高等财经院校试用教材

经济数学基础（三）

概率统计

中国金融出版社

高等财经院校试用教材

经　济　数　学　基　础（三）

概 率 统 计

中央财政金融学院
湖 南 财 经 学 院　联合编写

中国金融出版社

责任编辑：程建国

经济数学基础（三）

概率统计

中央财政金融学院
湖南财经学院　联合编写

*

中国金融出版社　出版

新华书店北京发行所发行
山西省阳曲县印刷厂印刷

*

850×1168毫米　1/32　15.5印张　356千字
1988年2月第一版　1988年2月第一次印刷
印数：1—20500

ISBN 7—5049—0296—9/F·7　定价：2.70元

编审说明

这本教材是应高等财经院校教学需要而编写的，是《经济数学基础》一书的第三册。本书也可作为培训银行干部的教材，还可供有志于学习概率统计的经济工作人员自学之用。

本书主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量函数的分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布和参数估计、回归分析和方差分析、正交试验以及随机过程初步。

本教材由中央财政金融学院和湖南财经学院部分教师编写，其中第一、二、三章由董承章编写，第四、五、六、七章由单立波编写，第八章由王明惠编写，第九章由钱俐珍编写，第十、十一章由谢瑞云编写，第十二、十三章由李蓉华编写。全书由李宝光任主编并负责总纂。

现经我们审阅，本书可作为高等财经院校试用教材。读者对本书的意见和建议，请函至中国人民银行教育司教材编审室。

中国人民银行教材编审委员会

1987年9月28日

目　录

第一章　随机事件及其概率

概率统计是研究与揭示随机现象的统计规律性的数学分支。

什么是随机现象呢？在自然界和人类社会中，存在着两种不同的现象：确定现象和随机现象。在客观世界中，确定现象十分广泛。例如，“在标准大气压下，水温升到100℃时沸腾”；“在一批合格的收录机中，任取一台是合格品”等等，这些现象在一定条件下是必然要发生的。而“在标准大气压下，水温升到50℃时沸腾”；“在一批合格的收录机中，任取一台是废品”等等，这些现象在一定条件下是必然不会发生的。这种在一定条件下必然发生（或必然不发生）的现象，称为确定现象。微积分和线性代数等都是研究确定现象的数量规律性的数学分支。

在客观世界中，随机现象也极为普遍。例如：

抛一枚均匀硬币，可能出现正面也可能出现反面；

从一批同类产品中任取一件，可能是正品，也可能是次品或废品；

某电话交换台，在单位时间内收到的呼叫次数，可能是0次、1次、2次，…；等等。

这种在相同条件下，可能发生多种不同结果的现象被称为随机现象。

随机现象具有二重性，即在个别实验或观察时，随机现象的某种结果发生与否具有不确定性（偶然性），而在大量重复实验或观察时，又呈现出其固有的规律性（必然性）。这种在大量重复实验或观察的条件下，随机现象发生某种结果的固有规律性，

称为统计规律性。例如，一枚硬币抛一次时，其结果可能出现正面，也可能出现反面，具有不确定性；而在大量重复抛掷时，正面和反面出现的次数约各占一半，呈现出统计规律性。再如，许多经济问题，如保险公司开展的“人寿保险”、“财产保险”、“船舶保险”等，由于具有统计规律性，保险公司才有了开展保险业务的客观基础。

虽然概率论与数理统计研究的对象都是随机现象，但各有侧重。一般而言，概率论侧重于对随机现象发生某种结果的可能性，提出各种概率分布的数学模型，并研究其内在的特征与彼此之间的联系；而数理统计则是以概率论为基础，侧重于统计资料的分析、研究，并验证它是否符合概率论中提出的某种数学模型，进而作出有用的推断，即研究怎样从“样本的统计特征”推断“总体的统计特征”。

