21世纪高等院校教材

计算方法

（第二版）

张池平　主　编

高广宏　李道华　副主编

科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一. 全书共6章，内容包括：误差理论、插值方法、数值积分、非线性方程求根的迭代法、常微分方程数值解法、线性代数方程组的解法. 各章配有适量的例题及习题，有利于提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书可作为工科大学本科生数学课教材，也可供工程技术人员及其他科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/张池平主编. —2版. —北京：科学出版社，2006

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-016489-X

I. 计… II. 张… III. 计算方法-高等学校-教材 IV. O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第135893号

责任编辑：林 鹏 赵 靖 祖翠娥／责任校对：刘小梅

责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006年1月第 二 版 印张：9 1/2

2006年1月第四次印刷 字数：173 000

印数：11 201—16 200

定价：15.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换<双青>）

哈尔滨工业大学数学教学丛书编写委员会

主　任　王　勇

委　员　（按汉语拼音排序）

包革军　董增福　盖云英　高广宏　焦光虹

李道华　尚寿亭　田波平　王希连　吴勃英

谢鸿政　杨凤林　游　宏　张　彪　张池平

张传义　张云飞

前　　言

为适应21世纪高等院校学生和广大工程技术人员对数学的需要，哈尔滨工业大学作为国家工科数学教学基地之一，多年来，在数学的教学改革方面进行了一定的探索，已初见成效，并编写了系列教材，本书就是其中的一本.

本教材编写力求具有以下特点：将各门课程内容有机结合、融汇贯通，注重对学生能力的培养，对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入. 取材上，内容丰富、重点突出、强调应用. 各章配有适量的例题及习题，有利于提高学生分析问题和解决问题的能力.

由于编者水平有限，书中不足和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2005年于哈尔滨工业大学

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 误差理论

1.1 引　言

在数值计算中, 参与计算的数, 一般说来都是近似的. 首先, 用到的数据是由观测得来的, 观测的结果是不可能绝对准确的. 其次, 在计算过程中还要利用一些无理数, 例如, $\pi, e, \sqrt{2}$ 等, 在电子计算机上, 这些数只能近似地表示.

近似数的误差对计算结果的影响可能是很大的. 我们用例子来说明, 设有半径为 R 的圆柱和两个互相垂直而又与之相切的平面, 试求一个与圆柱及这两个平面都相切的球的体积.

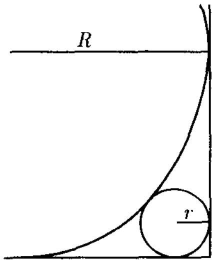

图 1.1

从图 1.1 中, 容易得出

$$r = R\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

所以球的体积是

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3,$$

计算

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$$

可以利用下列等式得到以下六种算法:

$$\begin{aligned} x &= (\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6 = \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{99+70\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

现在就分别用

$$\sqrt{2} \approx 7/5 = 1.4, \qquad \sqrt{2} \approx 17/12 = 1.4166\cdots$$

来按式 (1.1) 中六个公式计算, 结果如表 1.1 所示. $\sqrt{2}$ 的真值是 $1.414213\cdots$, $17/12$ 比 $7/5$ 更接近于 $\sqrt{2}$ 的真值. 由此可见, 按照不同公式计算出的结果是很不同的. 我

们不知道哪一个结果更近似于真值. 这个例子告诉我们, 正确地掌握近似数的基本概念和一些基本运算法则是非常必要的.

表 1.1

$\sqrt{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$
$(\sqrt{2}-1)^6$	$\frac{64}{15625}=0.004096$	$\frac{15625}{2985984}=0.005232$
$(3-2\sqrt{2})^3$	$\frac{1}{125}=0.008$	$\frac{1}{216}=0.004630$
$99-70\sqrt{2}$	1	$-\frac{1}{6}=-0.16667$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6$	$\left(\frac{5}{12}\right)^6=0.005232$	$\left(\frac{12}{29}\right)^6=0.0050199$
$\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3$	$\left(\frac{5}{29}\right)^3=0.0051252$	$\left(\frac{12}{70}\right)^3=0.0050379$
$\frac{1}{99+70\sqrt{2}}$	$\frac{1}{197}=0.00507614$	$\frac{12}{2378}=0.0050462$

1.2　绝对误差和相对误差

假设某一量的准确值是 x, 其近似值是 x^*, x 与 x^* 的差

$$\varepsilon(x)=x-x^* \tag{1.2}$$

叫做近似数 x^* 的绝对误差, 简称为误差. 当 $\varepsilon(x)>0$ 时, 就称 x^* 为亏近似数; 反之, 称为盈近似数.

