高等学校教材

概率论与数理统计

梅顺治 主编

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

高等学校教材

概率论与数理统计

主　编　梅顺治

副主编　肖开允　唐湘晋　王展青

武汉理工大学出版社

·武汉·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/梅顺治主编.—武汉:武汉理工大学出版社,2003.8
ISBN 7-5629-1987-9

Ⅰ.概… Ⅱ.梅… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

【内容提要】

本书主要讲述概率论与数理统计的基本知识。内容由概率论、数理统计两部分组成,前一部分内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布与极限定理等,后一部分内容包括样本、统计量及其分布、参数估计、假设检验、线性回归分析与方差分析等。每章配有较多例题并附有大量习题,书末附有习题参考答案。

本书可以作为高等学校各类专业(数学及与数学相关专业外)的概率论与数理统计课程的教材,也可供工程技术人员、管理技术人员参考。

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码:430070)
经 销 者:各地新华书店
印 刷 者:武汉理工大印刷厂
开　　本:787×960　1/16
印　　张:15.75
字　　数:302千字
版　　次:2003年8月第1版
印　　次:2003年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-5629-1987-9/O·75
印　　数:1～8000册
定　　价:19.50元

前　　言

本书是作为高等学校工科类、经济类、管理类及其他非数学、统计学专业开设的概率论与数理统计基础课教材。该教材是根据国家高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的“概率论与数理统计课程基本要求”及编者多年的教学实践体会编写的。它也可以作为读者自学本课程的读物,以及相关教学的参考书。

概率论与数理统计是一门很重要的随机数学基础课,尤其数理统计部分具有广泛的应用性。虽然学习该课程的读者主要着眼于其应用,但作为提高大学生文化素养,学习随机数学的思想与方法的基础理论课的教材,如写成简单的方法手册式的读本,我们认为是不可取的。例如第1章是该课程最基础的内容,概念公式多,理论性强,蕴涵一些重要概率统计思想,我们并没有采用简化的处理方式,而是对一些重要的概念,作了较多的直观说明和解释。在全书的编写方法上,我们力求体现本门课程的特点,对传统的编排结构进行了若干改变。我们坚持对基本概念叙述严谨,同时又力求全书叙述通俗易懂,尽可能通过实例让读者理解各种概率统计的思想与方法的实际背景及意义。

使用本教材授课学时数为48～54。若在教学过程中受到学时数的限制,可以根据实际情况对教材的内容进行适当的取舍。本书的第1章至第4章,是全书的重点,为读者提供必要的理论基础,我们认为,在教学中这部分内容不宜过多削减。打 * 号的内容可以不作要求。

本书分章、节、段叙述,例如“1.5.2”表示第1章第5节第2段。书中的定义、定理、图、表按章编写序号,书中的公式按章、节编写序号,例如“(4.3.2)”表示第4章第3节第2个公式。

本书是在武汉理工大学数学系、统计学系的支持和帮助下,由梅顺治编写第1、4章,肖开允编写第2、3章,唐湘晋编写第5、6章,王展青编写第7、8章,并由梅顺治统稿,定稿完成。在编写中得到了数学系和统计学系的同仁们的鼓励与帮

助，出版社对本书的出版给予了大力的支持与帮助，在此谨表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中的缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2003年5月

目　　录

1 随机事件及其概率

在自然界和人类社会里所发生的多种多样现象中，有的现象在一定条件下必然出现相同的结果，例如在标准大气压下水加热到100℃时一定沸腾，同性电荷一定相互排斥等等，这类现象称为确定性现象. 然而还有许多现象与确定性现象相反，在一定条件下出现的结果不止一个，至于哪一个出现，人们事先并不知道，例如掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，至于哪一面出现，事先并不知道；掷一粒骰子，可能出现1点到6点中的某一个；双休日进入某超市的顾客人数事先是不知道的；用一台仪器多次测量某一物理量，所得到的结果并不都是相同的等等，这类现象称为随机现象.

很多随机现象是可以重复出现的，如抛一枚硬币；测量某一物理量；统计双休日去某超市的顾客人数，可以多次进行. 人们经过长期实践并深入研究之后发现，对随机现象作大量地重复试验或观测，其结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复掷一枚硬币，发现出现正面次数与总抛掷次数之比总是非常接近于一个数0.5，即人们常说的掷一枚硬币出现正面与出现反面的机会相等. 这种在大量重复试验或观测中，随机现象所呈现出的客观规律性，称为统计规律性.

