



KNOWLEDGE
TREE
知识树考研

2007 考研白皮书系

文登培训学校指定用书

考研数学

数学二

10年真题点评

陈文灯 / 主 编

王 莉 / 副主编



涵盖权威评分标准
准确诠释得分秘诀

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



KNOWLEDGE
TREE
知识树考研

2007 考研白皮书系

附赠(100)目录附录

北京理工大学出版社
地址:北京理工大学出版社
邮编:100081
电话:(010)89147361
网址:www.bjpress.com.cn

考研数学

10年真题点评

数学二

陈文灯 / 主 编

王 莉 / 副主编

北京理工大学出版社
地址:北京理工大学出版社
邮编:100081
电话:(010)89147361
网址:www.bjpress.com.cn
电子邮箱:bjpress@bjpress.com.cn
发行:全国各地各大书店
印刷:北京理工大学出版社
本:16开
印:10.25
字:243千字
版:2006年2月第1版
印:2006年2月第1版
价:15.00元

知识树考研网:www.knowledgetree.com



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学 10 年真题点评. 2 / 陈文灯主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2006. 2

(考研白皮书系)

ISBN 7-5640-0712-5

I. 数... II. 陈... III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007384 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 10.25

字 数 / 243 千字

版 次 / 2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 2 次印刷

定 价 / 15.00 元

图书出现印装质量问题, 本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 1997 年~2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答;在“评注”中简单强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。这里要特别指出的是,书中对 2004 和 2005 年真题中的解答题,标明了参考的评分标准,使读者明了完整准确解题应有的步骤。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的答案,只有当百思不得其解时才查阅答案;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2006 年 1 月

近 10 年考题路线图

(1997 年—2006 年)

以下给出了《高等数学》和《线性代数》每章近 10 年的具体考题题型,可以使考生清晰地了解和把握各章出题的方式、命题的频率及其分值比重,在全面复习的过程中,也不失对重点知识的明确和强化。

第一部分 高等数学

(10 年考题总数:191 题 总分值:1005 分 占二部分题量之比重:82% 占二部分分值之比重:82%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:47 题 总分值:224 分 占第一部分题量之比重:24% 占第一部分分值之比重:22%)

题型 1 求复合函数的表达式(二(5),1997;二(1),2001)

题型 2 求 1^∞ 型极限(四,2001;五,2002)

题型 3 求 $0/0$ 型极限(三(1),1997;一(1),1998;三,1999;一(1),2000;六(1),2000;一(1),2001;二(3),2002;三(15),2005)

题型 4 求 $0 \cdot \infty$ 型极限(三(15),2004)

题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(三(17(I)),2004)

题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数(二(1),1997;二(2),1999;二(2),2001;十,2002;一(1),2003;二(7),2004;一(5),2005;三(15),2006)

题型 7 数列极限的判定或求解或证明(二(1),1998;二(4),1999;十,1999;八,2002;二(1),2003;二(2),2003;三(18),2006)

题型 8 求 n 项和的数列的极限(一(4),2001;二(9),2004)

题型 9 函数间断点的讨论或判定(三,1998;四,2001;一(1),2004;二(12),2005)

题型 10 已知函数的连续性,反求函数中的参数(一(1),1997;一(1),2002;一(2),2006)

题型 11 已知极限存在,反求参数(四,1998;二(1),2000)

题型 12 讨论函数的连续性(七,1997;二(1),1999;三,2003;二(8),2006)

题型 13 已知一极限,求另一极限(二(4),2000)

题型 14 求函数的表达式(三(16(I)),2004)

题型 15 求函数的值域(三(17(II)),2004)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:59 题 总分值:299 分 占第一部分题量之比重:30% 占第一部分分值之比重:29%)

题型 1 与函数导数和微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006)

题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解(二(1),1999;二(1),2002;三(16(II)),2004;二(7),2005)

题型 3 求复合函数的导数或微分(一(2),1997;一(1),2005;二(9),2006)

题型 4 求隐函数的导数或微分(一(2),1999;一(2),2000;一(5),2006)

题型 5 求参数方程的导数(三(2),1997;五,2001;四,2003;一(2),2004)

题型 6 求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或马克劳林展开式(五,2000;十(1),2001;一(3),2003)

题型 7 函数极值、最值、拐点或凹凸区间的判定或求解(二(3),1997;七(1,2),1999;二(2),2000;十,2000;二(3),2001;八(2),2001;二(4),2003;二(8),2004;三(21(I)),2006)

