科学版

研究生教学丛书

# 矩阵理论

苏育才　姜翠波　张跃辉 编

3

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

# 矩 阵 理 论

苏育才 姜翠波 张跃辉 编

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书共分 12 章，主要介绍线性空间与线性变换、内积空间与等距变换、特征值与特征向量、$\lambda$-矩阵与 Jordan 标准形、特殊矩阵、矩阵分析初步、矩阵函数的应用、矩阵的分解、非负矩阵、矩阵的广义逆、Kronecker 积.

本书适合工科研究生及从事工程的专业技术人员.

**图书在版编目(CIP)数据**

矩阵理论/苏育才，姜翠波，张跃辉编. —北京：科学出版社，2006
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 7-03-016355-9

I. 矩… II. ①苏… ②姜… ③张… III. 矩阵 -理论 -研究生-教材
IV. O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 119075 号

责任编辑：姚莉丽 祖翠娥／责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006 年 1 月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：1—5 000 字数：293 000

**定价：25.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

# 前　言

本书是为工科硕士研究生“矩阵理论”课程编写的教材. 在此之前我们所用的教材是根据我校规定的 36 学时的要求而编写的. 由于只有 36 学时的讲授时间, 教材在内容和深度上都要受到一定的限制, 如矩阵分析方面的内容介绍的偏少. 现在,“矩阵理论”课调整为 45 学时, 原来的教材已不能满足目前教学的需要. 另外, 随着与矩阵理论有着密切联系的其他学科的发展, 矩阵理论近年来在内容上也有相当大的更新. 因此, 编写一本新的矩阵理论教材很有必要.

本书较全面、系统地介绍了矩阵理论的基本内容、方法及在其他学科的一些常见的应用. 编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂, 尽可能满足不同专业工科研究生学习的需要.

在编写过程中, 我校研究生院和数学系的领导及同事们均给我们以很大的鼓励和支持, 编者在此一并表示深深的感谢!

由于时间仓促，加之编者水平所限，肯定有不少谬误和不足之处，敬请批评、指正.

编　者

2003 年 8 月于上海交通大学

# 主要符号表

| | |
|---|---|
| $(A)_{ij}$ | 矩阵 $A$ 在第 $i$ 行与第 $j$ 列交叉位置的元素 |
| $(A)_{(i)}$ | 矩阵 $A$ 的第 $i$ 行 |
| $(A)^{(j)}$ | 矩阵 $A$ 的第 $j$ 列 |
| $\mathrm{rs}(A)$ | 矩阵 $A$ 的行展开 |
| $\mathrm{cs}(A)$ | 矩阵 $A$ 的列展开 |
| $A^{\mathrm{T}}$ | 矩阵 (或向量)$A$ 的转置 |
| $A^*$ | 矩阵 (或向量)$A$ 的共轭转置<br>也表示矩阵 $A$ 的伴随矩阵 |
| $A>0$ | 矩阵 $A$ 的所有元素均大于零<br>也表示 $A$ 为正定矩阵 |
| $A\geqslant 0$ | 矩阵 $A$ 的所有元素均大于或等于零<br>也表示 $A$ 为半正定矩阵 |
| $\mathrm{adj}A$ | 矩阵 $A$ 的伴随矩阵 |
| $r(A)$ | 矩阵 $A$ 的秩 |
| $\mathrm{tr}A$ | 矩阵 $A$ 的迹 |
| $\lambda(A)$ | 矩阵 $A$ 的谱 |
| $\rho(A)$ | 矩阵 $A$ 的谱半径 |
| $\|\|\|A\|\|\|$ | 矩阵 $A$ 的范数 |
| $\|\|A\|\|_1, \|\|A\|\|_2, \|\|A\|\|_\infty$ | 矩阵 $A$ 的 $l_p$ 范数 $(p=1,2,\infty)$ |
| $\|A\|$ | 矩阵 $A$ 的行列式 |
| $\det A$ | 矩阵 $A$ 的行列式 |
| $A\otimes B$ | 矩阵 $A$ 与 $B$ 的 Kronecker 积 |
| $A\binom{i_1\cdots i_k}{j_1\cdots j_k}$ | 矩阵 $A$ 的 $k$ 阶子式 (行标为 $i_1,\cdots,i_k$ 列标为 $j_1,\cdots,j_k$) |
| $N(A)$ | 矩阵 $A$ 的零空间 |
| $R(A)$ | 矩阵 $A$ 的列空间 (象空间) |
| $N(A^{\mathrm{T}})$ | 矩阵 $A$ 的左零空间 (矩阵 $A^{\mathrm{T}}$ 的零空间) |
| $R(A^{\mathrm{T}})$ | 矩阵 $A$ 的行空间 (矩阵 $A^{\mathrm{T}}$ 的象空间) |
| $H_A$ | 矩阵 $A$ 的 Hermite 标准型 |
| $J$ | 矩阵的 Jordan 标准型 |
| $D_k(\lambda)$ | 矩阵的 $k$ 阶行列式因子 |
| $d_k(\lambda)$ | 矩阵的 $k$ 阶不变因子 |
| $J_k(\lambda)$ | 对角线为 $\lambda$ 的 $k$ 阶标准 Jordan 块 |

