空间相位常数
v	介质中光速	$\tilde{E}$	电场强度复矢量
v_p	相速	$\tilde{H}$	磁场强度复矢量
v_g	群速	$\tilde{S}$	复数坡印廷矢量
η_0	自由空间波阻抗	$\tilde{A}$	复数磁矢量位
η	媒质中波阻抗	Φ	复数电标量位
λ_0	自由空间波长	R_r	辐射电阻
λ	媒质中波长	P	辐射功率
f	频率	$F(\theta, \varphi)$	方向性函数
ω	角频率	J_m	磁流密度
$\tilde{k}$	复数传播矢量	ρ_m	磁荷密度
$\tilde{k}$	复数传播常数	$f_a(\theta, \varphi)$	阵因子

目 录

第 1 章 自由空间中电磁场定律	(1)
1.1 基本概念和重要公式	(1)
1.2 典型例题解析	(3)
1.3 习题解答	(12)
第 2 章 自由空间的微分场定律	(26)
2.1 基本概念和重要公式	(26)
2.2 典型例题解析	(28)
2.3 习题解答	(31)
第 3 章 静电场的标量位	(39)
3.1 基本概念和重要公式	(39)
3.2 典型例题解析	(45)
3.3 习题解答	(51)
第 4 章 静电场的分离变量法求解	(64)
4.1 基本概念和重要公式	(64)
4.2 典型例题解析	(67)
4.3 习题解答	(78)
第 5 章 静磁场与位函数的远区多极子展开式	(99)
5.1 基本概念和重要公式	(99)
5.2 典型例题解析	(101)
5.3 习题解答	(103)
第 6 章 有物质存在时的宏观场定律	(112)
6.1 基本概念与重要公式	(112)
6.2 典型例题解析	(114)
6.3 习题解答	(119)
第 7 章 电磁场的能量和功率	(131)
7.1 基本概念和重要公式	(131)
7.2 典型例题解析	(132)
7.3 习题解答	(137)

第 8 章 平面电磁波	(149)
8.1 基本概念与重要公式	(149)
8.2 典型例题解析	(157)
8.3 习题解答	(162)
第 9 章 平面波的反射与折射	(170)
9.1 基本概念与重要公式	(170)
9.2 典型例题解析	(176)
9.3 习题解答	(184)
第 10 章 电磁波的辐射	(192)
10.1 基本概念和重要公式	(192)
10.2 典型例题解析	(194)
10.3 习题解答	(202)
附录 A 北京航空航天大学历届硕士学位研究生入学考试试题	(215)
A.1 2000 年电磁场理论试题	(215)
A.2 2001 年电磁场理论试题	(216)
A.3 2002 年电磁场理论试题	(217)
A.4 2003 年电磁场理论试题	(218)
参考文献	(220)

第 1 章 自由空间中电磁场定律

场是客观存在的一种物质形式,它具有特殊的运动规律,可以弥漫在空间中。场的量可以随空间位置和时间不同而变化,即场量可以表示成空间和时间的函数。在数学上,任何一个可以表示成空间和时间函数的量都可以称为场。

本书研究的对象是经典电磁场理论,也就是说只考虑宏观统计的电磁场现象,而不考虑微观的电磁场,不考虑场的量子效应,这是处理问题的前提。因此书中提到的无限小都是宏观上的,而不是真正数学意义上的无限小,从量子理论角度来看,应是足够大,不至于产生量子效应。

本章是学习电磁场理论的基础,因此,应注意理解本章包含的数学物理概念。

1.1 基本概念和重要公式

1. 自由空间中的电磁场定律及其物理意义

自由空间中的电磁场定律(以下简称场定律)有下面五个。

● 法拉第电磁感应定律

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-1)$$

① 物理意义:在自由空间中,沿一条闭合路径的电动势等于与该路径交链的磁通量(穿过以闭合路径为边界的任何一个曲面的磁通量)的减少率(对时间变化率的负值)。也就是说,时变的磁场可以产生涡旋电场。

● 修正的安培环路定律

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-2)$$

② 物理意义:在自由空间中,磁场强度 $\mathbf{H}$ 沿一条闭合曲线的环流量,等于与该曲线交链的电流与交链的电通量增加率之和。也可以说成是磁场沿闭合曲线的环流量等于与该曲线交链的电流与位移电流之和。

● 电场高斯定律

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV = Q_{\text{net}} \quad (1-3)$$

