刘德辅 董 胜 编著

随机工程海洋学

SUIJI
GONGCHENG
HAIYANGXUE

中国海洋大学出版社

随机工程海洋学

刘德辅　董　胜　编著

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

随机工程海洋学/刘德辅，董胜编著. 一青岛：中国海洋大学出版社，2004.1

ISBN 7-81067-540-0

Ⅰ.随… Ⅱ.①刘…②董… Ⅲ.随机过程一应用一海洋工程 Ⅳ.P75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 001950 号

中国海洋大学出版社出版发行
(青岛市鱼山路 5 号 邮政编码:266003)
出版人:王曙光
日照报业印刷有限公司印刷
新华书店经销

*

开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:10.625 字数:210 千字
2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷
印数:1～2 000 定价:18.60 元

前　言

随着海洋开发事业的发展，海洋科学的学科划分也出现了逐渐细化的趋势，物理海洋学、环境海洋学、海洋物理学、海洋气象学、海洋化学、海洋地质学、海洋生物学和工程海洋学等，不一而足。本书的目的在于从随机的观点、理论和方法，论述一切与工程有关的海洋现象，故名曰"随机工程海洋学"。

从随机的角度去论述一切与海洋工程有关的海洋现象及其应用，始于本书第一作者20世纪50年代末60年代初负笈求学于前苏联国立水文气象大学，后于80年代初期在美国佛罗里达大学师从M. Ochi教授，并出版了《海洋石油工程环境——水文分析与计算》(石油工业出版社，1983)一书，以此作为"近海工程"的专业教材，1988～1990年第一作者与挪威科技大学T. Moan教授合作研究期间，吸收了欧洲学术界和工程界的一些学术特色，在中国海洋大学任教期间，为研究生编写了*Introduction to Ocean Engineering*教材，一直沿用至今。本书参考了海内外一些名家的有关专著，总结了上述两部教材以及本书第一作者20余年在随机海洋工程学方面的一些研究成果，汇总编写而成。

本书第一、二章对随机过程、谱分析及线性系统输入、输出的有关理论基础作了详细介绍；第三章对非线性系统作了简要说明；第四、五章则对随机过程的振幅、过阈问题、波高周期的统计特征作了详细论述；第六章则集中阐述了工程海洋学中的热门课题——极值理论、多维极值理论及我们提出的复合极值分布理论；第七章对不确定性和敏感性分析这一工程海洋学中的重要内容进行了方法及实例的介绍；第八章阐释了随机数据分析和处理方法；第九章概述了海洋灾害风险评估的有关问题。

本书第一、二、四、五、六、七、八章由刘德辅执笔，第三、九章由

董胜执笔，最后由刘德辅统稿、定稿。

在成书过程中，承天津大学王超教授对全书进行了校订，大连理工大学俞聿修教授提出了宝贵意见，研究生郝小丽打印了部分初稿，在此一并致谢。

本书适用于海洋、海岸、水利、港航、环境工程等学科的硕士、博士研究生作教材，高年级本科生亦可作为选修课教材，还可作为有关工程技术和科研人员的参考书。

由于本书内容具有交叉性，涉及随机过程、海洋工程、海洋物理、经济风险分析等方面，书中论述难免存在专业上的局限性，加之作者水平有限，错误和不足在所难免，敬请专家与读者指正。

刘德辅

2003年10月

目　录

第一章　随机过程和谱分析

世界上各种现象都处于经常的变动之中，即使是一些确定性现象，例如地球自转运动(precession)中，也存在着不规则的章动(nutation)。因此，任何事物都随着时间、空间而变易，为时间空间的函数，称为随机函数(random function)，此即“在变易之中求其不易之理”的“易经”内涵。

随机函数可表达为以时间、空间或试验的次数为横轴，以代表出现状态的数字为纵轴的连续曲线或数列，可称之为时间、空间或试验的序列(series)。它代表随机函数总体(ensample)中的一个样本(sample)。

大多数随机函数都是以时间为自变量，称为时域过程(time domain)。而在实用中，一般都通过频率域(frequency domain)和概率域(probability domain)来解决。以随机海浪为例，三者的关系可用图 1.1 表达。

19～20 世纪，法国数学家 Henri Poincare 指出：“自然的法则，有其前后连贯的关系，后果由前因造成，由过去和现在的状态可以预测未来，从现在出现的情况，亦可推知过去所发生的事件。”此即本章的目的。

