普通高等教育“十五”国家级规划教材

概率论与数理统计教程

茆诗松　程依明　濮晓龙　编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

概率论与数理统计教程

茆诗松 程依明 濮晓龙 编著

高等教育出版社

内容提要

本书包括事件与概率、随机变量(一维与多维)及其分布、大数定律及中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等内容。全书分八章40节叙述,含有例题250个,习题分节设立,共600道,插图100多幅。本书可供高等院校数学系与统计系作为教材使用,亦适合自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程/茆诗松.程依明.濮晓龙编著.—北京:高等教育出版社,2004.7
ISBN 7-04-014365-8

Ⅰ.概… Ⅱ.①茆…②程…③濮… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第054700号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 文小西　**封面设计** 于　涛　**责任绘图** 吴文信
版式设计 史新薇　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www hep edu cn
总　　机	010-82028899		http://www hep com cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2004年7月 第1版
印　　张	29.75	**印　　次**	2004年7月 第1次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	33 90元

本书如有缺页、倒页 脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

序　言

概率论与数理统计是全国高等院校数学系与统计系的基础课程。这门课的任务是以丰富的背景、巧妙的思维和有趣的结论吸引读者，使学生在浓厚的兴趣中学习和掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本理论。我们正是抱着这样的心愿编写这本教科书，并努力去实现它。很幸运，2003 年该书先后被列入"国家级十五规划教材"和"高等教育百门精品课程教材建设项目"。这使我们信心倍增，同时也深感责任重大，定要同心协力编写好此书，以适应祖国日益发展的经济形势的需要。

本书内容为八章，前四章为概率论，后四章为数理统计。在编写上作了一些尝试，我们把随机变量的定义分两步完成，其直观定义在第一章就出现了，用来表示事件，较为严格的定义在第二章中完成。这样可使学生对随机变量有了较具体又完整的概念。在随机变量层次上，我们更强调分布的概念。另外在概率定义上，我们采用了公理化系统，而把频率、古典概率、几何概率和主观概率作为确定概率的四种方法。在统计部分，我们尽量从数据出发提出问题和研究问题，对总体、抽样分布、检验的拒绝域等概念的叙述都作了一些改进，增加了描述性统计的基本内容和贝叶斯统计初步，让学生能较为全面地认识统计。另外对分位数、检验的 p 值、零概率事件（几乎处处）和渐近分布等都作了较为详尽和具体的叙述。在叙述中我们尽力做到图文并茂，全书共有图 100 多幅，相信这对内容的理解会有帮助。

作为概率论与数理统计的入门书，我们不想一进门就把学生引入数学天堂，而是在"野外"先浏览概率统计的各种风景之后，再进入数学天堂，使各种概念和定理成为有源之水、有本之木。可使学生感到读此书的趣味，感到与读数学教科书有不同的味道。当然我们也十分注意从偶然性中提炼出来的一些规律性的证明和论述，因为只有理解了的东西才能更深刻地感受它。

本书给出的例子，总量达到近 250 个，其中很多例子更贴近人们的社会、经济、生活和生产管理，更具有时代气息。这些例子是我们日常教学和研究中收集起来的，它能把概率统计基本内容渗透到各种实际中去。

本书的习题分节设立，这样可使习题更具针对性，并通过习题增强能力和扩大视野。习题数量也明显增多，全书有 600 道习题。这些习题中一半左右是基

本题，使大多数学生在掌握基本知识后都能做出，还有一部分习题经过努力大多也能做出，这样安排习题是希望培养学生兴趣与能力，提高学生学好这门课程的信心。另外，配合本书的教与学，我们还编了一本“概率论与数理统计习题与解答”，将于近期出版。这本辅助读物有助于把学生的兴趣和能力引向更深的层次，亦起到“解惑”的作用。

使用本书有两个建议方案，若概率论与数理统计分两学期开设，每学期 60 学时，本书可在 120 学时左右全部讲完。这正是本书编写的初衷。若概率论与数理统计作为一门课程在一学期开设，可选择部分内容组织教学，譬如，

