平面几何证题技巧

李凤畋 编

吉林教育出版社

平面几何证题技巧

李凤畋　编

吉林教育出版社

平面几何证题技巧 李凤畋 编

责任编辑：王铁义 封面设计：于海波

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米32开本 9.625印张 210,000字

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

发行：吉林省新华书店

印数：1—3,233册 定价：2.30元

印刷：长春科技印刷厂 ISBN 7-5383-0544-0/G·520

编者的话

在初中阶段，有相当一部分学生感到平几难学，尤其是怕作证明题．其实不然，只要肯下功夫，刻苦钻研，就会入门、学好．几何这门课程，不仅可以培养和提高我们的逻辑推理能力、创造性思维能力，而且还很有趣，钻研进去，乐在其中．无论是证题还是由此应运而生的辅助线的添加问题，一般说来，都是有其规律的．尽管没有“万用公式”可用，但也是有章可循的．

由于几何证明问题的多样性，证明的方式与方法也有所不同．如果你能熟悉各种证明方法，掌握住一些证题规律和技巧，那么你就会迅速、准确地解决不同类型的命题．

为了帮助同学们学好平面几何这门课程，根据中学数学教学大纲的要求和现行统编教材的内容，我把在长期教学实践中积累的一些资料和自己探索的解题方法撰写成《平面几何证题技巧》一书．它既不是一本习题解答，也不是证题术大全，而是向读者介绍某些类型命题的思维方法、证题的思路与技巧的通俗读物．以期帮助读者提高独立分析问题、解决问题的能力，启迪思维，拓广思路．

本书筛选了242道典型问题（包括历年来全国各地高中招生试题、中外数学竞赛试题及现行统编教材中的一些习题）加以分析例说．有的例题解法新颖别致，并且配备有239道练习题(均有提示或答案)，供读者学习参考．由于本书着重于解题方法与技巧的介绍，因此解题步骤不尽完善，有

些只是略证或分析后证明从略。本书是初中学生毕业复习或参加数学竞赛的良师益友，亦可供老师们辅导数学竞赛或课外活动小组及教学参考。

本书在编写过程中，曾参阅了有关资料，在此谨向这些作者致谢。编写中力求深入浅出，循序渐进，旨在抛砖引玉，但因水平所致，书中难免有挂一漏万不足之处，殷切希望读者指正。

编　者

1987年8月于长春

序　言

平面几何是从少数基本概念、公理出发，用逻辑推理的方法研究平面图形性质的科学，是中学数学的一门主要基础课程，它对培养学生的空间想象能力和逻辑思维能力有着独特的作用。但是，由于其内容的抽象和研究方法的特殊，多年来人们把它视为一门“难教”、“难学”的课程，学生在平面几何的学习上出现比较严重的两极分化现象。对此，引起广大数学教育工作者的普遍关注，李风畋老师在解决平面几何“难教”、“难学”的问题上进行了长期的探索研究，积累了丰富的经验和大量的资料，取得了较好的成果，并且编辑成书，的确是做了一桩有益的工作。

我们知道，几何证题是几何“难教”、“难学”的中心问题。李老师在《平面几何证题技巧》一书中，全面系统地阐述了几何证题技巧和规律，并抓住几个基本的思考途径，通过典型例题进行分析，启发学生思维，开阔学生思路，培养学生分析问题的能力，掌握几何证题规律，这对提高学生几何证题能力将会起到积极作用。