§ 1.1　随机函数、时间序列及随机过程

对随机现象作长时期的观测、广泛的调查或多次试验，都可得到一连串的记录，如一系列测波仪测得的波高记录等。每一个测波记录按时间的先后排列，得到时间序列。一般出现的函数大多以时间及试验次数为自变量，称为随机过程(random process)，或称为概率过程(stochastic process)。但 stochastic 与 random 之区别，在于前者由希腊文 $\sigma\tau o\chi\alpha\zeta o\mu\alpha\nu$ 变化而来，其原意为“属于概率的”，此词多少包括推测(conjecture)的意思在内。由此可见，随机过程的定义为因偶然因素支配，随时间而变化的数值序列，以 $X(t)$ 表示，其可能出现的值 x 称为 $X(t)$ 的状态(state)。$X=x$ 的值随时间而变化，称为状态的转移(transition of states)。

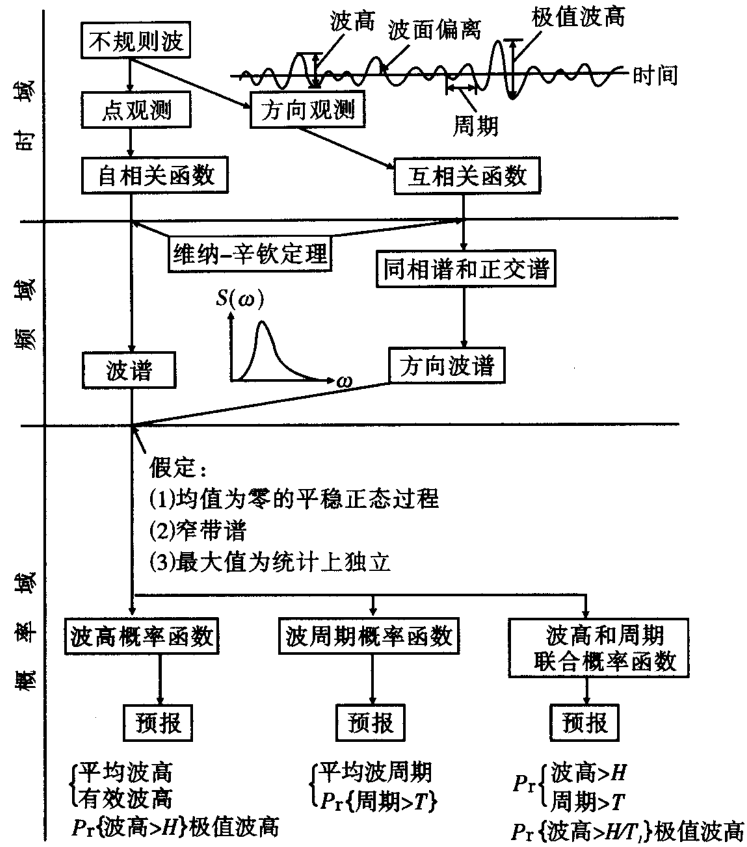

图 1.1　不规则波浪的预报原则和程序

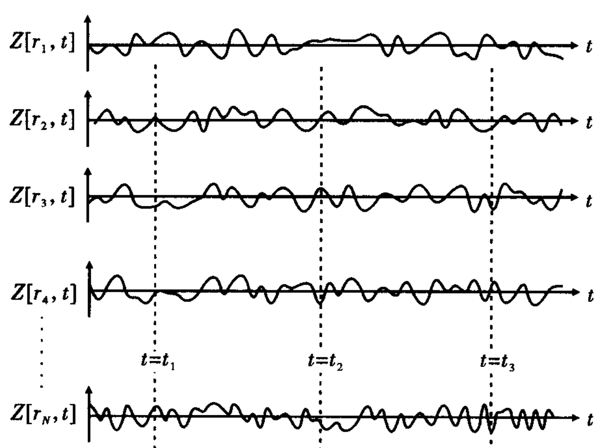

图 1.2　相同气象水深条件下 N 个测波记录

图 1.2 所示的波面变化曲线 $Z_N(t)$是一时间序列，图中沿纵向虚线上可取出 $Z_{t_1}(Y)$，$Z_{t_2}(Y)$，$Z_{t_3}(Y)$，…，同样是随机函数值。因此，随机函数的自变量，可不限定为时间，只需形成一过程即可。其变化范围，称为参数空间(parameter space)。