由于随机现象极为普遍，因此概率论与数理统计的理论与方法，不仅在科学技术，而且在经济领域中都有着广泛的应用。它是经济管理、质量控制、保险、系统论、信息论、控制论、经济预测与决策、计量经济学等的理论基础，是经济、管理、工程技术人员不可缺少的数学工具。目前不仅在理工科院校，而且在财经院校的各专业都普遍设置了这门课程，其目的在于为以后解决有关问题和学习经济数学奠定必要的基础。

§1.1 随机事件

一、随机试验

为研究随机现象发生某种结果的可能性的大小，在概率论中，总是通过随机试验来研究随机现象的统计规律性的。

对随机现象进行的实验或观察的过程，称为随机试验，简称

试验，记为E。

因此，随机试验所代表的现象就是随机现象。通过试验得到的统计规律性，就是试验所代表的随机现象的统计规律性。在概率论中讨论的试验，必然满足下列条件：

1°试验可以在相同条件下重复进行；

2°试验的结果具有多种可能性；

3°试验之前，不能准确知道将会出现哪种结果，但能够明确试验的所有可能结果。

例如掷骰子，观察其出现的点数。可以用同一颗骰子重复抛掷；每次抛掷的结果可能出现“1点”、“2点”、“3点”、“4点”、“5点”或“6点”，结果具有多种可能性，但在投掷之前，不能准确知道某次投掷会出现几点，然而只有上述六种可能结果在试验之前是知道的。故掷骰子这件事满足“试验”的三个条件，所以，掷一次就是一次试验，掷两次就是两次试验。必须注意：在概率论中所讨论的“试验”，是一个广泛的术语。如抛硬币，每抛一次；打靶，每射击一次；在产品质量检查时，从一批产品中，每抽取一件进行检查等都是一次随机试验。

二、随机事件

1．随机事件

随机试验的结果，称为随机事件，简称事件，通常用大写的拉丁字母A、B、C、D等表示。

具体而言，在每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中又具有某种统计规律性的事件，就是随机事件。由于我们用“试验”代表随机现象，所以随机事件表示随机现象的结果。

2．基本事件与复合事件

事件可分为基本事件与复合事件两种。例如，在掷一颗骰子

的试验中，对其结果可有如下两种说法：

其一，可以说出现的是“1点”、“2点”、…、“6点”。显然，这六个事件都是随机事件且都是最简单、最基本的事件，故这六个事件都是基本事件。

其二，也可以说出现“奇数点”、“偶数点”、“点数不大于4”、“点数大于4”等等。这些事件也都是该试验的结果，但它们都不是基本事件。如出现“奇数点”这个事件，它是由出现“1点”、“3点”和“5点”三个基本事件组成的复杂事件，只要这些基本事件中有一个发生，出现“奇数点”这个事件就发生了，这类复杂事件就是复合事件。同理，出现“偶数点”、“点数不大于4”、“点数大于4”等也都是复合事件。

一般而言，在一定范围内不可再分的简单事件，称为基本事件；由基本事件构成的复杂事件，称为复合事件。

3．必然事件与不可能事件

在掷一颗骰子的试验中，“点数不大于6”，是必然要发生的事件，称为必然事件；出现“7点”，是必然不会发生的事件，称为不可能事件。

一般而言，每次试验中，一定要发生的事件称为必然事件，记为Ω；一定不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$。

显然，必然事件与不可能事件表示的是确定现象的结果，它们不是随机事件。但为讨论问题方便起见，也把它们看作随机事件。稍后我们就会理解，它们是随机事件的两种极端情况。

应该指出：随机事件、必然事件和不可能事件，都是相对于一定的试验条件而言的，如果试验条件变了，事件的性质就可能发生变化。仍以掷骰子的试验为例，掷一颗骰子时，“点数小于7”是必然事件；掷两颗骰子时，“点数之和小于7”是随机事件；而掷十颗骰子时，“点数之和小于7”就是不可能事件了。