| | |
|---|---|
| $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ | 对角线元为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵 |
| $e_{(i)}$ | $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 第 $i$ 个分量为一的基本行向量 |
| $e^{(j)}$ | $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 第 $j$ 个分量为一的基本列向量 |
| $E_{ij}$ | 位置在 $(i,j)$ 处为一其余位置为零的矩阵 |
| | 也表示交换单位矩阵的第 $i$ 行与第 $j$ 行所成的初等矩阵 |
| $E, E_m$ | $m$ 阶单位矩阵 |
| $A_k, B_k, P_k, Q_k$ | 都是指 $k$ 阶方阵 |
| $r(\sigma)$ | 线性变换 $\sigma$ 的秩 |
| $\eta(\sigma)$ | 线性变换 $\sigma$ 的零度 |
| $\mathrm{Im}\sigma$ | 线性变换 $\sigma$ 的象空间 |
| $\mathrm{Ker}\sigma$ | 线性变换 $\sigma$ 的核空间 |
| $\mathbb{R}^n$ | 实数域上 $n$ 维有序数组构成的线性空间 |
| $\mathbb{C}^n$ | 复数域上 $n$ 维有序数组构成的线性空间 |
| $\mathbb{F}^n$ | 数域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 维有序数组构成的线性空间 |
| $M_n, M_n(\mathbb{F})$ | 数域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 阶方阵全体 |
| $\mathbb{R}^{m\times n}$ | 全体 $m\times n$ 型实矩阵构成的线性空间 |
| $\mathbb{C}^{m\times n}$ | 全体 $m\times n$ 型复矩阵构成的线性空间 |
| $\mathbb{F}^{m\times n}$ | 数域 $\mathbb{F}$ 上全体 $m\times n$ 型矩阵构成的线性空间 |
| $C_{[a,b]}$ | 区间 $[a,b]$ 上全体实变量连续函数构成的线性空间 |
| $\mathrm{dim}V$ | 线性空间 $V$ 的维数 |
| $W^{\perp}$ | 子空间 $W$ 的正交补 |
| $V_\lambda$ | 由对应于特征值 $\lambda$ 的特征向量生成的特征子空间 |
| $\mathrm{Hom}(V,W)$ | 由线性空间 $V$ 到 $W$ 的线性变换全体构成的集合 |
| $\mathrm{End}V$ | 由线性空间 $V$ 到自身的线性变换全体构成的集合 |
| $1_V$ | 线性空间 $V$ 上的恒等变换 (单位变换) |
| $0_V$ | 线性空间 $V$ 上的零变换 |
| $(x,y)$ | 向量 $x$ 与向量 $y$ 的内积 |
| $x\perp y$ | 向量 $x$ 与向量 $y$ 正交 (垂直) |
| $[\alpha_1,\cdots,\alpha_k]$ | 由向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 生成的子空间 |
| $\delta_{ij}$ | Kronecker 符号, 即 $\delta_{ij}=1$ 如果 $i=j$; $\delta_{ij}=0$ 如果 $i\neq j$ |
| $\mathrm{Re}(\lambda)$ | 复数 $\lambda$ 的实部 |
| $\mathrm{Im}(\lambda)$ | 复数 $\lambda$ 的虚部 |
| $\Longleftrightarrow$ | 充分必要条件 |
| $\forall$ | 对所有 |
| $\exists$ | 存在有 |
| $\square$ | 证毕 |

# 目　录

# 第1章 矩　　阵

本章复习矩阵的基本性质. 除非特别说明, 一切讨论均假定是在复数域上进行的.

## 1.1 矩阵的概念

由 $mn$ 个复数 $a_{ij}$(其中 $i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$) 构成的长方形阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m$ 行 $n$ 列的矩阵, 或 $m\times n$ 矩阵, 它共有 $m$ 个行和 $n$ 个列.