③ 物理意义:在自由空间中,由一个闭合曲面内穿出的电通量(电通密度通量)等于曲面

所包围的全部体积内的净电荷量。说明电荷是电通密度矢量的源。

● 磁场高斯定律

$$\oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-4)$$

④ 物理意义：在自由空间中，由任何一个闭合曲面内穿出的净磁通量都为零。也就是说，不存在磁通密度矢量的源磁荷。

● 电荷守恒定律

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \frac{dQ_{\text{net}}}{dt} \quad (1-5)$$

⑤ 物理意义：对于一个体积为 V ，外表面为 S 的系统，只有当有电荷进出时，系统内的净电荷量才会改变。若系统与外界没有电荷交换，即系统为一个电荷封闭系统，则系统内的净电荷是不变的。也就是说，电荷只能以电流的形式转移，而不能自行产生或消失。

在电磁学中，通常将式(1-1)~式(1-4)称为麦克斯韦方程组。

式(1-4)可由式(1-1)导出，而式(1-5)也可由式(1-2)、式(1-3)两式导出，故场定律中，仅有三个式子是独立的，但为使用方便，通常仍写为五个方程式。

了解场定律的物理意义比记住场定律公式更重要，因为只有了解了物理意义，才能理解公式所含的物理概念，才能较好地掌握和运用场定律，而且也便于记住场定律。

2. 电磁场定律整体的物理意义

从定律的形式上看，电磁场定律是电磁场量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 与它们的源量 ρ 、 $\mathbf{J}$ 的相互关系的表达式。这可用图 1-1 来表示。图中用直线箭头表示有直接关系，曲线箭头表示有时变关系。在场定律所反映的所有关系中，有以下两种情况需要予以特别注意。

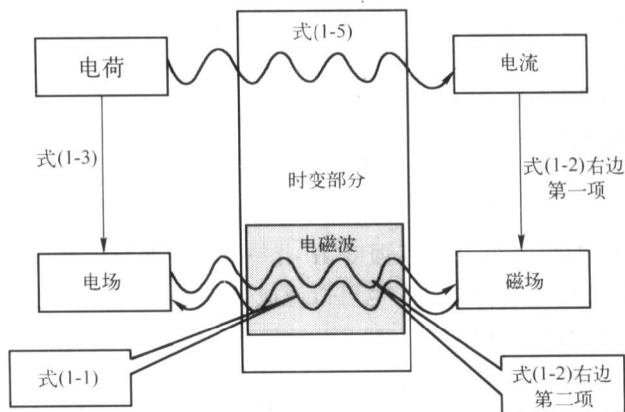


图 1-1

(1) 所有的物理量都是非时变的

此时,场定律为

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-6)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-7)$$

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV \quad (1-8)$$

$$\oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-9)$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-10)$$

在这种情况下, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 已不存在相互耦合,在图 1-1 上只有两边直箭头可以保留。这种情况就属于静态(或称非时变)电磁场问题。

(2) 源量为零

此时,场方程化为

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-11)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (1-12)$$

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-13)$$

$$\oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1-14)$$

在图 1-1 中只有下面场量部分保留着。由式(1-11)、式(1-12)及图 1-1 可见,在此情况下,尽管不存在电荷和电流,但时变的电磁场可以通过相互之间的耦合而存在,这种存在形式即为电磁波。

1.2 典型例题解析

在电磁场理论中,积分场定律主要用在理论研究上,而在解析求解具体的电磁场问题时,应用价值较小。这主要是因为使用积分场定律解题时,必须选定一个适当的积分区域,使积分式可积,这就涉及到数学上的运算是否可行的问题。因此,尽管这些场定律对于任何非相对论的经典电磁场问题都是正确的,但是由于数学运算上的限制,并不是所有的具体问题都可用它

们求出解析的结果。不过,这些场定律在解决具体问题时也会用到的,特别是在现代,由于计算技术的发展,使得数值计算结果的获取成为可能,而加工技术的发展又提高了数值解的使用价值。这样,就使得积分场定律在工程上的应用大为扩展了。但是应该注意的是,由于数学运算上的限制,可用积分场定律解析求解的问题仅限于具有高度对称性的问题。另外,电场和磁场是满足叠加原理的,也就是说,几个源所产生的总场可以用每个源单独产生的场相叠加来求得。因此,如果一个系统可以分解成若干个具有高度对称性的分系统,就可以使用积分场定律求出各分系统的场分布,再使用叠加原理,将所有分系统的场叠加起来,从而求得系统的总场分布。这样,就可以求解一些较为复杂的电磁场问题。不过,在这种情况下,往往会遇到几个分系统所用的坐标系原点不重合的问题。这时,首先就应该把各分系统的场分布写成同一坐标系下的表达式,通常是写成在一个直角坐标系下的表达式,然后再把它们叠加起来。