由于准确值 x 一般不能算出, $\varepsilon(x)$ 的准确值也不能求出. 但是我们可以估计出它的大小的范围. 也就是可以指出一个正数 η 使

$$|\varepsilon(x)|\leqslant\eta, \tag{1.3}$$

η 称为 x^* 的绝对误差限. 有时我们也用

$$x=x^*\pm\eta \tag{1.4}$$

来表示不等式 (1.3). 例如, 真空中光速 c 的最好的近似值是 2.997902×10^{10} 厘米/秒, 其绝对误差不超过 0.000009×10^{10} 厘米/秒. 通常就记成

$$c=(2.997902\pm0.000009)\times10^{10}\text{厘米/秒}.$$

绝对误差还不足以刻画近似数的精确度. 例如, 测量 1 米的长度时发生了 1 厘米的误差和测量 0.5 米的长度时发生了 1 厘米的误差是有区别的. 前一种测量比较精确. 可见, 要决定一个量的近似值的精确度, 除了要看绝对误差的大小之外, 还必须考虑到该量本身的大小, 这就导出了相对误差的概念.

绝对误差与准确值的比, 即

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x} \tag{1.5}$$

称为 x^* 的相对误差. 上述前一种测量的相对误差是 1/100, 而后一种测量的相对误差是 1/50, 它是前者的两倍.

由式 (1.5) 看出, 相对误差可以从绝对误差求出, 反之求出了相对误差, 绝对误差也可以求得

$$\varepsilon(x) = x \cdot \varepsilon_r(x).$$

相对误差不仅可以求出绝对误差, 而且在对近似数进行计算结果的误差分析时, 相对误差更能反映出误差的特性. 因此, 在误差分析中, 相对误差显得比绝对误差更重要.

相对误差也不能够准确地求出, 因为其中 $\varepsilon(x)$ 与 x 都不可能准确地求得. 但也像绝对误差一样, 可以估计它的大小的范围, 也就是指出一个正数 δ, 使

$$|\varepsilon_r(x)| \leqslant \delta, \tag{1.6}$$

δ 称为 x^* 的相对误差限.

相对误差是一个无量纲数. 例如, 量 100 公斤重的东西, 发生 1 公斤重的误差, 和量 100 米长的东西, 发生 1 米长的误差, 二者的相对误差都是 1/100. 与此相反, 由于绝对误差是有量纲数, 上例中两种测量的绝对误差就无法作比较.

在实际计算中, 由于准确值 x 总是不知道的, 所以就取

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*} \tag{1.7}$$

作为相对误差的另一定义. 由于一般说来 $\varepsilon(x)$ 对 x 而言是小量, 而

$$\varepsilon_r(x) - \varepsilon_r^*(x) = \varepsilon(x)\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^*}\right\} = -\frac{1}{xx^*}\{\varepsilon(x)\}^2$$

是关于 $\varepsilon(x)$ 的高阶小量, 所以我们可以用 $\varepsilon_r^*(x)$ 代替 $\varepsilon_r(x)$. 以后谈到相对误差时, 都是指 $\varepsilon_r^*(x)$.

相对误差表示成百分数为

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{100\varepsilon(x)}{x^*}\%,$$

相对误差的 100 倍, 也称为百分误差.