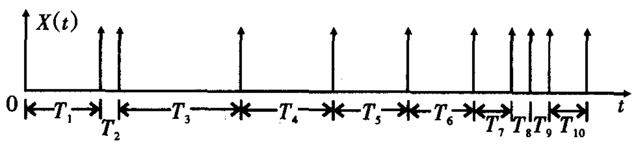

图 1.3　某港进船时刻连续记录

图 1.3 为记录某港口进船的时刻，以时间为横坐标的连续记录，虽然来船记录不连续，但船只入港在任何时间都可发生，故时间轴仍为连续，即参数空间为实数时，随机函数 $X(t)$为连续时间序列或随机过程。

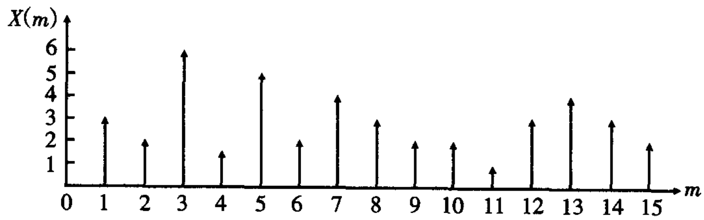

图 1.4　掷骰子点数与次数 m 的分布 $X(m)$图

图 1.4 表示掷骰子点数随次数 m 的变化。此图表示参数空间为整数时，称为离散时间序列或离散随机过程。

随机函数值存在范围称为状态空间(state space)，如波面变化在水深为 d 时，ξ 的存在范围为$-0.78\sim+0.78\ d$(海面平静时 $\xi=0$)。在此限定内连续变化，任何值都可出现。$Z(t)$为连续状态过程。上述船舶进港或掷骰子的例子中，变量皆为正整数，称为离散状态过程，但因时间轴连续，故可称为连续随机过程。

§ 1.2　随机过程及其分布律

自然界中事物的变化可分为两类：一为确定性过程，即事物变化过程可

用时间的确定函数来描述，例如：

$$X(t)=\frac{1}{2}gt^2, t>0$$

用以描述自由下落物体距离随时间变化的过程；另一为随机过程，即事物的变化，既没有确定的变化形式，也没有必然的变化规律，不能用时间的确定函数来描述事物变化的过程。假定在相同条件下，进行一系列试验，试验的结果是一个自变量或几个自变量的某种函数，函数每次可以取不能预知的各种形式，这种函数即为随机函数，或随机过程。

每次试验结果可得到的非随机函数，叫做随机过程的现实。通过每次重复试验，即可得到一个新的现实。所以，随机过程可以看作是它所有现实的集合。这种随机函数的概念，可以很好证明海浪过程的本质。

为了说明这个概念，假定有大量同一类型的测波仪，在同一条件的海域中同时工作。每个测波仪的纪录，代表了以时间为函数的波高变化。所有记录的集，叫做样集。对应于 n 个测波仪，波高可用以下的随机过程来表示：${}^1x(t), {}^2x(t), \cdots, {}^nx(t)$。因此，样集可由一组包含 n 个纪录的$\{{}^1x(t), {}^2x(t), \cdots, {}^nx(t)\}$来表示(见图 1.2)

图 1.2 中每一条过程线，表示随机函数的一个现实。如取某一固定时刻 t_1，并通过 t_1 作横坐标的垂线，则此垂线与每一现实相交于一点。这些交点表示随机变量的值，而这随机变量则叫做随机函数在自变量 $t=t_1$ 时的截口。

这样，可以给出随机函数的另一定义：对自变量的每一给定值，如 $t=t_1$，函数 $X(t)$的值(与 $t=t_1$ 相应的每一截口)为一随机变量，此函数即为自变量 t 的随机函数。自变量 t 可以取给定的有限或无限区间内的任意实数，也可以只取一定的离散值。前者，$X(t)$叫做随机过程，后者 $X(t)$叫做随机序列。随机函数包括上述的两种概念在内。由于海浪过程是连续自变量函数，所以，下面只讨论一个连续自变量的随机过程。

随机变量 $X(t)$可以看成是它的所有截口的总和，其中每一截口表示一个随机变量。$t_1, t_2, \cdots, t_n$，即可得到随机过程的 n 个截口。

$$x_1=X(t_1),\ x_2=X(t_2), \cdots,\ x_n=X(t_n)$$

这样，随机过程的特征可以近似地用这个随机变量系的分布函数来描述：

$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P(X_1<x_1, X_2<x_2, \cdots, X_n<x_n) \qquad (1.1)$$