三、用集合表示事件

为便于研究随机试验E的结果，借用集合的概念比较直观而且容易理解。为此，首先给出样本空间的概念。

1．样本空间　某一随机试验E的所有基本事件组成的集合，称为E的样本空间，记为Ω。显然，Ω中的所有元素就是该试验E的全部基本事件。

例1　在抛一枚硬币的试验中，只有出现正面和反面两个基本事件，故Ω中只含有正面与反面两个元素，即

$$\Omega=\{正，反\}$$

例2　在将一枚硬币连抛两次的试验中，其可能的结果(基本事件)有：正正、正反、反正、反反。其中“正反”表示第一次出现正面，第二次出现反面，余类推。故该试验的样本空间中含有四个元素，即

$$\Omega=\{正正，正反，反正，反反\}$$

注意：“正反”与“反正”表示两个不同的基本事件，不能把它们看成一个基本事件。

例3　从一批产品中任取3件，检查次品出现的件数，其可能结果为：“无次品”、“1件次品”、“2件次品”，“3件次品”，故该试验的样本空间为：

$$\Omega=\{0, 1, 2, 3\}$$

例4　记录北京地区一昼夜的最低与最高温度，每记录一次就是一次试验。假如由北京地区历年气温统计资料知道，最低气温$x=-15℃$，最高气温$y=43℃$，则记录结果(基本事件)必是一组值。如($x=-15$, $y=-5$)，($x=-5$, $y=10$)，($x=15$, $y=25$)等等，即x、y的取值必在-15～43之间，故其样本空间为：

$$\Omega=\{(x, y)\mid -15\leqslant x<y\leqslant 43\}。$$

例5 在一批灯泡中任取一只，测试其使用寿命。这是一个随机试验。测试的结果可能是100小时，500小时，1000小时，等等。试验的所有可能结果一定是非负实数。其样本空间为：

$$\Omega=\{t \mid T>t\geqslant 0\}$$ ，

由上述例子可知，随着试验内容的不同，样本空间可相当简单，也可比较复杂，可以是有限样本空间（前5例），也可是无限样本空间，且构成样本空间的元素有离散（前三例）与连续（后二例）之别。

由于试验E的所有可能结果是已知的，因此，样本空间中的元素也是已知的。在以后的讨论中，我们总是假定样本空间是事先给定的。

2．用集合表示事件

在例3中，$\Omega=\{0, 1, 2, 3\}$，如果将事件“无次品”用集合$A_1=\{0\}$表示，“不超过1件次品”用集合$A_2=\{0, 1\}$表示，则从集合论的观点看，事件A_1、A_2都是Ω的子集。复合事件A_2发生，意味着集合A_2中的某个元素（基本事件）发生且仅有一个发生，即

事件A_2发生$\rightleftharpoons$集合A_2中的某个元素发生

由上可知：1°用集合表示事件之后，就可将事件定义为样本空间Ω的子集；2°样本空间Ω作为一个事件是必然事件。因为样本空间Ω是由其所有基本事件组成的集合，Ω作为一个复合事件，在每次试验中，必有一个基本事件发生，所以Ω是必然事件；3°集合论中的空集$\varnothing$表示概率论中的不可能事件。因为在任意一次试验中，所有基本事件都不发生是不可能的，即任意一个基本事件都不是不可能事件。由此可知，必然事件与不可能事件是随机事件的两种极端情况。

由于引进了样本空间的概念，就把事件与集合联系起来了。

用集合表示事件，就可用集合间的关系与运算来分析事件间的关系与运算。

四、事件间的关系及其运算

试验时，常要求我们同时研究几个在相同条件下发生的事件以及它们之间的关系。

例6　检查一批圆柱形产品是否合格，设其合格与否仅由其直径与长度是否合格来决定，如图1—1所示。这时我们就要考虑“产品合格”、“产品不合格”、“d合格”，“l合格”、“d合格而l不合格”等事件以及它们之间的关系。显然，这些事件之间是有联系的，仔细分析这些事件之间的关系，有助于我们更深刻地认识事件的本质，进而研究事件的概率之间的各种关系。下面就来介绍事件间的关系及其运算。