1.3 有效数字

大家都知道用四舍五入去取一个无穷小数的近似值. 例如 $\pi = 3.14159265\cdots$, 按四舍五入, 取 4 位小数得出 π 的近似值为 3.1416, 取 5 位小数则得出近似值 3.14159. 它们的绝对误差限不超过其末位数的半个单位, 即

$$|\pi - 3.1416| < \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \qquad |\pi - 3.14159| < \frac{1}{2} \times 10^{-5}.$$

因此, 对一个数 x, 按照上述规则近似数 x^* 可以表示为

$$x^* = \pm 10^m(\alpha_1 + \alpha_2 \times 10^{-1} + \alpha_3 \times 10^{-2} + \cdots + \alpha_n \times 10^{-(n-1)}), \tag{1.8}$$

其绝对误差限为

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}, \tag{1.9}$$

这里 m 是一个整数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数字, 而且总可以假定 $\alpha_1 \neq 0$. 对于形如式 (1.8) 的 x^*, 当式 (1.9) 成立而 $\alpha_1 \neq 0$ 时, 便说 x^* 是一个具有 n 位有效数字的有效数. 其中每一位数字 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都叫做 x^* 的有效数字.

例如, 3.1416 是 π 的具有 5 位有效数字的近似值.

有效数不但给出了这近似数的大小, 而且还给出了它的绝对误差限. 例如, 有效数 $3587.64, 0.158 \times 10^{-2}, 0.1580 \times 10^{-2}$ 的绝对误差由式 (1.9) 可知依次是 $\frac{1}{2} \times 10^{-2}, \frac{1}{2} \times 10^{-5}, \frac{1}{2} \times 10^{-6}$ 等. 应该注意, 在有效数中, 0.158×10^{-2} 与 0.1580×10^{-2} 是有区别的. 前者只有 3 位有效数字 1, 5, 8; 后者则有 4 位有效数字 1, 5, 8, 0. 同样 158×10^3 具有三位有效数字, 而 1580×10^2 则具有四位有效数字.

有效数字和相对误差之间, 也有着基本的联系, 我们把它列成两个定理.

定理 1.1　形如式 (1.8) 的近似数 x^*, 若具有 n 位有效数字, 则其相对误差为

$$|\varepsilon_r^*(x)| \leqslant \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n-1)}, \tag{1.10}$$

其中 $\alpha_1 \neq 0$ 是 x^* 的第一位有效数字.

证明　由式 (1.8) 知 $|x^*| \geqslant \alpha_1 \times 10^m$, 故由式 (1.9) 有

$$|\varepsilon_r^*(x)| = \left|\frac{\varepsilon(x)}{x^*}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha_1 \times 10^m} \times \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1} = \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n-1)}. \qquad \square$$

定理 1.2　形如式 (1.8) 的近似数 x^*, 若其相对误差 $\varepsilon_r^*(x)$ 满足

$$|\varepsilon_r^*(x)| \leqslant \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}, \tag{1.11}$$

则 x^* 具有 n 位有效数字.

证明 由于 $\varepsilon(x) = x^*\varepsilon_r^*(x)$, 而 $|x^*| < (\alpha_1 + 1) \times 10^m$, 故

$$|\varepsilon(x)| = |x^*||\varepsilon_r^*(x)| \leqslant (\alpha_1 + 1) \times 10^m \times \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)},$$

即

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}. \qquad \square$$

根据上述事实, 可以看出, 有效数字的位数可以刻画近似数的精确度.

1.4 近似数的简单算术运算

1.4.1 近似数的加法

k 个近似数 $x_i^* > 0(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的和 $x^* = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*$ 的绝对误差 $\varepsilon(x)$ 等于各个近似数的误差的代数和. 事实上,

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k} x_i^* = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_i^*) = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon(x_i).$$

同时, x^* 的绝对误差限不超过各近似数的误差限之和. 由于 $\varepsilon(x_i)$ 可正可负, 一般可以互相抵消, 因此 x^* 的绝对误差限通常比相加各数的绝对误差之和小.

相对误差 $\varepsilon_r^*(x)$ 则界于相加诸项的相对误差中最大者与最小者之间, 即

$$\min_i\{\varepsilon_r^*(x_i)\} = \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_r^*(x) \leqslant \varepsilon_2 = \max_i\{\varepsilon_r^*(x_i)\}.$$

事实上, 由于 $\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*\varepsilon_r^*(x_i)$, 故

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*} = \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{x^*}\varepsilon_r^*(x_i)\begin{cases}\leqslant \varepsilon_2 \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{x_i^*}{x^*} = \varepsilon_2, \\ \geqslant \varepsilon_1 \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{x_i^*}{x^*} = \varepsilon_1.\end{cases}$$

据此并利用前述定理 1.1 和定理 1.2, 就可以进一步讨论和的有效数字的位数了.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例 1.1 求近似数 285.35, 196.87, 58.43, 4.96 的和, 其中每一个数都准确到最末一位数字.