用积分场定律解析求解电磁场问题时,首先必须分析问题的对称性,选择适用的场定律,然后根据问题本身的情况分析在何种坐标系中可以选定适于求解的积分域,将坐标系和积分域定下来,最后再列出方程,计算并求解。

[例 1-1] 自由空间中的两个点电荷, $q_1 = 1 \text{ C}$, $q_2 = 2 \text{ C}$, 分别放置在原点和 $(0, 0, 3)$ 点处。求:

(1) 空间各处的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。

(2) z 轴上的电场大小,沿 z 轴电场分布是连续的吗? 请解释原因。

解题思路 根据叠加原理,首先将该系统分解成为两个点电荷分别单独存在时的两个分系统,这两个分系统都具有高度对称性,分别应用点电荷所产生电场的计算公式求出各分系统的场分布,并将两个分系统的场叠加起来,从而求得系统的总场分布。

在求解过程中,需要注意:

① 两个分系统所用的坐标系原点不重合的问题。这时,首先要把各分系统的场分布写成同一坐标系下的表达式。在本题中是写成在一个直角坐标系下的表达式,然后再把它们叠加起来。

② 采用直角坐标系而不是球坐标系的原因,是因为直角坐标系中的单位坐标矢量是常矢量,各分系统的场可以按三个坐标分量直接相加得到总场分布;而球坐标系中的单位坐标矢量不是常矢量,各分系统的场不可以按三个坐标分量直接相加得到总场分布。

③ 在把各分系统的场分布写成同一坐标系下的表达式时,点电荷 $q_1 = 1 \text{ C}$ 所产生的电场分布可以直接应用于位于原点点电荷的电场计算式;而另一点电荷 $q_2 = 2 \text{ C}$ 所产生的电场分布必须在位于原点点电荷的电场计算式的基础上做坐标平移。

解 (1) 根据电场的叠加原理,如图 1-2 所示的点电荷系统所产生的电场等于两个点电荷 $q_1 = 1 \text{ C}$ 和 $q_2 = 2 \text{ C}$ 单独存在时所产生的电场之和。

在自由空间中,位于原点的点电荷 q 产生的电场为

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_s^2} \mathbf{i}_{r_s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_s^3} \mathbf{r}_s \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (\mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z) \end{aligned}$$

则点电荷 $q_1 = 1 \text{ C}$ 和 $q_2 = 2 \text{ C}$ 单独存在时产生的电场分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{i}_x \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \mathbf{i}_y \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \mathbf{i}_z \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{i}_x \frac{2x}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} + \mathbf{i}_y \frac{2y}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{i}_z \frac{2(z-3)}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

所以,该点电荷系统所产生的电场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{i}_x \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2x}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} \right] + \right. \\ &\quad \mathbf{i}_y \left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2y}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} \right] + \\ &\quad \left. \mathbf{i}_z \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2(z-3)}{[x^2 + y^2 + (z-3)^2]^{3/2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

(2) z 轴上的电场为

$$E(0, 0, z) = \frac{\mathbf{i}_z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{2}{(z-3)^2} \right]$$

沿 z 轴电场分布在 $(z=0)$ 和 $(z=3)$ 处是不连续的,因为这两点分别为产生电场的点源——两个点电荷所在的位置,是电场的奇异点。

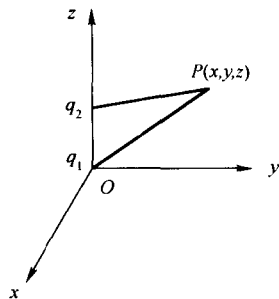


图 1-2

[例 1-2] 自由空间中的环形线电荷,半径为 a ,线电荷密度为 λ_0 , λ_0 是常数。求该环轴线上的电场强度。讨论当轴线上的点 $z \gg a$ 时,电场的近似表达式。此结论说明了什么?