• 概率论部分可选第一、二章大部分内容加上数学期望与方差运算性质、伯努利大数定律和中心极限定理。

• 统计部分可选第五、六、七章大部分内容，其中充分统计量、最小方差无偏估计、两样本的假设检验均可略去。

在此我们首先感谢华东师范大学统计系领导和全体教师，由于他(她)们的关心、支持和鼓励使我们能以充沛的精力去完成此书。我们还要感谢葛广平教授，他在百忙之中审阅了全部书稿，提出了宝贵意见。由于采纳了他的改进意见，使本书的质量进一步得到了提高。最后要感谢高等教育出版社理科分社对本书的支持和督促，没有他(她)们的热心指导和出色编辑，不可能使本书迅速问世。

本书前四章由程依明编写，后四章由濮晓龙编写，全书由茆诗松统稿。我们经常讨论、切磋写法、选择例题、相互补充，终于完成此书。由于水平有限，不当之处在所难免，恳请广大教师和学生提出宝贵意见，我们将作进一步改进。

茆诗松、程依明、濮晓龙

2004 年 3 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　随机事件与概率 …… 1
§1.1　随机事件及其运算 …… 1
1.1.1　随机现象 …… 1
1.1.2　样本空间 …… 2
1.1.3　随机事件 …… 2
1.1.4　随机变量 …… 3
1.1.5　事件间的关系 …… 4
1.1.6　事件运算 …… 5
1.1.7　事件域 …… 8
习题 1.1 …… 9
§1.2　概率的定义及其确定方法 …… 11
1.2.1　概率的公理化定义 …… 11
1.2.2　排列与组合公式 …… 12
1.2.3　确定概率的频率方法 …… 13
1.2.4　确定概率的古典方法 …… 15
1.2.5　确定概率的几何方法 …… 23
1.2.6　确定概率的主观方法 …… 26
习题 1.2 …… 27
§1.3　概率的性质 …… 29
1.3.1　概率的可加性 …… 30
1.3.2　概率的单调性 …… 31
1.3.3　概率的加法公式 …… 32
1.3.4　概率的连续性 …… 34
习题 1.3 …… 36
§1.4　条件概率 …… 38
1.4.1　条件概率的定义 …… 38
1.4.2　乘法公式 …… 40
1.4.3　全概率公式 …… 42
1.4.4　贝叶斯公式 …… 45
习题 1.4 …… 48

§1.5 独立性 …… 50
1.5.1 两个事件的独立性 …… 50
1.5.2 多个事件的相互独立性 …… 51
1.5.3 试验的独立性 …… 54
习题1.5 …… 55
第二章 随机变量及其分布 …… 58
§2.1 随机变量及其分布 …… 58
2.1.1 随机变量的概念 …… 58
2.1.2 随机变量的分布函数 …… 60
2.1.3 离散随机变量的概率分布列 …… 63
2.1.4 连续随机变量的概率密度函数 …… 66
习题2.1 …… 73
§2.2 随机变量的数学期望 …… 75
2.2.1 数学期望的概念 …… 75
2.2.2 数学期望的定义 …… 77
2.2.3 数学期望的性质 …… 79
习题2.2 …… 81
§2.3 随机变量的方差与标准差 …… 83
2.3.1 方差与标准差的定义 …… 84
2.3.2 方差的性质 …… 86
2.3.3 切比雪夫不等式 …… 87
习题2.3 …… 88
§2.4 常用离散分布 …… 89
2.4.1 二项分布 …… 89
2.4.2 泊松分布 …… 92
2.4.3 超几何分布 …… 97
2.4.4 几何分布与负二项分布 …… 99
习题2.4 …… 101
§2.5 常用连续分布 …… 102
2.5.1 正态分布 …… 102
2.5.2 均匀分布 …… 107
2.5.3 指数分布 …… 108
2.5.4 伽玛分布 …… 110
2.5.5 贝塔分布 …… 112
习题2.5 …… 115
§2.6 随机变量函数的分布 …… 117
2.6.1 离散随机变量函数的分布 …… 117
2.6.2 连续随机变量函数的分布 …… 118