《平面几何证题技巧》是一本较好的中学生课外读物，会受到广大中学数学教师和学生的欢迎。作为数学教育工作者，我为这本书的问世感到由衷的高兴。

孙涤寰

1987年11月

注：孙涤寰是吉林省数学学会副理事长、吉林省教育学院教授。

目　录

一　学好概念 打好基础
开发智力 提高能力

解题能力是各种数学能力的体现。要想提高学生的解题能力，必须有扎实的基础知识和熟练的基本技能，更应培养他们的思维能力，使智力得以开发，才能使解题能力不断提高。

重视概念　事半功倍

众所周知，数学是由概念与命题等内容组成的知识体系，而概念是数学知识体系的中心。不言而喻，概念在教学中应占有十分重要地位，它不仅是基础知识的重要组成部分，而且也是培养能力、开发智力的先决条件。《中学数学教学大纲》中指出："正确理解数学概念，是掌握数学基础知识的前提。"对于这一点，有的师生往往重视不够，认为无关紧要，觉得会做题就可以了。这样一来，其后果事与愿违。教学实践证明：学生解题能力较差的重要原因之一，就在于概念理解的不透，或者把它遗忘了。因此，常因"一念之差"使解题无从下手或导致错误，有的则无的放矢，还有的虽走了几步，但关键之处未想到，最后功亏一篑，所以我们要把概念的"教"与"学"重视起来，放在首位。否则，定会事倍功半，欲速不达，这是不容置疑的。必须重视概念的理解、熟记、灵活运用三个方面。

1 概念不清，就会造成判断失误

近几年来的数学试题中属于考查概念的判断题占有一定的比例，可见学好概念的重要性。然而，由于概念不清，造成判断失误的也不乏其例。

例如，有的学生把“两个底角相等的三角形是等腰三角形”判为正确的命题。显然这是由于对“底角”这个概念理解的不深刻所致。因为只有当一个三角形是等腰三角形时，才能确定它有底角，而对于任意三角形不能确定其中哪一个角是底角。

又如，有些学生把“等边三角形是相似形”视为正确的判断。造成失误的原因，在于没有注意推敲有几个等边三角形。说明这些学生对概念的理解表面化、不透彻，未能洞悉“相似形”的内涵与外延。

类似这种错误，在平素教学和中考试卷中，实为屡见不鲜，不胜枚举。不仅如此，概念不清还容易产生混淆。如，重心、垂心、外心、内心这四个概念，若抓不住本质区别，在解题时往往就张冠李戴；概念不清还容易造成解题考察不周密、讨论不全面以及易犯偷换概念等逻辑错误。总之，忽视基本概念的学习，或把概念看成僵死的条文，死记硬背，学不得法，用不应手，就会在解题中犯有形形色色的错误。由此看来，师生必须重视概念的教与学。恕我直言，若教者本身概念模糊或疏忽大意，就会以讹传讹，其害非浅。

2 熟记概念，是正确解题的先导

概念是学习数学知识的基础，是推理论证的依据，是解题时须臾不可离开的“链条”。我们知道，每一个概念就是一

个信息源，它闪烁着问题的“条件”和“结论”，如果概念被遗忘了，信息就会中断，解题就会受阻。

例 1　（选择唯一正确的答案）（如图1—1）由△ABC的外心O向BC边作垂线，D为垂足，连结BO，则∠BOD与∠BAC的关系是（　　）。

（A）互余；（B）互补；（C）相等；（D）相等或互补。

面临此题，有些学生盯住两个“孤立”的角，束手无策，无奈只好寄托于“命运”随便“选”一个。究其原因，是忘记了“外心”的含意。若能熟记其义，作出△ABC的外接圆（这样更直观），则显而易见∠BAC和∠BOD同为$\overset{\frown}{BC}$上的圆心角∠BOC的一半，从而易得∠BOD＝∠BAC，故选（C）。

例 2　在△ABC中，∠ACB＝90°，BN、CM是中线，BN⊥CM于O且BC＝a（如图1—2），求BN的长。

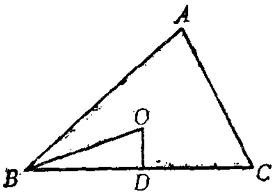

图1—1

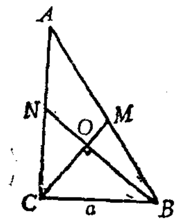

图1—2

有许多学生在解这道题时，把思维仅囿于中线的定义上，只知M、N分别为AB、AC的中点，东撞西碰，结果无济于事；即使有的学生认出了射影定理的“基本图形”，获知$BC^2＝BO\cdot BN$，但由于未能识出O为重心或忘其性质，因而思路中断，半途而废。与此相反，那些概念掌握较好、记忆深刻，知识扎实的学生，解答时就会易如反掌。足可见，