解题思路 该系统具有以环形线电荷轴线为轴的对称性,可以选取柱坐标系,使 z 轴与该环轴线重合,由其对称性可知轴线上的电场强度只有 z 方向上的分量,只需求解电场的 z 分量即可。

这里,需要区分两种情况。对于某一矢量场,以电场强度为例,在柱坐标系中的一般表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(r_c, \varphi, z) \\ &= i_{r_c} E_{r_c}(r_c, \varphi, z) + i_{\varphi} E_{\varphi}(r_c, \varphi, z) + i_z E_z(r_c, \varphi, z) \end{aligned}$$

(1) 如果电场与 r_c, φ 无关,则表达式可简化为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z) = i_{r_c} E_{r_c}(z) + i_{\varphi} E_{\varphi}(z) + i_z E_z(z)$$

仍旧具有 r_c, φ, z 三个分量。

(2) 如果电场没有 r_c, φ 分量,则表达式可简化为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r_c, \varphi, z) = i_z E_z(r_c, \varphi, z)$$

仍旧与 r_c, φ, z 三个变量有关。

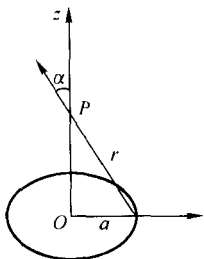


图 1-3

解 如图 1-3 所示,选取柱坐标系,使 z 轴与环形线电荷的轴线重合,则环上任一线元 $\lambda_0 a d\varphi$ 在 P 点产生的电场为

$$dE = \frac{\lambda_0 a d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由其对称性可知,轴线上的电场强度只有 z 方向上的分量,即

$$dE_z = dE \cos\alpha = \frac{\lambda_0 a d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha$$

因为

$$r = \sqrt{a^2 + z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{z}{r}$$

所以轴线上的电场为

$$\begin{aligned} E &= E_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_0^{2\pi} \lambda_0 a d\varphi \\ &= \frac{\lambda_0 a z}{2\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda_0 a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

当 $a \ll z$ 时

$$\begin{aligned} E_z &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon_0 z^3} \frac{\lambda_0 a z}{\left[1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda_0 a}{2\epsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \end{aligned}$$

式中

$$Q = 2\pi a \lambda_0$$

可以得出结论:当 $a \ll z$ 时,轴线上的电场强度等效于放置在环心处电量为 $2\pi a \lambda_0$ 的点电荷在 z 处所产生的电场。

[例 1-3] 在自由空间中,已知平面 $z=a$ 和 $z=-a$ 上有均匀面电荷分布,电荷密度分别为 $\pm \eta_0$ 。求自由空间各处的电场强度。

解题思路 首先根据叠加原理,将该系统分解成为两个均匀面电荷平面分别单独存在时的两个分系统,分别应用无限大面电荷所产生电场的计算公式求出各分系统的场分布,并将两个分系统的场叠加起来,从而求得系统的总场分布。两个分系统均具有对称性,由其对称性可知空间电场强度只有 z 分量。

解 如图 1-4 所示,由叠加原理可知,待求系统等效于两个分系统的叠加。而且,由其对称性,每个分系统所产生的电场只有 z 分量。

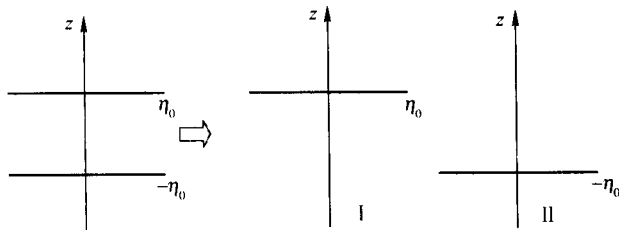


图 1-4

由于位于 $z=0$ 处的无限大均匀面电荷平面在自由空间产生的电场为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z > 0) \\ -i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z < 0) \end{cases}$$

因此,分系统 I 在空间各处的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z > a) \\ -i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z < a) \end{cases}$$

分系统 II 在空间各处的电场强度为

$$\mathbf{E}_2 = \begin{cases} -i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z > -a) \\ i_z \frac{\eta_0}{2\epsilon_0} & (z < -a) \end{cases}$$

所以待求系统空间各处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{cases} 0 & (z > a) \\ -i_z \frac{\eta_0}{\epsilon_0} & (-a < z < a) \\ 0 & (z < -a) \end{cases}$$