也就是说，如果对于 t 的每个值，随机变量 $X(t)$的分布函数已被确定，即

$$F_1(x;t)=P[X(t)<t] \qquad (1.2)$$

则随机过程 $X(t)$认为是给定了的。此处 $F_1(x;t)$为随机过程的一维分布函

数。同样，对二维和多维分布函数可以写作：

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\ (X_1<x_1,X_2<x_2) \tag{1.3}$$

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\ (X_1<x_1,X_2<x_2,\cdots,X_n<x_n) \tag{1.4}$$

若 $F_1(x;t)$存在对 x 的偏导数

$$\frac{\partial F_1(x;t)}{\partial x}=f_1(x;t) \tag{1.5}$$

则 $f_1(x;t)$为随机过程的一维密度函数。同理可写出随机过程的 n 维密度函数：

$$\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) \tag{1.6}$$

根据概率论可知，从 n 元随机变量系的分布函数及密度函数可以求得其任意子系的分布函数。因此，若已知 n 维分布函数及密度函数，则所有阶次较低的分布函数及密度函数也就随之给定。

由于通过实验确定多维分布律是非常困难的，因此不能应用它来表示随机函数的特征和解决实际问题，而是采用分布率的某些特征来代替多维分布率本身。

§ 1.3　随机过程的统计特征

如同随机变量的数字特征一样，采用分布的各阶矩来作为随机过程的统计特征。随机变量的矩可作如下定义：

$$m[g(x)]=\begin{cases}\sum g(x_i)p(x_i) & \text{——离散随机变量}\\ \int xf(x)\mathrm{d}x & \text{——连续随机变量}\end{cases}$$

如 $g(k)=x^k$，则 $m[x^k]$为 k 阶矩。对于随机过程，各阶相应幂的乘积的数学期望，叫做随机过程的 $i_1+i_2+\cdots+i_n$ 阶矩，

$$m_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\{[X(t_1)]^{i_1}[X(t_2)]^{i_2}\cdots[X(t_n)]^{i_n}\} \tag{1.7}$$

一阶矩叫做随机过程的数学期望，即

$$m_1(t)=E[X(t)]=m_x(t) \tag{1.8}$$

随机过程的数学期望 $m_x(t)$是一个非随机函数，对每个 t，其数值等于相应截口的数学期望。

数学期望为一阶分布律所确定：

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;t)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

上面讨论的是一阶原点矩。一阶中心矩是指中心化随机过程的一阶矩。中心化随机过程 X^0 指随机过程与其数学期望之差，即

$$X^0(t)=X(t)-m_x(t) \tag{1.10}$$

中心化随机过程的原点矩叫做随机过程 $X(t)$ 相应阶的中心矩。一阶中心矩为零。

$$\mu(t)=E[X^0(t)]=E[X(t)-m_x(t)]=m_x(t)-m_x(t)=0$$

下面讨论二阶矩的不同形式。

随机过程同一截口的二阶原点矩：

$$m_{2,0}(t)=E\{[X(t)]^2\} \tag{1.11}$$

随机过程两个不同截口的二阶矩叫二阶混合矩：

$$m_{1,1}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)] \tag{1.12}$$

同一截口的二阶矩 $m_{2,0}(t)$ 只取决于自变量 t_1 一个值；而二阶混合矩取决于自变量的两个值 t_1 和 t_2。二阶中心矩具有以下形式：

$$\mu_{2,0}(t)=E\{[X^0(t)]^2\}=E\{[X(t)-m_x(t)]^2\} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\mu_{1,1}(t_1,t_2)&=E\{[X^0(t_1)X^0(t_2)]\}\\&=E\{[X(t_1)-m_x(t_1)][X(t_2)-m_x(t_2)]\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

中心矩 $\mu_{2,0}(t)$ 是自变量的函数，对于 t 的每一个固定值，它就是随机过程相应截口的方差，即自变量 t 的非随机函数。

$$D_x(t)=\{[X(t)-m_x(t)]^2\}=\mathrm{Var}[X(t)] \tag{1.15}$$

叫做随机过程的方差。

中心矩 $\mu_{1,1}(t_1,t_2)$ 是两个自变量 t_1 和 t_2 的函数，对于 t_1 和 t_2 的每一对值，即为随机过程相应截口间的相关矩。两个自变量 t_1 和 t_2 的非随机函数

$$R(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_x(t_1)][X(t_2)-m_x(t_2)]\} \tag{1.16}$$