光有对概念的透彻理解是不够的，还必须熟记，只有这样，解题时才能信手拈来、思路畅通。

3 灵活运用概念，寻求解题技巧

理解、熟记概念，旨在灵活运用。有些问题，在题设中蕴含着某些因素，需用某一概念去发掘、开拓，这更需要我们细心分析与观察，进而灵活运用概念，使问题迎刃而解。

例 3 设C是以AB为直径的半圆上一点，$CD\perp AB$于D，E为线段DB上的一点，过D作$DF\perp CE$于F，延长DF交BC于G（如图1—3），求证：$\frac{CG}{GB}=\frac{AD}{DE}$.

经过仔细观察、认真检索，自然联想到要用“过渡比”这座桥，“桥梁”在哪？从何处过渡？由直径联想到连结AC，则$AC\perp BC$，进而猜想到过D点作$DH\perp BC$于H，交AE于M，易得$AC/\!/DH$。“桥梁”找到了，于是$\frac{AD}{DE}=\frac{CM}{ME}$，“过渡比”应运而得。此时，只需证得$\frac{CG}{GB}=\frac{CM}{ME}$即可。为此，再需“一桥飞架南北”，就可“天堑变通途”。至此，自然想到连结MG。然而，此时图中隐含着需要发掘、开拓的概念“垂

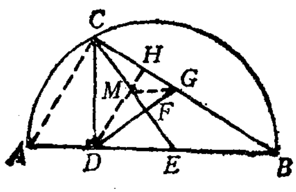

图1—3

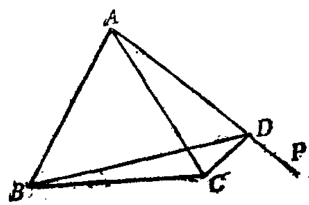

图1—4

心”,若能“侦察”到这一点，就会顿开茅塞，使问题获证。

灵活运用概念，不仅可以使解题得心应手，而且常可获得解题技巧，达到避繁就简、化难为易的目的，收到事半功倍的效果。但同学们往往忽略这一点，造成舍近求远，舍巧求拙。

例 4 在等边△ABC外作一锐角∠PAC，在AP上截取AD＝BC（如图1—4），求∠BDC的度数。

按“常规”解法，则有

$$\begin{aligned}\angle BDC &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAD) - \angle ADB \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAD - \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ - \angle CAD) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAD - 60^\circ + \frac{1}{2}\angle CAD \\ &= 30^\circ.\end{aligned}$$

很明显，这种解法过程较繁，又不易推算，若能用圆的定义解此题，就会收到事半功倍的明显效果。

由题设可知AD＝AB＝AC＝BC，则点D、B、C皆在以A为圆心、BC为半径的圆A上，∠BDC、∠BAC分别为$\overset{\frown}{BC}$上的圆周角和圆心角，从而有$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$。

由此看出，灵活运用概念解题确为“双基训练”的一种好方法。

用这种思想方法，还可以迅速地解出以下两题：

（1）选择填空。如图1—5，AB＝AC＝AD，若∠DAC是∠CAB的K倍，那么∠DBC是∠BDC的（　　）倍。　　　（1984年上海市初中数学竞赛试题）

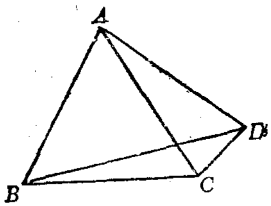

图1—5

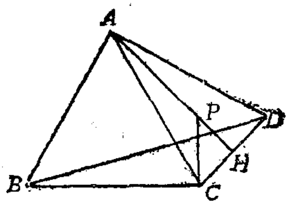

图1—6

（A）K倍；（B）2K倍；（C）3K倍；（D）都不对。

（2）如图1—6，$AB=AC=AD=BC$，$AH\perp CD$于H，$CP\perp BC$交AH于P，求证：$\triangle ABC$的面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}AP\cdot BD$。