解

$$
\begin{array}{rr}
 & 285.35 \\
 & 196.87 \\
 & 58.43 \\
+) & 4.96 \\
\hline
 & 545.61
\end{array}
$$

这是一般的算法, 结果中第二位小数可能不准确, 因为结果的绝对误差可能达到 0.02. 舍入成 545.6, 它的绝对误差限是 $0.02 + 0.01 = 0.03$, 所以它具有四位有效数字.

1.4.2 近似数的乘法

讨论乘法、除法、乘方和开方等运算的结果的误差时, 最好用相对误差来讨论. 设 x_1^*, x_2^* 分别是 x_1, x_2 的近似数. 引用微分符号

$$\varepsilon(x_1) = x_1 - x_1^* = \mathrm{d}x_1^*,$$

$$\varepsilon(x_2) = x_2 - x_2^* = \mathrm{d}x_2^*,$$

则利用微分公式, 可有近似的等式

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1x_2) &= x_1x_2 - x_1^*x_2^* = \mathrm{d}(x_1^*x_2^*) \\ &= x_2^*\mathrm{d}x_1^* + x_1^*\mathrm{d}x_2^* = x_2^*\varepsilon(x_1) + x_1^*\varepsilon(x_2).\end{aligned} \tag{1.12}$$

我们利用这个近似等式还是合理的, 因为等式 $x_1x_2 - x_1^*x_2^* = \mathrm{d}(x_1^*x_2^*)$ 两端相差的只是相对于 $x_2^*\mathrm{d}x_1^* + x_1^*\mathrm{d}x_2^*$ 而言的高阶小量 $\mathrm{d}x_1^* \times \mathrm{d}x_2^*$, 故可忽略不计. 由式 (1.12) 就有

$$\varepsilon_r^*(x_1x_2) = \frac{\varepsilon(x_1x_2)}{x_1^*x_2^*} = \frac{\varepsilon(x_1)}{x_1^*} + \frac{\varepsilon(x_2)}{x_2^*} = \varepsilon_r^*(x_1) + \varepsilon_r^*(x_2). \tag{1.13}$$

由此可得结论：乘积的相对误差是各因子的相对误差之和, 乘积的相对误差限也不超过各个因子的相对误差限的和. 显然, 这个性质对于含两个因子以上的乘积也是成立的.

根据这个性质和前述定理 1.1 和定理 1.2, 可以推知：两近似数 x_1^*, x_2^* 相乘, 若它们各有 n_1 位和 n_2 位有效数字, 则乘积 $x_1^*x_2^*$ 可准确到第 $n = \min(n_1, n_2) - 1$ 位, 至少也准确到第 $n - 1$ 位. 有时可进一步舍入成具有 n 位或 $n - 1$ 位有效数字的数.

为了证明, 设 $n_1 \leqslant n_2$, 而求证 $x_1^*x_2^*$ 准确到第 $n_1 - 1$ 位或 $n_1 - 2$ 位.

设 α_1, β_1, p_1 依次是 x_1^*, x_2^* 及 $x_1^*x_2^*$ 中的第一位不为零的数字. 由定理 1.1,

$$|\varepsilon_r^*(x_1)| \leqslant \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n_1-1)}, \qquad |\varepsilon_r^*(x_2)| \leqslant \frac{1}{2\beta_1} \times 10^{-(n_2-1)}.$$