叫做随机过程 $X(t)$ 的相关函数。很明显，当 $t_1=t_2=t$ 时，

$$R(t,t)=\mathrm{Var}[X(t)] \tag{1.17}$$

即当两自变量取同一值时，相关函数转变为方差。

随机过程的一阶矩和二阶矩——数学期望和相关函数，可以确定随机过程的一系列重要性质。

对于自变量的每一个固定值，数学期望 $m_x(t)$ 决定了随机过程每个截

口的分布中心。图 1.2 中虚线即为不同值 t 各个截口分布中心的连线。

相关函数 $R(t_1,t_2)$中，当 $t_1=t_2=t$ 时，转变为方差，它表示了该截口上随机值在其分布中心附近散布的特征。

对于不同的 t_1,t_2，相关函数表示随机过程每一对截口间线性依赖关系的程度。

在数理统计学中，根据试验资料确定随机变量的数学期望和相关矩时，按照大数定理，可取所有随机变量的算术平均值作为它们的值。即：

$$m_x=E[x]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1.18}$$

$$R_{xy}=E[(x-m_x)(y-m_y)]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)(y_i-m_y) \tag{1.19}$$

式中，n 为随机变量的个数。

在确定随机过程的数学期望和相关函数时，可对全部现实的集合进行类似的平均：

$$m_x(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(t) \tag{1.20}$$

$$R_x(t_1,t_2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_1)-m_x(t_1)][x_i(t_2)-m_x(t_2)] \tag{1.21}$$

式中，n 为全部现实的个数。

为了便于以后的数学推导，下面重复一下随机变量和随机过程的期望值、方差的几个特性。

期望值的特性：

(1)$E[a]=0$，当 $a=$常数；

(2)$E[ax]=aE[x]$；

(3)$E[x+a]=E(x)+a$；

(4)$E[x+y+z+\cdots]=E[x]+E[y]+E[z]+\cdots$；

(5)$E[x\cdot y\cdot z\cdot\cdots]=E[x]\cdot E[y]\cdot E[z]\cdot\cdots$，如果 $x,y,z,\cdots$ 相互独立。

方差的特性：

(1)$\mathrm{Var}[x]=E[x^2]-\{E[x]\}^2$；

(2)$\mathrm{Var}[a]=0$；

(3)$\mathrm{Var}[ax]=a^2\mathrm{Var}[x]$；

(4)$\mathrm{Var}[x+a]=\mathrm{Var}[x]$；

(5)$\mathrm{Var}[ax+by]=a^2\mathrm{Var}[x]+b^2\mathrm{Var}[y]$，如果 x,y 相互独立；

$\mathrm{Var}[ax+by]=a^2\mathrm{Var}[x]+b^2\mathrm{Var}[y]+2ab\mathrm{Var}[x,y]$，如果 x,y 不

独立。

上式中，$\mathrm{Cov}[t,t+\tau]$叫随机过程的协方差函数。

$$\mathrm{Cov}[t,t+\tau]=E\{[X(t)-m_x(t)][X(t+\tau)-m_x(t)]\}$$

此处，$\mathrm{Cov}[x,y]=E\{[x-m_x][y-m_y]\}$。如果 x,y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}[x,y]=0$。

§ 1.4 工程海洋学中常用的几种随机过程

1.4.1 平稳随机过程

如果样集的全部统计特征随时间的变化反应微弱，则此随机过程叫做平稳随机过程。

平稳随机过程定义为：若随机过程 $X(t)$的所有有穷维分布律，当其所有自变量的值同加一数时，保持不变，则此过程称为平稳随机过程。换句话说，如果这些分布律只与自变量值的相对位置有关，而与自变量本身无关，则称为平稳随机过程。因此，若对任意的 n 和任意的 t，下列等式成立：

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+t_0,t_2+t_0,\cdots,t_n+t_0) \tag{1.22}$$

则随机过程 $X(t)$为一平稳随机过程。由上式可以看出，平稳过程的密度函数不因自变量起点的推移而改变。

平稳随机过程具有以下特性：

(1)样集的期望值为与时间无关的常量。

$$E[x(t)]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}^{k}x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\mu_x \tag{1.23}$$

证： 令 $t_0=-t_1$，则由式(1.22)可知：

$$f_1(x_1;t_1)=f_1(x_1;t_1+t_0)=f_1(x_1;0)$$

即：

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_1(x_1)\mathrm{d}x_1=\mu_x$$