（1984年天津市初中数学竞赛试题）

例 5 在直角三角形ABC中，直角$\angle C$的平分线CE与斜边AB的垂直平分线DE相交于E（如图1—7），求证：$CD=DE$。

大部分同学解答此题时，都设法直接推证$\angle DCE=\angle DEC$，这样会使证明过程较繁、较难，但若能对题涉概念展开联想，由“已知”想到“未知”就容易获得证明。

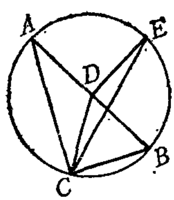

图1—7

由Rt$\triangle ABC$联想到斜边是外接圆的直径，中点D是圆心，由垂直平分线联想到它必过$\overset{\frown}{AB}$的中点，故知交点E就是$\overset{\frown}{AB}$的中点，即E在外接圆上，所以$CD=DE$。显然，这种运用概念的解法，自然明快、简捷巧妙。

纵观上述诸例，明显看出：正确地理解和掌握数学概念，是我们进行准确的判断、合理的运算、正确的推理以及

正确的画图的基础，是学好几何的前提，是基础知识的基础，决不可等闲视之，要把提高解题能力与学好概念结合起来，否则，智力的开发、能力的提高都将成为无源之水、无本之木。

诚然，学好概念重要，但要想使解题能力得以迅速提高，仅此还是远远不够的，还必须掌握一些类型问题的“常规”解法和一些解题“技巧”。由于一般类型题的解法常见于诸多书刊，因此，本书不再重述。首篇之后仅对一些同学们尚未掌握的较难类型问题做以介绍，并将解题“技巧”蕴藏其中，审思即得。为了培养同学们的发散思维能力，皆以“一题多解”的形式给予展示，供读者参考，以期抛砖引玉。

因为拙著主要介绍平几证题“技巧”，所以首先浅谈一下：

如何寻求解题捷径

大家知道，对于同一命题，由于思路不同，采用的解题方法也有所不同。我们把按一般思路用一般方法解题称为“常规”解法；把按特殊思路用较简方法解题称为“简捷”解法或称为“技巧”解法。顾名思义，“技巧”解法不仅可以省功、省时，而且准确率也较高。因此，我们要探求解题捷径。

实践证明：“常规”是基础、是重点，是雪中送炭；而“技巧”是提高、是难点，是锦上添花。要想巧妙解题，首先要把那些作为解题出发点的基本内容、基础知识理解透彻，记忆准确；把基本方法、基本技能切实掌握，娴熟灵

活，胸有"常规"才能运筹帷幄，产生"技巧"。"巧"是建立在"规"的基础之上的，熟"规"方能生"巧"。抛开"常规"一味追求"技巧"那是不切实际、毫无用处的，而且还往往会弄巧成拙，欲速则不达。

在牢固掌握"常规"解法的基础上，经常注意探求"技巧"，不但能提高我们的观察、分析能力，使思维敏捷而深刻，养成遇到问题善于抓本质的习惯和能力，而且还会使我们在后来的学习和工作中善于独立思考，富于创造精神。

关于探求解题捷径的策略很多，这里略举几种：

1　广泛联想法

联想是合理思维的关键，丰富的联想有助于开拓思路。根据题目的特征，综合运用数学知识，进行广泛联想，往往能从不同的角度出发，产生各种不同的解题方法，才能从中猎取最佳解题方案。

例 6　如图，已知正方形ABCD，过点B作BE∥AC，交以A为圆心，以AC为半径的圆弧于点E，连结AE，求证：$\angle CAE=2\angle BAE$。　（1986年吉林省中考试题）

分析　此题的"常规"解法是：过B、E分别向AC作垂线（如图1—8），而后利用正方形对角线的性质，证出$\angle CAE=30°$。然而，这两条辅助线很难想到，学生感到十分棘手。

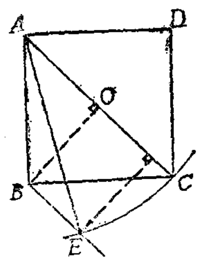

图1—8

若能仔细观察、认真分析，由正方形边长（设为a）可求出　$AE=AC=\sqrt{2}a$；再由BE∥AC可得$\angle CBE=\angle ACB=45°$，故知