习题 2.6 …… 123
§2.7 分布的其他特征数 …… 124
2.7.1 k 阶矩 …… 124
2.7.2 变异系数 …… 125
2.7.3 分位数 …… 126
2.7.4 中位数 …… 128
2.7.5 偏度系数 …… 128
2.7.6 峰度系数 …… 129
习题 2.7 …… 130
第三章 多维随机变量及其分布 …… 132
§3.1 多维随机变量及其联合分布 …… 132
3.1.1 多维随机变量 …… 132
3.1.2 联合分布函数 …… 133
3.1.3 联合分布列 …… 135
3.1.4 联合密度函数 …… 136
3.1.5 常用多维分布 …… 137
习题 3.1 …… 143
§3.2 边际分布与随机变量的独立性 …… 145
3.2.1 边际分布函数 …… 145
3.2.2 边际分布列 …… 146
3.2.3 边际密度函数 …… 147
3.2.4 随机变量间的独立性 …… 150
习题 3.2 …… 153
§3.3 多维随机变量函数的分布 …… 154
3.3.1 多维离散随机变量函数的分布 …… 155
3.3.2 最大值与最小值的分布 …… 157
3.3.3 连续场合的卷积公式 …… 159
3.3.4 变量变换法 …… 161
习题 3.3 …… 163
§3.4 多维随机变量的特征数 …… 165
3.4.1 多维随机变量函数的数学期望 …… 165
3.4.2 数学期望与方差的运算性质 …… 167
3.4.3 协方差 …… 169
3.4.4 相关系数 …… 173
3.4.5 随机向量的数学期望与协方差阵 …… 179
习题 3.4 …… 181
§3.5 条件分布与条件期望 …… 185
3.5.1 条件分布 …… 185

3.5.2 条件数学期望 …… 192
习题 3.5 …… 197
第四章 大数定律与中心极限定理 …… 199
§4.1 特征函数 …… 199
4.1.1 特征函数的定义 …… 199
4.1.2 特征函数的性质 …… 201
习题 4.1 …… 208
§4.2 大数定律 …… 210
4.2.1 伯努利大数定律 …… 210
4.2.2 常用的几个大数定律 …… 213
习题 4.2 …… 216
§4.3 随机变量序列的两种收敛性 …… 218
4.3.1 依概率收敛 …… 218
4.3.2 按分布收敛、弱收敛 …… 220
4.3.3 判断弱收敛的方法 …… 223
习题 4.3 …… 224
§4.4 中心极限定理 …… 226
4.4.1 独立随机变量和 …… 226
4.4.2 独立同分布下的中心极限定理 …… 228
4.4.3 二项分布的正态近似 …… 231
4.4.4 独立不同分布下的中心极限定理 …… 234
习题 4.4 …… 237
第五章 统计量及其分布 …… 240
§5.1 总体与样本 …… 240
5.1.1 总体与个体 …… 240
5.1.2 样本 …… 242
习题 5.1 …… 244
§5.2 样本数据的整理与显示 …… 245
5.2.1 经验分布函数 …… 245
5.2.2 频数频率分布表 …… 246
5.2.3 样本数据的图形显示 …… 247
习题 5.2 …… 249
§5.3 统计量及其分布 …… 251
5.3.1 统计量与抽样分布 …… 251
5.3.2 样本均值及其抽样分布 …… 251
5.3.3 样本方差与样本标准差 …… 255
5.3.4 样本矩及其函数 …… 257