(2)对于时间 t 和 $t+\tau$ 的随机过程，自相关函数仅取决于时间差 τ。

$$R_{xx}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

设 $t_0=-t_1$，则有：

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;t_1+t_0,t_2+t_0)$$

$$=f(x_1,x_2;0,t_2-t_1)=f(x_1,x_2;0,\tau)$$

由此可得：

$$R_{xx}(\tau)=E[X(t)X(t-\tau)] \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\tau)&=E\{[X(t)-m_x][X(t+\tau)-m_x]\}\\&=E\{[X(t)X(t+\tau)]-m_xX(t+\tau)-m_xX(t)+m_x^2\}\\&=E\{[X(t)X(t+\tau)]\}-m_x^2\\&=R_{xx}(\tau)-m_x^2\end{aligned} \tag{1.25}$$

(3)若取 $\tau=0$，则可得以下结果：

$$\mathrm{Var}[X(t)]=\mathrm{Var}(0)=R_{xx}(0)-m_x^2 \tag{1.26}$$

下面举例说明。

设随机过程 $X(t)=\sin(\omega t+\varepsilon)$ 中，ω 为正的常数，ε 为均匀分布在$(0,\pi)$上的随机变量。证明此过程是否为平稳随机过程。

证：对于某时间 t，过程的期望值为：

$$\begin{aligned}E[X(t)]&=E[\sin(\omega t+\varepsilon)]\\&=E[\sin\omega t\ \cos\varepsilon+\ \cos\omega t\ \sin\varepsilon]\\&=E[\sin\omega t\ \cos\varepsilon]+E[\cos\omega t\ \sin\varepsilon]\\&=\sin\omega t\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\cos\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon+\ \cos\omega t\int_0^\pi\ \sin\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon\\&=\frac{2}{\pi}\cos\omega t\\&=f(t)\end{aligned}$$

由于随机过程 $X(t)$的期望值不是常量，而是时间的函数，因此，此过程不是平稳随机过程。

1.4.2 平稳随机过程的各态历经性(ergodicity)

迄今为止，只讨论了通过对所有现实的集和求平均的办法来确定随机函数的特征——数学期望和自相关函数。用一维和二维概率密度函数来表示平稳随机过程的期望值和自相关函数时，可以写出：

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_1(x_1)\mathrm{d}x_1=m_x$$

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

但是，为了求得平稳随机过程的统计特征，首先需要知道一维和二维的密度函数。在实际上，这是不易办到的。虽然我们通过统计试验，可把期望值和

自相关函数按下式近似求解：

$$M_x \cong \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t)$$

$$R_{xx}(t_1-t_2) \cong \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t_1)x_k(t_2)$$

但是，这也需要进行大量观测，以便获得数量很多的样本函数$X_k(t)$，$k=1,2,\cdots,n$。在实际上，这也是很困难的。

由于平稳过程的统计特性是与时间原点的选取无关的，于是，我们希望在一个很长的时间内，观测得到一个样本曲线，用以作为得到这个随机过程统计特征的充分依据。因此，引入了各态历经的特性，由此特性可以证实：对平稳过程而言，样集的平均（均值和自相关函数集）实际上可以用一个样本函数在整个事件轴上的平均值来代替。引入各态历经的概念，在解决实际问题时就节约了大量的工作量。

随机过程 $x(t)$的时间均值和时间相关函数的表达式如下所示：

时间均值为：

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t \tag{1.27}$$

时间相关函数为：

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)t \tag{1.28}$$

各态历经性的定义如下所示：

(1)如果$\langle x(t)\rangle = E[x(t)] = m_x$，则称随机过程 $x(t)$的均值具有各态历经性。

(2)如果$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = E[x(t)x(t+\tau)] = R_{xx}(\tau)$，则称随机过程$x(t)$的自相关函数具有各态历经性。

(3)上式中，如 $t=0$，则称方差具有各态历经性。

(4)符合下列条件的随机过程，称为各态历经的随机过程：

样集$\{{}^1X(t),{}^2X(t),{}^3X(t),\cdots,{}^nX(t)\}$的每一个纪录，在统计上相当于每一个其他的纪录；

样集的所有统计特征，等于在足够长的时间间隔内单一记录的所有统计特征值，即：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F[{}^kx(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} F[{}^kx(t)]\mathrm{d}t$$

(5)一个随机过程，若用它的一次现实求平均得到的统计特征值，当求平均的区间 T 增大时，能以任意趋近于 1 的概率逼近用各次现实的整个集