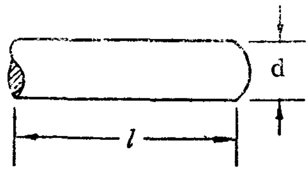


图1—1

1．事件的包含与相等

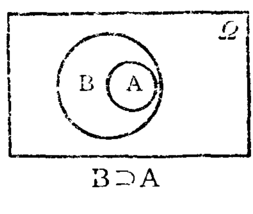
（1）事件的包含：若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为

$$B\supset A \text{或} A\subset B$$

读作事件B包含事件A或事件A包含于事件B。

如在例6中，设事件A表示“d不合格”，事件B表示“产品不合格”，则“d不合格”必然导致“产品不合格”。所以，“产品不合格”包含“直径不合格”，即事件A发生必然导致B发生，故有$B\supset A$

事件的这种包含关系，可用文氏图形直观地表示为图1—2。图中矩形区域表示样本空间，区域A表示事件



$B\supset A$

图1—2

A，区域B表示事件B，B包含A即区域A在区域B内。

（2）事件的相等：若事件A包含事件B且事件B包含事件A，即$A \supset B$且$B \supset A$，则称事件A与事件B相等，记为

$$A = B$$

如在例6中，设事件C表示“产品合格”，D表示“直径与长度都合格”，则$C = D$。显然，相等的两个事件实际上是同一事件。

2．事件的和、差、积

（1）事件的和：事件A与B至少有一个发生的事件，称为事件A与B之和，记为

$$A \cup B$$

读作A并B。

图1—3中的阴影部分表示$A \cup B$。由图可知，$A \cup B$包括A与B中的所有元素，且可分为以下三种情况：

1°A发生B不发生；

2°B发生A不发生；

3°A、B同时发生。

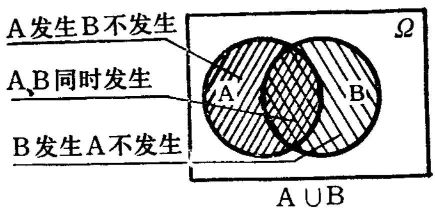


图1—3

如在例6中，设事件A表示“d不合格”，B表示“l不合格”，C表示“产品不合格”。因为“产品不合格”意味看要么“d不合格”，要么“l不合格”，二者至少有一个发生（包括d、l都不合格），故$C = A \cup B$

例7　检查100台牡丹牌彩色电视机的质量，设事件A表示100台中有“一台次品”，B表示有“2台次品”。则$A \cup B$表示100台中有“1台或2台次品”。注意：$A \cup B$不表示100台中有“两台以下的次品”，因为这一事件还包括“无次品”。

事件和的概念可以推广到有限个或无穷多个事件之和的情形：

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$表示几个事件至少有一个发生；

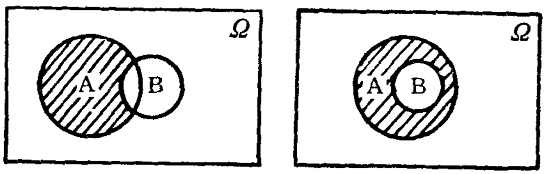
$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$表示$A_1$，$A_2$，…，$A_k$，…中至少有一个发生。

(2)事件的差：事件A发生而B不发生的事件，称为事件A与B之差。记为

$$A - B$$

读作A减B。同理有B－A。

图1－4中的阴影部分表示A－B。



A－B

图1—4

如在例7中，设事件A表示“正品不少于95台”，B表示“正品不少于95台”，则A－B表示100台中有“95台正品”。

(3)事件的积：事件A与B同时发生的事件称为事件A与B之积，记为

$$A \cap B \text{或} A \cdot B \text{或} AB$$

读作A交B或A乘B。图1－5中的阴影部分表示$A \cap B$，它包括A与B的所有公共元素。

如在例6中，设A表示“d不合格”，B表示“l不合格”，则$A \cap B$表示“产品不合格”。

再如在例7中，设A表示“次品不超过5台”，B表示“次品不超过3台”，则$A \cap B$表示“次品不超过3台”，如图1－6所示。