由式 (1.13) 有

$$\begin{aligned}|\varepsilon_r^*(x_1x_2)| &\leqslant |\varepsilon_r^*(x_1)| + |\varepsilon_r^*(x_2)| \leqslant \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{-(n_1-1)} + \frac{1}{2\beta_1} \times 10^{-(n_2-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) \times 10^{-(n_1-1)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \begin{cases}\dfrac{1}{2} \times 10^{-(n_1-1)} = \dfrac{1}{20} \times 10^{-(n_1-2)} \leqslant \dfrac{1}{2(p_1+1)} \times 10^{-(n_1-2)}, & \text{当}\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\beta_1} \leqslant 1\text{时}, \\ 10^{-(n_1-1)} \leqslant \dfrac{1}{20} \times 10^{-(n_1-3)} \leqslant \dfrac{1}{2(p_1+1)} \times 10^{-(n_1-3)}, & \text{当}\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\beta_1} > 1\text{时}.\end{cases} \tag{1.14}$$

$\left(\text{注意 } \dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\beta_1} \leqslant 2, \text{因为 } \alpha_1 \geqslant 1, \beta_1 \geqslant 1.\right)$ 由定理 1.2 及式 (1.14) 中前一不等式, 可以知道 $x_1^*x_2^*$ 至少准确到第 $n_1 - 1$ 位, 有时可以舍入成具有 $n_1 - 1$ 位有效数字的数. 由定理 1.2 及式 (1.14) 中后一不等式也可以知道 $x_1^*x_2^*$ 至少准确到第 $n_1 - 2$ 位.

由此可见, 求两数之积时, 如果要求结果具有 n 位有效数字, 那么就应该把各因子取得具有 $n+1$ 位或 $n+2$ 位有效数字. 精确度不相同的两数相乘时, 须将较准确的数舍入成比精确度较低的因子多一位有效数字.

例 1.2 求有效数 2.016 与 3.124 的积, 并判断乘积具有几位有效数字.

解 由于 $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 3, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} < 1$, 故利用上述证明的结果, 乘积至少有三位准确数字.

$$\begin{array}{r} 2.016 \\ \times)\quad 3.124 \\ \hline 8064 \\ 4032 \\ 2016 \\ +)\quad 6048 \\ \hline 6.297984 \end{array}$$

现在实际作演算, 从中可以看出, 乘积中, 第二位小数已受影响, 所以最多可以准确到小数点后第 2 位.

由于

$$\begin{aligned}|\varepsilon_r^*(x_1x_2)| &\leqslant |\varepsilon_r^*(x_1)| + |\varepsilon_r^*(x_2)| \leqslant \frac{0.0005}{2.016} + \frac{0.0005}{3.124} \\ &= 0.000248 + 0.000161 = 0.000409,\end{aligned}$$

$$|\varepsilon(x_1x_2)| = |x_1^*x_2^*||\varepsilon_r^*(x_1x_2)| \leqslant 6.30 \times 0.000409 = 0.0026,$$

故 x_1x_2 应界于 $x_1^*x_2^* \pm 0.0026$ 之间. 但

$$x_1^*x_2^* = 6.30 + \eta, \qquad |\eta| \leqslant 0.0022,$$

所以

$$|x_1x_2 - 6.30| \leqslant 0.0026 + 0.0022 < 0.005.$$

可见, $x_1^*x_2^*$ 舍入成 6.30 以后, 是具有三位有效数字的有效数.

1.4.3 近似数的除法

设 $x^* = x_1^*/x_2^*$, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1^*}{x_2^*} = \mathrm{d}\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \frac{x_2^*\mathrm{d}x_1^* - x_1^*\mathrm{d}x_2^*}{{x_2^*}^2} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x_1^*}{x_1^*} - \frac{\mathrm{d}x_2^*}{x_2^*}\right)\frac{x_1^*}{x_2^*} = \{\varepsilon_r^*(x_1) - \varepsilon_r^*(x_2)\}x^*. \end{aligned} \tag{1.15}$$

于是得到商的绝对误差限和相对误差限

$$|\varepsilon(x)| \leqslant |x^*|\{|\varepsilon_r^*(x_1)| + |\varepsilon_r^*(x_2)|\} \tag{1.16}$$

及

$$\left|\varepsilon_r^*\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right| \leqslant |\varepsilon_r^*(x_1)| + |\varepsilon_r^*(x_2)|. \tag{1.17}$$

式 (1.17) 和式 (1.13) 完全相似, 所以像乘法一样, 可以得出结论: 1.4.2 节中关于乘积的结论, 对于商仍然正确.