5.3.5 次序统计量及其分布 …… 259
5.3.6 样本分位数与样本中位数 …… 264
5.3.7 五数概括与箱线图 …… 265
习题 5.3 …… 266
§5.4 三大抽样分布 …… 269
5.4.1 χ^2 分布(卡方分布) …… 270
5.4.2 F 分布 …… 270
5.4.3 t 分布 …… 272
5.4.4 一些重要结论 …… 274
习题 5.4 …… 277
§5.5 充分统计量 …… 278
5.5.1 充分性的概念 …… 278
5.5.2 因子分解定理 …… 280
习题 5.5 …… 283
第六章 参数估计 …… 285
§6.1 点估计的几种方法 …… 285
6.1.1 替换原理和矩法估计 …… 286
6.1.2 最大似然估计 …… 287
习题 6.1 …… 291
§6.2 点估计的评价标准 …… 292
6.2.1 相合性 …… 293
6.2.2 无偏性 …… 295
6.2.3 有效性 …… 297
6.2.4 均方误差 …… 298
习题 6.2 …… 299
§6.3 最小方差无偏估计 …… 301
6.3.1 Rao - Blackwell 定理 …… 301
6.3.2 最小方差无偏估计 …… 303
6.3.3 Cramer - Rao 不等式 …… 304
习题 6.3 …… 308
§6.4 贝叶斯估计 …… 309
6.4.1 统计推断的基础 …… 309
6.4.2 贝叶斯公式的密度函数形式 …… 311
6.4.3 贝叶斯估计 …… 312
6.4.4 共轭先验分布 …… 314
习题 6.4 …… 314
§6.5 区间估计 …… 315
6.5.1 区间估计的概念 …… 315

6.5.2 枢轴量法 …… 318
6.5.3 单个正态总体参数的置信区间 …… 319
6.5.4 大样本置信区间 …… 322
6.5.5 两个正态总体下的置信区间 …… 324
习题 6.5 …… 328
第七章 假设检验 …… 330
§7.1 假设检验的基本思想与概念 …… 330
7.1.1 假设检验问题 …… 330
7.1.2 假设检验的基本步骤 …… 331
习题 7.1 …… 334
§7.2 正态总体参数假设检验 …… 335
7.2.1 单个正态总体均值的检验 …… 335
7.2.2 两个正态总体均值差的检验 …… 340
7.2.3 正态总体方差的检验 …… 343
习题 7.2 …… 346
§7.3 其他分布参数的假设检验 …… 348
7.3.1 指数分布参数的假设检验 …… 348
7.3.2 比例 p 的检验 …… 349
7.3.3 大样本检验 …… 351
7.3.4 检验的 p 值 …… 352
习题 7.3 …… 355
§7.4 分布拟合检验 …… 355
7.4.1 总体分布只取有限个值的情况 …… 356
7.4.2 列联表的独立性检验 …… 358
7.4.3 正态性检验 …… 361
习题 7.4 …… 366
第八章 方差分析与回归分析 …… 369
§8.1 方差分析 …… 369
8.1.1 问题的提出 …… 369
8.1.2 单因子方差分析的统计模型 …… 370
8.1.3 平方和分解 …… 371
8.1.4 检验方法 …… 373
8.1.5 参数估计 …… 376
8.1.6 重复数不等情形 …… 378
习题 8.1 …… 380
§8.2 多重比较 …… 382
8.2.1 效应差的置信区间 …… 382
8.2.2 多重比较问题 …… 383