概率论与数理统计是研究、揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

1.1 随机试验

1.1.1 随机试验

在研究随机现象的统计规律性时，做各种各样的科学实验，对事物的某一特征进行观测. 我们将这些实验、观测等统称为试验. 若试验具有以下特点：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验出现的可能结果不止一个,但事先能确定试验出现的所有可能结果;

(3)每次试验出现的结果事先不能预知.

则称之为**随机试验**,在后面的叙述中,我们简称为**试验**并记为E,例如掷一枚硬币就是一个试验.

【例1.1】 试验的例子:

(1)E_1:掷一粒正立方体的骰子,观察出现的点数;

(2)E_2:将一枚硬币连续抛掷两次,观察正面(H)、反面(T)出现的情况;

(3)E_3:将一枚硬币连续抛掷两次,记录其正面出现的次数;

(4)E_4:记录一天内进入某超市的顾客人数;

(5)E_5:测试某种电子元件的寿命(从开始使用到第一次维修的时间);

(6)E_6:测量某物理量,记录其误差;

(7)E_7:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

1.1.2 样本空间

对于随机试验E,由于它的所有可能出现结果是明确的,则我们称E的所有可能结果的全体为随机试验E的**样本空间**,记为Ω,即Ω是以试验的每一个可能结果作为元素的集合,我们可以用集合的形式表示Ω.样本空间Ω中的元素称为**样本点**.

【例1.2】 写出例1.1中试验的样本空间.

设Ω_k表示试验E_k的样本空间($k=1,\cdots,7$),则有

(1)$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$;

(2)$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$(“HT”表示第一、二次掷得的结果是正面、反面);

(3)$\Omega_3=\{0,1,2\}$;

(4)由于不能确定一天进入超市的最多人数,则用全体非负整数来表示Ω_4,这也是数学处理方便的需要.则$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,10^5,\cdots\}$;

(5)$\Omega_5=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$;

(6)$\Omega_6=\{x\,|\,-\infty<x<\infty\}$;

(7)$\Omega_7=\{(x,y)\,|\,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$,其中$x$、$y$分别表示最低温度和最高温度,$T_0$和$T_1$分别表示温度的最小值和最大值.

值得注意的是,样本空间由试验以及试验的目的所确定.例如,例1.1中E_2和E_3两个试验同是将一枚硬币连续抛掷两次,但由于试验的目的不同,则它们的样本空间Ω_2与Ω_3(例1.2)也不同.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件

试验的每一种可能结果称之为**随机事件**，简称为**事件**，通常用字母A，B，C，…表示. 例如在掷一粒骰子试验E_1(例1.1)中设A表示“出现奇数点”，B表示“出现的点数不小于5”，C表示“出现2点”，则A、B、C都是事件，不难看出它们可以用Ω的子集表示，如：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{5,6\}$，$C=\{2\}$，当试验E_1出现1点时，我们说事件A发生，事件B不发生，事件C不发生，如果说事件B发生了，则表示掷一粒骰子出现的点数为5或6.

一般称试验E的样本空间Ω的子集$A(A\subset\Omega)$为E的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当A中的一个样点出现时，称事件A发生. 特别地，事件A是由一个样点构成的单点集，称A为**基本事件**. 例如$C=\{2\}$就是一个基本事件，又例如试验E_2(例1.1，例1.2)有4个基本事件$\{HH\}$、$\{HT\}$、$\{TH\}$、$\{TT\}$. 任何一个样本空间Ω都有“最大”子集Ω自身和一个“最小”子集空集$\varnothing$，称Ω为必然事件，它在每次试验必然发生；称$\varnothing$为不可能事件，它在每次试验中必然不发生. 如掷一粒骰子，“出现点数不大于6”是一个必然事件；“出现点数大于6”是一个不可能事件.

【例1.3】 事件的例子：

在E_2中，$A=\{HH,HT,TH\}$表示事件“至少出现一个正面H”；

在E_4中，$B=\{420,421,\cdots\}$表示事件“一天进入超市人数不少于420人”；

在E_5中，$C=\{t\mid t\geqslant 1000\}$表示事件“寿命不小于1000小时”；

在E_6中，$D=\{x\mid -0.5<x<0.5\}$表示事件“测量误差在正负0.5之间”.