行数 $m$ 与列数 $n$ 相同的矩阵称为 $n$ 阶方阵.

行数或列数为 1 的矩阵也称为行向量或列向量.

矩阵的每一个元素 $a_{ij}$ 有两个下标, 第一个表示它所在的行数, 第二个表示它所在的列数.

对方阵而言:

两个下标相等的元素称为主对角线上的元素, 简称为对角元素;

除对角元素外其余元素均为 0 的方阵称为对角矩阵;

主对角线以下均为 0 的矩阵称为上三角矩阵;

主对角线以上均为 0 的矩阵称为下三角矩阵;

关于主对角线对称, 即满足条件 $a_{ij}=a_{ji}$ 的矩阵, 称为对称矩阵;

满足条件 $a_{ij}=-a_{ji}$ 的矩阵, 称为反对称矩阵, 此时显然有 $a_{ii}=0$, 即主对角线为 0.

复数域 $\mathbb{C}$ 上 $m\times n$ 矩阵全体常常记为 $\mathbb{C}^{m\times n}$, 一般地, 数域 $\mathbb{F}$ 上 $m\times n$ 矩阵全体记为 $\mathbb{F}^{m\times n}$.

**定义 1.1.1** 设 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $A$ 的转置矩阵, 记为 $A^{\mathrm{T}}$, 它是将 $A$ 的第 $i$ 行变成第 $i$ 列, 第 $j$ 列变成第 $j$ 行后得到的矩阵.

两个矩阵 $A$ 与 $B$ 称为相等的, 记为 $A = B$, 如果它们的行数与列数均分别相等 (这样的两个矩阵称为是同类型的), 并且对应同行、同列的元素也相等.

**定义 1.1.2**　两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m\times n}$ 之和 $A+B$ 是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

不难验证, 如上定义的矩阵的加法运算具有和复数加法相同的性质, 即交换律、结合律、零矩阵 (0, 即元素均为 0 的矩阵) 及负矩阵 ($A = (a_{ij})$ 的负矩阵定义为矩阵 $(-a_{ij})$, 记为 $-A$). 具有此四种性质的集合 (连同该运算) 称为一个加群, 是一类基本的代数系统, 具有广泛的理论意义和应用价值. 显然, 零矩阵 0 及一个矩阵的负矩阵均是唯一的. 请注意, 我们经常不加区分地使用符号 "0", 在不同的场合, 它可能表示不同的 "0", 如数 0、矩阵 0 或者 0 向量.

借助于负矩阵, 可以定义加法的逆运算 — 减法, 即 $A - B = A + (-B)$. 矩阵的减法运算具有和复数减法相同的性质.

**定义 1.1.3**　复数 $\lambda$ 和 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的纯量积 (或数量积, 或数乘)$\lambda \cdot A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

为简单计, 一般将纯量积 $\lambda \cdot A$ 简写为 $\lambda A$.

纯量积有下面的性质: 设 $\lambda, \mu$ 是复数, $A$ 和 $B$ 均是 $m \times n$ 矩阵, 则

(A1) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

(A2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(A3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

(A4) $1 \cdot A = A, (-1) \cdot A = -A$;

(A5) $\lambda A = 0$ 当且仅当 $\lambda = 0$ 或 $A = 0$.

矩阵的加减法与纯量积与复数的加减法和乘法本质上无任何差别. 以下定义矩阵的乘法.

**定义 1.1.4**　一个 $m \times p$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times p}$ 与一个 $p \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})_{p\times n}$ 的乘积 $AB$ 是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

注意矩阵的乘法规则表明, 只有当矩阵 $A$ 的列数等于矩阵 $B$ 的行数时, 乘积 $AB$ 才有意义. 此时, 乘积矩阵 $AB$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素是矩阵 $A$ 的第 $i$ 行与矩阵 $B$ 的第 $j$ 列的相应位置的元素乘积之和. 因此, 前一个因子 $A$ 的第 $i$ 行的元素出现且只出现于乘积矩阵的第 $i$ 行中, 后一个因子 $B$ 的第 $j$ 列的元素出现且只出现于乘积矩阵的第 $j$ 列中, 这就是矩阵乘法的所谓 "左行右列" 原则. 如下所示:

$$\begin{bmatrix} \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & & & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