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

8.2.3 重复数相等场合的 T 法 …… 384
8.2.4 重复数不相等场合的 S 法 …… 385
习题 8.2 …… 387
§8.3 方差齐性检验 …… 387
8.3.1 Hartley 检验 …… 388
8.3.2 Bartlett 检验 …… 390
8.3.3 修正的 Bartlett 检验 …… 393
习题 8.3 …… 394
§8.4 一元线性回归 …… 394
8.4.1 变量间的两类关系 …… 394
8.4.2 一元线性回归模型 …… 395
8.4.3 回归系数的最小二乘估计 …… 397
8.4.4 回归方程的显著性检验 …… 400
8.4.5 估计与预测 …… 406
习题 8.4 …… 411
§8.5 一元非线性回归 …… 414
8.5.1 确定可能的函数形式 …… 414
8.5.2 参数估计 …… 415
8.5.3 曲线回归方程的比较 …… 418
习题 8.5 …… 420
附表 …… 421
表 1 泊松分布函数表 …… 421
表 2 标准正态分布函数表 …… 423
表 3 χ^2 分布分位数 $\chi_p^2(n)$ 表 …… 425
表 4 t 分布分位数 $t_p(n)$ 表 …… 428
表 5.1 F 分布 0.90 分位数 $F_{0.90}(f_1,f_2)$ 表 …… 431
表 5.2 F 分布 0.95 分位数 $F_{0.95}(f_1,f_2)$ 表 …… 432
表 5.3 F 分布 0.975 分位数 $F_{0.975}(f_1,f_2)$ 表 …… 433
表 5.4 F 分布 0.99 分位数 $F_{0.99}(f_1,f_2)$ 表 …… 434
表 6 正态性检验统计量 W 的系数 $a_i(n)$ 数值表 …… 435
表 7 正态性检验统计量 W 的 α 分位数 W_α 表 …… 439
表 8 t 化极差统计量的分位数 $q_{1-\alpha}(r,f)$ 表 …… 440
表 9 检验相关系数的临界值表 …… 443
表 10 统计量 H 的分位数 $H_{1-\alpha}(r,f)$ 表 …… 444
习题答案 …… 445
参考文献 …… 459

第一章

随机事件与概率

§1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

概率论与数理统计研究的对象是随机现象.

在一定的条件下,并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**,如抛一枚硬币与掷一颗骰子.随机现象有两个特点:

1. 结果不止一个.

2. 哪一个结果出现,人们事先并不知道.

只有一个结果的现象称为**确定性现象**.例如,每天早晨太阳从东方升起;水在标准大气压(压力约为101 kPa)下加热到100℃就沸腾;一个口袋中有十只完全相同的白球,从中任取一只必然为白球.

例1.1.1 随机现象的例子

(1) 抛一枚硬币,有可能正面朝上,也有可能反面朝上;

(2) 掷一颗骰子,出现的点数;

(3) 一天内进入某超市的顾客数;

(4) 某种型号电视机的寿命;

(5) 测量某物理量(长度、直径等)的误差.

随机现象到处可见.

在相同条件下可以重复的随机现象又称为**随机试验**.也有很多随机现象是不能重复的,例如某场足球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如失业、经济增长速度等)也不能重复.概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象,但也十分注意研究不能重复的随机现象.

1.1.2 样本空间

随机现象的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.样本点是今后抽样的最基本单元.认识随机现象首先要列出它的样本空间.

例 1.1.2 下面给出例 1.1.1 中随机现象的样本空间.

(1) 抛一枚硬币的样本空间为:$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面朝上,ω_2 表示反面朝上.

(2) 掷一颗骰子的样本空间为:$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,其中 ω_i 表示出现 i 点,$i=1,2,\cdots,6$.也可更直接明了地记此样本空间为:$\Omega_2=\{1,2,\cdots,6\}$.

(3) 一天内进入某商场的顾客数的样本空间为:

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,500,\cdots,10^4,\cdots\},$$

其中"0"表示"一天内无人光顾此商场",而"10^4"表示"一天内有一万人光顾此商场".虽然此两种情况很少发生,但我们无法说此两种情况不可能发生,甚至于我们不能确切地说出一天内进入该商场的最多人数,所以该样本空间用非负整数集表示,既不脱离实际情况,又是合理抽象,便于数学上的处理.

(4) 电视机寿命的样本空间为:$\Omega_4=\{t,t\geqslant 0\}$.

(5) 测量误差的样本空间为:$\Omega_5=\{x,-\infty<x<+\infty\}$.

需要注意的是:

1. 样本空间中的元素可以是数也可以不是数.

2. 样本空间至少有两个样本点,仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.