题型 8 函数与其导函数的关系或图形的判定(二(5),2001;二(4),2002;二(8),2005)

题型 9 函数不可导点的个数的求解(二(3),1998)

题型 10 不等式的证明或判定(二(2),1997;二(4),1998;十一,1998;二(3),2000;二(4),2001;九,2002;十(1),2003;三(19),2004;三(19),2006)

题型 11 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明(八,1999;八,2000;十(2),2001;十(2)(3),2003;三(19),2005)

题型 12 函数单调性的判断或增减区间的求解(七(1),1999;二(10),2004)

题型 13 方程根的判定或唯一性证明(八,1997;七,2003)

题型 14 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(一(1),1999;九,2000;一(2),2001;三,2002;一(2),2003;三(21(II)),2006)

题型 15 求曲线的渐近线方程(一(5),1998;七(3),1999;一(4),2000;一(2),2005;一(1),2006)

第三章 一元函数积分学

(10 年考题总数:48 题 总分值:261 分 占第一部分题量之比重:25% 占第一部分分值之比重:25%)

题型 1 求不定积分或原函数(一(3),1997;三(3),1997;一(3),1998;一(3),1999;三,2000;三,2001;五,2003;三(16),2006)

题型 2 函数的原函数性质的判定(二(2),2002)

题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分(二(4),1997;六,1998;四,2000;一(3),2001;四,2002;一(3),2005;三(17);2005)

题型 4 定积分的比较(二(5),2003)

题型 5 求变上限积分的导数或定积分中含参数的导数(七,1997;一(4),1998;十一(1),2000)

题型 6 求解含有积分的方程(十一(1),2000;六,2001;三(16),2005)

题型 7 求解含抽象函数的积分(七,2001)

题型 8 求广义积分(一(4),1997;四,1999;一(3),2000;一(3),2004;一(3),2006)

题型 9 求曲线的弧长或与曲率或曲率半径相关的问题(五,1997;五,2001;八(2),2003)

题型 10 求平面图形的面积(一(2),1998;八(2),2001;一(2),2002;一(4),2003;三(21(Ⅲ)),2006)

题型 11 求旋转体的体积或表面积或立体的体积(六,1997;九,1998;十,2000;六,2002;三(18(I)),2004)

题型 12 求函数的平均值(一(4),1999)

题型 13 求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用(六,1999;七,2002;九,2003)

题型 14 定积分不等式的证明(六(1),2000;十(2),2000)

第四章 多元函数微积分学

(10年考题总数:11题 总分值:69分 占第一部分题量之比重:5% 占第一部分分值之比重:6%)

题型 1 求多元复合函数的偏导(一(4),2004;三(21),2004;二(11),2005;三(20(I)),2006)

题型 2 多元函数极值的判定或求解(三(20),2005;二(12),2006)

题型 3 求二重积分(二(10),2005;三(21),2005;三(17),2006)

题型 4 二重积分的累次积分表示或交换(二(12),2004;二(11),2006)

第五章 常微分方程

(10年考题总数:26题 总分值:152分 占第一部分题量之比重:13% 占第一部分分值之比重:15%)

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(三(4),1997;五,1999;一(4),2001;六,2002;一(5),2004;一(4),2005;一(4),2006;三(20(Ⅱ)),2006)

题型 2 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(一(5),1999;二(11),2004)

题型 3 求可降阶的微分方程的通解或特解(一(3),2002)

题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程(三(5),1997;二(5),2000;二(10),2006)

题型 5 利用代换化简微分方程并求通解(五,1998;六,2003;三(18);2005)

题型 6 通过解微分方程求函数表达式(二(3),2003;八(1),2003)

题型 7 微分方程的几何或物理应用题(七,1998;十,1998;九,1999;七,2000;八(1),2001;九,2001;三(20),2004)

第二部分 线性代数

(10 年考题总数:41 题 总分值:214 分 占二部分题量之比重:18% 占二部分分值之比重:18%)

第一章 行列式

(10 年考题总数:5 题 总分值:19 分 占第二部分题量之比重:12% 占第二部分分值之比重:8%)

题型 1 行列式的计算(二(5),1999;一(6),2005)

题型 2 求矩阵的行列式(一(6),2003;一(6),2004;一(6),2006)

第二章 矩阵

(10 年考题总数:11 题 总分值:46 分 占第二部分题量之比重:26% 占第二部分分值之比重:21%)