**例 1.1.1** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+2\times5+3\times9 & 1\times2+2\times6+3\times0 & 1\times3+2\times7+3\times1 & 1\times4+2\times8+3\times2 \\ 4\times1+5\times5+6\times9 & 4\times2+5\times6+6\times0 & 4\times3+5\times7+6\times1 & 4\times4+5\times8+6\times2 \\ 7\times1+8\times5+9\times9 & 7\times2+8\times6+9\times0 & 7\times3+8\times7+9\times1 & 7\times4+8\times8+9\times2 \\ 0\times1+1\times5+2\times9 & 0\times2+1\times6+2\times0 & 0\times3+1\times7+2\times1 & 0\times4+1\times8+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 & 14 & 20 & 26 \\ 83 & 38 & 73 & 68 \\ 128 & 62 & 86 & 110 \\ 23 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

矩阵的乘法有下述性质:

(M1) 结合律: 设 $A, B, C$ 分别为 $m\times p$, $p\times q$, $q\times n$ 矩阵, 则 $(AB)C = A(BC)$;

(M2) 加乘分配律: 设 $A, B$ 均为 $m\times n$ 矩阵, $C, D$ 分别为 $n\times p$, $q\times m$ 矩阵, 则

$$(A+B)C = AC+BC, \quad D(A+B) = DA+DB.$$

一般地, 将满足条件 (M1)的集合 (连同所涉及的运算) 称为半群, 如果该集合在该运算下封闭.

(M3) 数乘交换律: 设 $\lambda$ 是复数, $A, B$ 分别为 $m\times p$ 矩阵和 $p\times n$ 矩阵, 则有

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

(M4) 单位元：$n$ 阶方阵

$$E = E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 $n$ 阶单位矩阵, 它的对角元素均是 1, 其余元素均为 0. 对 $m \times n$ 矩阵 $A$, 有

$$E_m A = AE_n = A.$$

与复数乘法不同, 矩阵乘法一般来说是不可交换的, 并且非零矩阵的乘积可以等于零矩阵. 例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵的转置也可以看成是矩阵的一种运算 (一元运算), 它和其余运算的关系如下：

(1) 设 $A, B$ 均为 $m \times n$ 矩阵, 则 $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\lambda$ 是复数, 则 $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$.

(3) 设 $A, B$ 分别为 $m \times p$ 矩阵与 $p \times n$ 矩阵, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

方阵是最重要的一类矩阵. $n$ 阶方阵的全体构成的集合记为 $M_n$, 或更确切地, $M_n(\mathbb{F})$, 其中 $\mathbb{F}$ 是矩阵元素所属的代数系统, 一般为某数域, 本书中主要是指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 显然, 在 $M_n$ 中, 加法、乘法均封闭, 且满足条件 (A1)~(A4), (M1) 与 (M2). 这样的代数系统称为环, 并且 $n$ 阶单位矩阵 $E = E_n$ 是 $M_n$ 关于乘法的单位元素, 即对任意 $A \in M_n$, 有 $EA = AE = A$. 于是, 带有两种运算 (矩阵加法与矩阵乘法) 的集合 $M_n$ 是有单位元的环, 称为 (复数域上的) 全矩阵环.

在 $n$ 阶方阵的运算中, 使用下述 $n^2$ 个特殊矩阵 $E_{ij}$(称为基本矩阵), $1 \leqslant i \leqslant n$, 常常是方便的, 其中 $E_{ij}$ 是第 $i$ 行第 $j$ 列元素为 1, 其余元素均为 0 的矩阵. 借助于这些矩阵, 任意方阵 $A = (a_{ij})$ 均能唯一地表示成

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}E_{11} + \cdots + a_{1n}E_{1n} + \cdots + a_{n1}E_{n1} + \cdots + a_{nn}E_{nn} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}. \end{aligned}$$

于是方阵的加法与纯量积可以写为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})E_{ij},$$
$$\lambda \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda a_{ij})E_{ij}.$$

对于矩阵乘法的表达, 可以利用下述性质:

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}, \qquad 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n,$$

其中 $\delta_{jk}$ 是所谓 Kronecker 符号, 即

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此, 若 $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, $B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}$, 则

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}E_{ij})\left(\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}E_{kl}\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (a_{ij}E_{ij})(b_{kl}E_{kl}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (a_{ij}b_{kl})(E_{ij}E_{kl}) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (a_{ij}b_{kl})(\delta_{jk}E_{il}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\delta_{jk}a_{ij}b_{kl})E_{il} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)E_{ij}, \end{aligned}$$

即乘积 $AB$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素等于 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, 这正是矩阵乘法的定义.