1.2.2 事件之间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因此可以应用集合论中集合之间的关系以及集合的运算来讨论事件之间的关系以及事件之间的运算，但我们特别要注意，这些关系与运算在概率论中的提法以及在概率论中的含义.

设试验E的样本空间为Ω；A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$为事件.

(1)事件的包含(图1.1)：若$A\subset B$，则称事件B包含事件A，或称事件A被事件B包含，这时，事件A的发生必然导致事件B的发生.

若$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$.

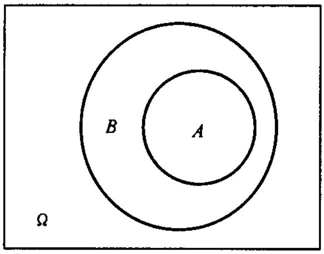


图1.1

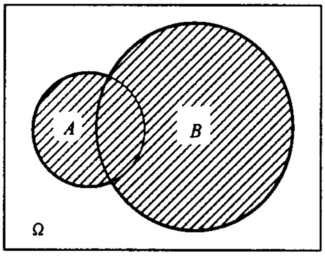


图1.2

(2)事件的并(和)(图 1.2):事件$\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为事件A与事件B的并(和),记为$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或$\omega\in B\}$,这时,$A\cup B$ 发生当且仅当A,B 中至少有一个发生.

类似地,称事件$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并(和),这时,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生当且仅当n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生.

称事件$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为事件序列$A_1,A_2,\cdots$的并(和),这时,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生当且仅当为事件序列A_1,$A_2,\cdots$中至少有一个发生.

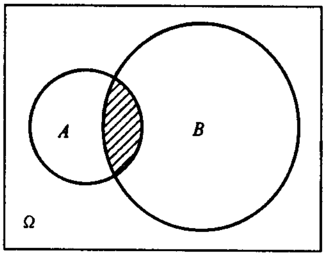


图1.3

(3)事件的交(积)(图 1.3):事件$\{\omega|\omega\in A$ 且$\omega\in B\}$称为事件A与事件B的交(积),记为$A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$,这时,$A\cap B$ 发生当且仅当A,B 同时发生,一般$A\cap B$ 简记为AB.

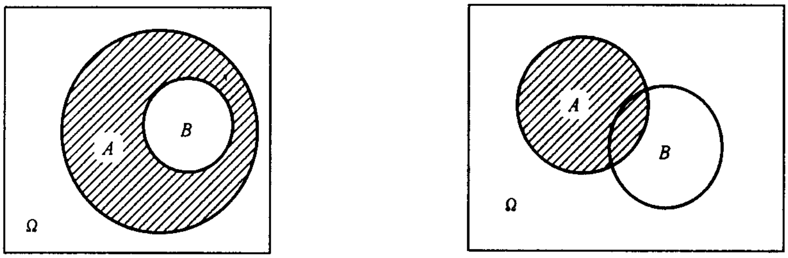
类似地,称事件$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots$,$A_n$的交(积),这时,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生当且仅当n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生;

称事件$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为事件序列$A_1,A_2,\cdots$的交(积),$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生当且仅当事件A_1,$A_2,\cdots$同时发生.

(4)事件A对B的差(图1.4):事件$\{\omega|\omega\in A$ 且$\omega\notin B\}$ 称为事件A对事件B的差,记为$A-B=\{\omega|\omega\in A$ 或$\omega\notin B\}$,这时,$A-B$ 发生当且仅当A发生且B不发生.

(5)事件的互不相容性(图1.5):若$A\cap B=\varnothing(AB=\varnothing)$,则称事件$A$与事件$B$互不相容或互斥,这时,$A\cap B=\varnothing(AB=\varnothing)$当且仅当$A$与$B$不同时发生.任意两个基本事件是互不相容的.

如n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中任意两个事件$A_i,A_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$是互不相容



(a) (b)

图1.4

的，则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容.

(6)对立事件(图1.6)：若 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$，则称事件 B 是事件 A 的对立事件，记为 $B = \overline{A}$，对立事件是相互的，A 的对立事件为 B，则 B 的对立事件是 A，即 $\overline{(\overline{A})} = A$. 在每次试验中，事件 A，$\overline{A}$ 中必有一个且仅有一个发生.