题型 1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(一(5),2000;十一(1),2002)

题型 2 解矩阵方程或求矩阵表达式(三(6),1997;十一,1999;十一,2001;十一(2),2002;一(5),2003)

题型 3 矩阵的伴随矩阵的求解或判定(二(5),1998;二(14),2005)

题型 4 矩阵的初等变换与初等矩阵的关系(二(13),2004;二(14),2006)

第三章 向量

(10 年考题总数:11 题 总分值:54 分 占第二部分题量之比重:26% 占第二部分分值之比重:25%)

题型 1 向量组线性相关性的判断或证明(二(5),2002;二(6),2003;二(14),2004;二(13),2005;二(13),2006)

题型 2 求向量组的秩或已知向量组的秩反求参数(一(5),1997)

题型 3 求向量组的极大线性无关组(十二(2),1999)

题型 4 讨论含参变量的向量组的线性相关性(十二(1),1999)

题型 5 向量的线性表出或讨论含参变量的线性表出(十三,1998;三(22),2005;十三,2000)

第四章 线性方程组

(10年考题总数:9题 总分值:64分 占第二部分题量之比重:21% 占第二部分分值之比重:29%)

题型1 齐次线性方程组的基础解系的求解或判定(十二,2001)

题型2 已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数(一(5), 2001;三(22),2006)

题型3 求线性方程组的通解(十二,2000;十二,2002)

题型4 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解(四,1997;三(22),2004;三(23),2005)

题型5 直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定(十二,2003)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:5题 总分值:31分 占第二部分题量之比重:12% 占第二部分分值之比重:14%)

题型1 求矩阵的特征值或特征向量(一(5),2002;三(23(I)),2006)

题型2 已知含参数矩阵的特征向量或特征值或特征方程,求参数(三(23),2004)

题型3 矩阵是否可对角化的判定或求解或逆问题(十一,2003;三(23(II)),2006)

目 录

近 10 年考题路线图(1997 年—2006 年)	I
----------------------------------	---

近 10 年真题集

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	1
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	4
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	7
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	10
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	13
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	16
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	19
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	22
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	25
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	28

近 10 年真题分析、详解及评注

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	31
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	46
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	58
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	70
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	82
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	93
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	104
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	116
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	127
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注	138

附:

文登学校分校一览表

2003—2005 年文登学校考研数学优秀者名单

2006 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为_____。

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ _____。

(3) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____。

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____。

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____。

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$ ，则 $|B| =$ _____。

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ 。 Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量， Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x > 0$ ，则

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

【 】

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x = 0$ 外处处连续， $x = 0$ 是其第一类间断点，则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数。

(B) 连续的偶函数。

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数。

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数。

【 】

(9) 设函数 $g(x)$ 可微， $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$ ，则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3 - 1$.

(B) $-\ln 3 - 1$.

(C) $-\ln 2 - 1$.

(D) $\ln 2 - 1$.

【 】

(10) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

【 】

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

【 】

(12) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 【 】

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关. 【 】

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得

$$C, \text{ 记 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP$.

(D) $C = PAP^T$. 【 】

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16) (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

(17) (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

(18) (本题满分 12 分)

设数列 $|x_n|$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明:当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a.$$

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0),$ (I) 讨论 L 的凹凸性;(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0, y_0) ,并写出切线的方程;(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = -1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.(I) 求 A 的特征值与特征向量;(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x} \arcsin x - \sqrt{\cos x}$ 的等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴

交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(C) $-8 \ln 2 + 3.$

(D) $8 \ln 2 + 3.$

(10) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,

则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi.$

(B) $\frac{ab}{2}\pi.$

(C) $(a+b)\pi.$

(D) $\frac{a+b}{2}\pi.$

(11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}$, 则

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.

(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.

(D) $\lambda_2 = 0$.

(14) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

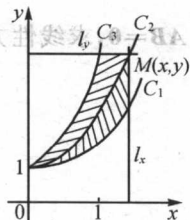
三、(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

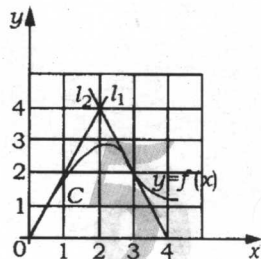
(16) (本题满分 11 分)

如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y , 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



(17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x)f'''(x)dx$.



(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = 0$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