由于矩阵乘法的特殊性, 对 "左行右列" 规则需进一步理解. 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵, 分别以 $A^{(j)}$, $A_{(i)}$ 表示 $A$ 的第 $j$ 列和第 $i$ 行, 则有

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)}.
\end{aligned}
$$

这就是说, 矩阵乘一个列向量, 其结果是将该矩阵的列进行线性组合, 组合系数即是该列向量的对应元素. 类似地,

$$
(y_1\ y_2\ \cdots\ y_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = y_1 A_{(1)} + y_2 A_{(2)} + \cdots + y_m A_{(m)},
$$

即一个行向量左乘一个矩阵, 其结果是将该矩阵的行进行线性组合, 组合系数即是该行向量的对应元素. 由此即可得到两个矩阵的乘积的行向量与列向量结构.

设 $C = AB$, 则

$$
C^{(j)} = AB^{(j)}, \qquad C_{(i)} = A_{(i)}B, \tag{1.1.1}
$$

即

(1) 矩阵 $C$ 的第 $j$ 列是 $A$ 的列向量的线性组合, 组合系数恰为矩阵 $B$ 的第 $j$ 列的相应元素;

(2) 矩阵 $C$ 的第 $i$ 行是 $B$ 的行向量的线性组合, 组合系数恰为矩阵 $A$ 的第 $i$ 行的相应元素.

特别, 如果用 $e^{(j)}$ 表示第 $j$ 个标准单位列向量, $e_{(i)}$ 表示第 $i$ 个标准单位行向量, 则

$$
Ae^{(j)} = A^{(j)}, \qquad e_{(i)}A = A_{(i)}.
$$

按照这样的理解, 许多矩阵的乘积以及和矩阵乘法相关的一些性质变得显而易见.

**例 1.1.2** (1)
$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix};
$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & ba_{12}+a_{13} & -ca_{13} \\ a_{22} & ba_{22}+a_{23} & -ca_{23} \\ a_{32} & ba_{32}+a_{33} & -ca_{33} \end{bmatrix}.$$

**例 1.1.3** 讨论 $AB=0$ 的意义.

**解** (1) 由于 $AB^{(j)}=0$, 故此时 $B$ 的每个列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量.

(2) 同理, 由于 $A_{(i)}B=0$, 故 $A$ 的每个行向量都是齐次线性方程组 $y^{\mathrm{T}}B=0$ 的解向量或 $B^{\mathrm{T}}y=0$ 的解向量.

**例 1.1.4** 讨论线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件.

**解** 在《线性代数》中, 我们学到: 方程 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 $r(A)=r(A,b)$. 下面, 我们从另一角度来考虑:

(1) 首先, 如果方程有解, 则向量 $b$ 是矩阵 $A$ 的列向量的线性组合.

(2) 反之, 如果 $b$ 是矩阵 $A$ 的列向量的线性组合, 则组合系数构成方程的一个解向量.

故方程有解的充要条件是: $b$ 是系数矩阵 $A$ 的列的线性组合.

特别地, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解当且仅当 $A$ 的列向量线性相关, 有唯一解 (即零解) 当且仅当 $A$ 的列向量线性无关.

由于方阵可以自乘, 故可归纳地定义方阵的幂. 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵, 记

$$A^0=E,\ A^k=A^{k-1}A(\text{即 } k \text{ 个 } A \text{ 的乘积}),\qquad k=1,2,\cdots.$$

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 是一个复系数多项式, 称

$$a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

为方阵 $A$ 的多项式, 记为 $f(A)$, 它显然仍是一个 $n$ 阶方阵. 容易验证, 同一方阵的两个多项式是可以交换的, 即若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_lx^l$, 则 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

与一个 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 密切相关的数, 当属其行列式 $|A|$(有时也记为 $\det A$), 它具有性质 $|AB|=|A||B|$. 另一个与方阵 $A$ 密切相关的数是它的迹 $\mathrm{tr}A$, 即 $A$ 的对角线元素之和 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$. 不难证明迹的下列基本性质:

(1) 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵, 则 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$;

(2) 设 $\lambda$ 是数, $A$ 是方阵, 则 $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda(\mathrm{tr}A)$;

(3) 设 $A$, $B$ 分别为 $m\times n$ 型和 $n\times m$ 型矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;

(4) $\mathrm{tr}A^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}A$;

(5) 若 $A$ 为实数矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AA^{\mathrm{T}})=0$ 当且仅当 $A=0$,

其中性质 (5) 是因为 $AA^{\mathrm{T}}$ 的第 $j$ 个对角线元素为 $\sum_{k=1}^n a_{jk}^2$.