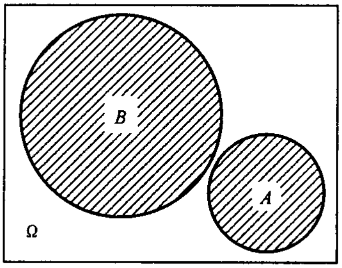


图1.5

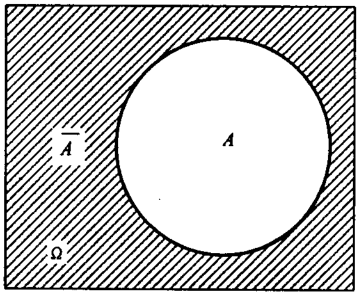


图1.6

显然有：$\overline{A} = \Omega - A$，$A - B = A\,\overline{B}$.

以上事件之间关系与事件的运算对照于集合论中对集合的表述列表如表1.1.

表1.1

符　号	集合论	概率论
Ω	空间	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	Ω 中的点(元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集 A 是 B 的子集	事件 B 包含 A
$A = B$	集 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集 A 与 B 的并(或和)	事件 A 与 B 至少有一个发生
$A \cap B$	集 A 与 B 的交	事件 A 与 B 同时发生
$A - B$	集 A 与 B 的差集	事件 A 发生且 B 不发生
$\overline{A}$	集 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A \cap B = \varnothing$	集 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

1.2.3 事件运算性质

设A,B,C为事件，由集合的运算性质，即得事件的运算性质如下

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{B}\cap\overline{A}$；

$\overline{A\cap B}=\overline{B}\cup\overline{A}$.

设$A_1,A_2,\cdots,A_n,B$为事件，则有

分配律：$B\cup(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$；

$B\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$.

德·摩根律：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

【例1.4】 设A,B,C为三个事件，则

(1)事件“A与B发生，C不发生”可表为$AB\overline{C}$；

(2)事件“A,B,C中至少有两个发生”可表为$AB\cup AC\cup BC$；

(3)事件“A,B,C中恰好发生两个”可表为$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(4)事件“A,B,C中至多有一个发生”可表为$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$；

(5)事件“A,B,C中至多有两个发生”可表为$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

1.3 事件的概率

我们知道，一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生．但人们往往更感兴趣的是随机事件发生的可能性大小．随机事件发生的可能性是有大小之别的，是可设法度量的．事实上，一些术语如市场占有率、中签率、废品率、命中率等都是用0到1之间的一个数(比率)来表示一个随机事件发生的可能性大小，这种比率就是概率的原形，即频率.

1.3.1 频率

定义1.1 在相同的条件下,进行n次试验,如在n次试验中事件A发生的次数为n_A,则比值$\frac{n_A}{n}$称为事件A发生的频率,记为$f_n(A)$,其中n_A称为事件A发生的频数.

由定义,不难证明,对固定的n频率具有以下基本性质:

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)$f_n(\Omega)=1$;

(3)若事件$A_1,A_2,\cdots,A_k$两两互不相容,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i) \tag{1.3.1}$$

当n固定时,由定义1.1可知:$f_n(A)$较大,必有n_A较大,这说明事件A发生较频繁,意味着A在一次试验中发生可能性就较大,反之亦然.因而,在许多实际问题中很直观地用频率$f_n(A)$来描述事件A在一次试验中发生的可能性的大小.例如:在足球比赛中,罚点球是一个扣人心弦的场面,记A为"罚点球射中且进球门",则A是一个随机事件.曾经有人对1930年至1988年世界各地53274场重大足球比赛作了统计,在判罚的15382个点球中,有11172个射进球门,则频率为$f_n(A)=11172/15382=0.726(n=15382)$,于是足球人士称罚点球有72%机会能进球.而用频率来描述事件A发生的可能性大小,这种办法是否可行,需要进一步研究频率的性质,先看下面例子.

【例1.5】 在掷硬币的试验中,设A表示"掷一枚硬币出现正面"这一事件,频率$f_n(A)$的试验数据与图形的变化趋势情况.

(1)将一枚硬币抛掷5次、50次、500次,各做10遍得到数据如表1.2所示.

表1.2

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

(2)有人进行了大量、重复试验，图1.7记录了前400次试验中频率$f_n(A)$的数据变化情况.