3. 从样本空间含有样本点的个数来区分,样本空间可分为有限与无限两类,譬如以上样本空间 Ω_1 和 Ω_2 中样本点的个数为有限个,而 Ω_3、Ω_4 及 Ω_5 中样本点的个数为无限个.但 Ω_3 中样本点的个数为可列个,而 Ω_4 和 Ω_5 中的元素个数为不可列无限个.在以后的数学处理上我们往往将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一类,称为**离散样本空间**.而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类,称为**连续样本空间**.由于这两类样本空间有着本质上的差异,故分别称呼之.

1.1.3 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.如在掷一颗骰子中,$A=$"出现奇数点"是一个事件,即 $A=\{1,3,5\}$.

在以上事件的定义中，要注意以下几点.

(1) 任一事件 A 是相应样本空间的一个子集. 在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω，用其中一个圆或其他几何图形表示事件 A，见图 1.1.1，这类图形称为**维恩(Venn)图**.

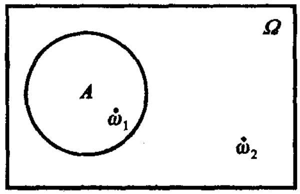

图 1.1.1 事件 A 的维恩图

(2) 当子集 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了，或者说事件 A 发生当且仅当 A 中某个样本点出现了.

(3) 事件可以用集合表示，也可用明白无误的语言描述.

(4) 由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**. 而样本空间 Ω 的最大子集(即 Ω 本身)称为**必然事件**. 样本空间 Ω 的最小子集(即空集$\varnothing$)称为**不可能事件**.

例 1.1.3 掷一颗骰子的样本空间为：$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

事件 $A=$"出现 1 点"，它由 Ω 的单个样本点"1"组成.

事件 $B=$"出现偶数点"，它由 Ω 的三个样本点"2,4,6"组成.

事件 $C=$"出现的点数小于 7"，它由 Ω 的全部样本点"1,2,3,4,5,6"组成，即必然事件 Ω.

事件 $D=$"出现的点数大于 6"，Ω 中任一样本点都不在 D 中，所以 D 是空集，即不可能事件$\varnothing$.

1.1.4 随机变量

用来表示随机现象结果的变量称为**随机变量**，常用大写字母 X,Y,Z 表示. 很多事件都可用随机变量表示，表示时应写明随机变量的含义.

例 1.1.4 掷一颗骰子，出现的点数是一个随机变量，记为 X. 则事件"出现 3 点"可用"$X=3$"表示，事件"出现的点数不小于 3"可用"$X\geqslant 3$"表示. 又如"$X<3$"表示事件"出现点数小于 3".

掷两颗骰子的样本空间为

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6)\\ (2,1) & \cdots & \cdots & (2,6)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (6,1) & \cdots & \cdots & (6,6)\end{matrix}\right\},$$

Ω 共有 36 个样本点，若记 X 与 Y 分别为第一与第二颗骰子出现的点数，则 X 与 Y 均可取值：1,2,3,4,5,6. 而事件"点数之和等于 5"可表示成

$$\text{“}X+Y=5\text{”}=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

另外事件"$\max(X,Y)=6$"表示事件"最大点数为 6"，它含有

$(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)$
共 11 个样本点.

例 1.1.5 检查 10 件产品,其中不合格品数 X 是一个随机变量,它可以取值 $0,1,\cdots,10$. 则事件“不合格品数不多于 1 件”可用“$X\leqslant 1$”来表示. 而“$X>2$”表示事件“不合格品数超过 2 件”.

例 1.1.6 电视机的寿命 T 是一个随机变量,则事件“寿命超过 40 000 h”可用“$T>40\ 000$”表示,而“$T\leqslant 10\ 000$”表示事件“寿命不超过 10 000 h”.

在不少场合,用随机变量表示事件较为简洁明了. 这样一来,事件有三种表示法:

1. 用集合表示.
2. 用语言表示,但语言要明白无误.
3. 用随机变量表示.