[例 1-4] 在自由空间中, 已知半径为 a 的无限长圆柱体上, 带有均匀分布、电荷密度为 ρ_0 的体电荷, 其外有一内半径为 b , 外半径为 c , 与圆柱体同轴的空心圆柱体, 其上带有均匀分布、密度为 $-\rho_0$ 的体电荷, 这里, $a < b < c$ 。求空间各处的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。

解题思路 首先根据叠加原理将该系统分为两个分系统: 分系统 I 和分系统 II, 对于每一个分系统, 均可采用积分形式电场高斯定律求解, 而且由于两个分系统都具有柱对称性, 求解过程可以得到简化。将分系统 I 和分系统 II 的场叠加, 最后得到总场分布。

解 如图 1-5 所示, 根据叠加原理, 可将系统分为两个分系统。

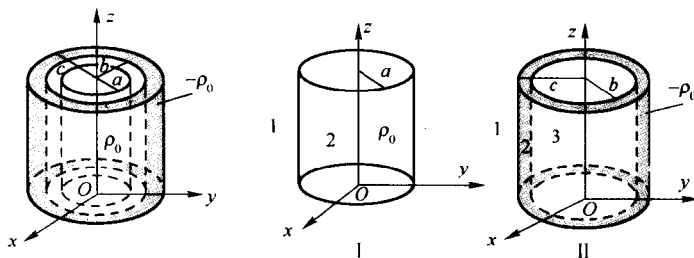


图 1-5

分系统 I: 半径为 a 的无限长圆柱体, 带有均匀分布电荷, 电荷密度为 ρ_0 ;

分系统 II: 内半径为 b , 外半径为 c 的无限长空心圆柱体, 带有均匀分布电荷, 电荷密度为 $-\rho_0$ 。

(1) 分系统 I

由积分形式电场高斯定律

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV$$

取一个高为 d , 半径为 r_c 的圆柱面, 且设柱面上底为 $S_{\text{上}}$, 下底为 $S_{\text{下}}$, 侧面为 $S_{\text{侧}}$, 则闭合曲面为 $S = S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + S_{\text{侧}}$ 。

① 当 $0 \leq r_c < a$ 时

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV = \rho_0 \pi r_c^2 d$$

而且

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_{\text{上}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_{\text{下}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_{\text{侧}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a}$$

由柱对称性可知

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{i}_{r_c} E_{2r_c}(r_c)$$

因为上底面的法向为 $\mathbf{i}_z$, 下底面的法向为 $-\mathbf{i}_z$, 均与 $\mathbf{E}_2$ 垂直, 故有

$$\begin{aligned}\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} &= \int_{S_{\text{侧}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{z=0}^d \int_{\varphi=0}^{2\pi} \epsilon_0 E_{2r_c}(r_c) r_c d\varphi dz \\ &= 2\pi r_c \epsilon_0 E_{2r_c} d\end{aligned}$$

所以

$$E_{2r_c} = \frac{\rho_0 \pi r_c^2 d}{2\pi \epsilon_0 r_c d} = \frac{\rho_0 r_c}{2\epsilon_0}$$

即

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{i}_{r_c} \frac{\rho_0 r_c}{2\epsilon_0} \quad (0 \leq r_c < a)$$

② 当 $r_c > a$ 时

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV = \rho_0 \pi a^2 d$$

且由柱对称性知

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{i}_{r_c} E_{1r_c}(r_c)$$

得到

$$\begin{aligned}\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} &= \int_{S_{\text{侧}}} \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{z=0}^d \int_{\varphi=0}^{2\pi} \epsilon_0 E_{1r_c}(r_c) r_c d\varphi dz \\ &= 2\pi r_c \epsilon_0 E_{1r_c} d\end{aligned}$$

所以

$$E_{1r_c} = \frac{\rho_0 \pi a^2 d}{2\pi \epsilon_0 r_c d} = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r_c}$$

即

$$\mathbf{E}_{1r_c} = \mathbf{i}_{r_c} \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r_c} \quad (r_c > a)$$

因此, 分系统 I 的解为

$$\mathbf{E}_{1r_c} = \begin{cases} \mathbf{i}_{r_c} \frac{\rho_0 r_c}{2\epsilon_0} & (0 \leq r_c < a) \\ \mathbf{i}_{r_c} \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r_c} & (r_c > a) \end{cases}$$

(2) 分系统 II

由积分形式电场高斯定律