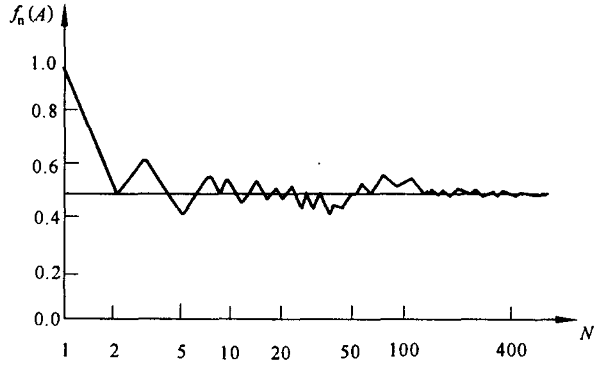


图1.7

(3)历史上也有不少人做过更多次重复试验，得如表1.3所示的数据.

表1.3

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从数据和图形可以看出：频率$f_n(A)$的值具有不确定性，n不同时，$f_n(A)$不相同；即使n相同而"试验序号"不同时，$f_n(A)$也不相同. 另一方面，当试验次数n较小时，频率$f_n(A)$在0与1之间随机波动，其幅度较大；但随着n增大时，$f_n(A)$总是在0.5附近摆动，而逐渐稳定于0.5. 即当n增大时，频率$f_n(A)$呈现出稳定性.

事实上，大量的实验已证实：事件A发生的频率$f_n(A)$随着重复试验的次数n的增大，稳定于某一常数，而偏离的可能性很小. 频率具有稳定性这一事实(我们将在第4章的大数定律中给出理论证明)，说明了用于刻画事件A发生可能性大小的数(即概率)的客观存在性. 因此，用频率来描述事件A发生的可能性大小，在许多实际应用中是合适的. 但确定频率值$f_n(A)$需要做大量的试验，而且$f_n(A)$又有不确定性，这给理论研究和某些实际应用带来不方便，于是，我们下面给出刻画事件发生可能性大小的概率的定义.

1.3.2 事件概率的定义

定义1.2 设E为随机试验，Ω为E的样本空间，对于E的任一事件A赋于一确定的实数，记为$P(A)$，若满足

(1)**非负性**:对任一事件A,有$P(A)\geqslant 0$;

(2)**规范性**:$P(\Omega)=1$;

(3)**可列可加性**:设事件$A_1,A_2,\cdots$两两互不相容,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A) \tag{1.3.2}$$

则称$P(A)$为事件A的概率.

这就是著名的概率的公理化定义,是由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫1933年提出的,有了这个公理化体系之后,概率论得到很快的发展.

利用概率的三条公理可以推导出概率的所有性质,下面我们来介绍概率的若干重要性质:

性质1 $P(\varnothing)=0$.

证 令$A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$.由概率的可列可加性,得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

又$P(\varnothing)\geqslant 0$(非负性),故由上式得$P(\varnothing)=0$.

性质2 (**有限可加性**)若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.3.3}$$

证 令$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,即有$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$.

由概率的可列可加性及性质1,得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.3.4}$$

(1.3.4)式称为概率的有限可加性.

性质3 对任一事件A,则有$P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 因$A\cup\overline{A}=\Omega$且$A\overline{A}=\varnothing$,由(1.3.4)式以及概率的规范性,则得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

性质4 设A,B是两个事件,若$A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.3.5}$$

$$P(B)\geqslant P(A) \tag{1.3.6}$$

证 因为$A\subset B$则有$B=A\cup(B-A)$(参见图1.1),且$A(B-A)=\varnothing$,由概率的有限可加性,得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

又因为$P(B-A)\geqslant 0$,故$P(B)\geqslant P(A)$.

性质5 对任一事件A,则有$P(A)\leqslant 1$.

证 因为$\Omega\supset A$,由性质4,故$P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质6 (**加法公式**)对任意两个事件A,B则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.3.7}$$

证 因为有$A\cup B=A\cup(B-AB)$(参见图1.2),且$A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,由性质2、性质4,则得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

(1.3.7)式可以推广到多个事件的情况.

设A,B,C为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)\\&-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为任意n个事件,则有

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

(1.3.7)、(1.3.8)、(1.3.9)式又称为多除少补原理.

1.4 古典概型

1.4.1 古典概率

我们先来讨论一类最简单的随机现象,它具有下列两个特征:

(1)有限性:试验的全部基本事件只有有限个,即样本空间为有限集;

(2)等可能性:试验中的每一个基本事件的发生是等可能的,即它们发生的概率都相同.

在概率论发展的早期,主要是研究这类随机现象,一般把这类随机现象的数学模型称为古典概型.

在古典概型中,设样本空间为:$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,由等可能性,则有

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n}$$