在实际问题中,哪一种表示法方便就用哪一种.

1.1.5 事件间的关系

下面的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω(即同一个随机现象)中进行. 事件间的关系与集合间关系一样主要有以下几种:

一、包含关系

如果属于 A 的样本点必属于 B,则称 A 被包含在 B 中(见图 1.1.2),或称 B 包含 A,记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$. 用概率论的语言说:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

譬如掷一颗骰子,事件 $A=$“出现 4 点”的发生必然导致事件 $B=$“出现偶数点”的发生,故 $A\subset B$.

又如电视机的寿命 T 超过 10 000 h(记为事件 $A=\{T>10\ 000\}$)和 T 超过 20 000 h(记为事件 $B=\{T>20\ 000\}$),则 $A\supset B$,见下图.

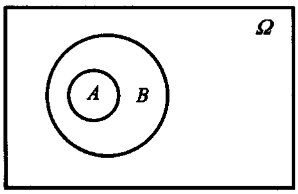

图 1.1.2 $A\subset B$

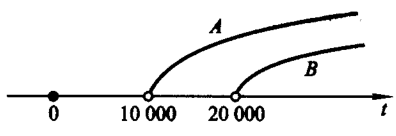

图 1.1.3 $\{T>10\ 000\}\supset\{T>20\ 000\}$

对任一事件 A,必有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

二、相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足:属于 A 的样本点必属于 B,而且属于 B 的样本

点必属于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

从集合论观点看，两个事件相等就意味着这两事件是同一个集合．下例说明：有时不同语言描述的事件也可能是同一件事．

例 1.1.7 (1) 掷两颗骰子，以 A 记事件"两颗骰子的点数之和为奇数"，以 B 记事件"两颗骰子的点数为一奇一偶"．很容易证明：A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生也必然导致 A 发生，所以 $A = B$.

(2) 口袋中有 a 只黑球，b 只白球（a 与 b 都大于零），从中不返回地一只一只摸球．以 A 记事件"最后摸出的几个球全是黑球"，以 B 记事件"最后摸出的一只球是黑球"．对于此题粗看好像是 $A \neq B$，但只要设想将球全部摸完为止，则明显有：A 发生必然会导致 B 发生，即 $A \subset B$；反之注意到事件 A 中所述的"几个"最少是 1 只，也可以是 2 只，…，最多为 a 只，则 B 发生时 A 也必然会发生（对于这点请读者仔细体会），即 $B \subset A$，由此得 $A = B$.

三、互不相容

如果 A 与 B 没有相同的样本点（见图 1.1.4），则称 A 与 B 互不相容．用概率论的语言说：A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生．

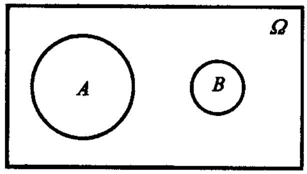

图 1.1.4　A 与 B 互不相容

如在电视机寿命试验中，"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生．

1.1.6　事件运算

事件的运算与集合的运算相当，有并、交、差和余等四种运算．

一、事件 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$．其含义为"由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件"（见图 1.1.5）．或用概率论的语言说："事件 A 与 B 中至少有一个发生"．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A = "出现奇数点" $= \{1,3,5\}$，记事件 B = "出现的点数不超过 3" $= \{1,2,3\}$，则 A 与 B 的并为 $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

二、事件 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，或简记为 AB．其含义为"由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件"（见图 1.1.6）．或用概率论的语言说："事件 A 与 B 同时发生"．

如在掷一颗骰子的试验中，记事件 A = "出现奇数点" $= \{1,3,5\}$，记事件 B = "出现的点数不超过 3" $= \{1,2,3\}$，则 A 与 B 的交为 $AB = \{1,3\}$.

若事件 A 与 B 为互不相容，则其交必为不可能事件，即 $AB = \varnothing$，反之亦然．这表明：$AB = \varnothing$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com