例 1.3　问商 $31.7/\sqrt{3}$ 能准确到几位小数, 其中分子准确到它的末位数字.

解　根据上述结论, 商至少可有两位有效数字. 要达到这个精确度, 我们把 $\sqrt{3}$ 取成 1.732, 使其具有四位有效数字. 而

31.7 的相对误差限是 $\dfrac{0.05}{31.7} = 0.0016$,

1.732 的相对误差限是 $\dfrac{0.0005}{1.732} < 0.0003$,

$$x^* = \frac{31.7}{1.732} = 18.30\cdots,$$

故

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 0.0018 \times 18.3 < 0.033.$$

绝对误差不超过 x^* 的小数点后第 1 位的半个单位, 即 x^* 准确到小数点后第 1 位. 进行舍入后, 18.3 是具有 3 位有效数字的商.

最后指出, 根据微分公式得出近似公式 (1.15) 时, 利用了 $\mathrm{d}x_2^*$ 比 x_2^* 小得多的假定, 否则近似等式 (1.15) 不能成立. 又若 x_2^* 和 x_1^* 相较很小, 商的绝对误差就能很大. 在计算中应该避免这种情况.

1.4.4 近似数的幂与根

设 $y^* = x^{*^p}, p > 0$, 则由微分公式

$$\varepsilon(y) = \mathrm{d}y^* = px^{*^{p-1}}\mathrm{d}x^* = px^{*^{p-1}}\varepsilon(x)$$

或

$$\varepsilon_r^*(y) = p\varepsilon_r^*(x). \tag{1.18}$$

由此可见, x^* 的 p 次幂的相对误差是 x^* 本身相对误差的 p 倍. 在式 (1.18) 中令 $p = \dfrac{1}{q}$, 即可知, x^* 的 q 次根的相对误差是 x^* 本身相对误差的 $1/q$.

1.4.5 近似数的对数

设 $y^* = \lg x^* = \lg e \ln x^* = 0.43429\ln x^*$, 则

$$\varepsilon(y) = \mathrm{d}y^* = 0.43429\frac{\mathrm{d}x^*}{x^*} = 0.43429\varepsilon_r^*(x) < \frac{1}{2}\varepsilon_r^*(x). \tag{1.19}$$

由此可见, 一数 x^* 的常用对数的绝对误差不超过该数的相对误差的一半.

由式 (1.19) 还可以看出,

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*} = \frac{\varepsilon(y)}{0.43429} = 2.3026\varepsilon(y).$$

因此, 反对数的相对误差不超过对数的绝对误差的 2.5 倍.

1.4.6 近似数的减法

设 $x^* = x_1^* - x_2^*$. 由于

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x_1) - \varepsilon(x_2),$$

可见差的绝对误差限不超过相减两数的绝对误差限之和.

两近似数相减时, 与相加时一样, 应把准确小数位数较多的进行舍入使比准确小数位数较少的数仅多一位准确小数, 然后相减.

例如, 从有效数 384.57 减去有效数 26.5458. 应先把 26.5458 舍入成 26.546, 然后相减, 即

$$384.57 - 26.546 = 358.024,$$

舍入成 358.02, 其绝对误差限不超过 $0.005 + 0.0005 + 0.004 = 0.0095$. 故如舍入成 358.0 则是一个具 4 位有效数字的有效数.

按下列方式做减法:

$$384.5700 - 26.5458 = 358.0242$$

是不对的, 因为被减数的最末两位是不准确的.

两个几乎相等的近似数相减时, 会耗失许多有效数字. 这是计算中一个严重的问题. 例如, 86.034 与 85.993 各有五位有效数字, 其差

$$86.034 - 85.993 = 0.041$$

却最多只有两位有效数字. 有效数字的耗失, 也就是准确度的减少, 就要影响整个计算工作的准确性. 因此, 在实际计算中, 要设法避开这种减法, 可以在相减之前, 如果可能, 把每个数都多写出几位有效数字, 以保证所需的准确度. 例如求 $\sqrt{3.01}-\sqrt{3}$ 需准确到第五位有效数字时, 取 $\sqrt{3.01}=1.7349352, \sqrt{3}=1.7320508$, 于是结果为 2.8844×10^{-3}. 也可以用改变所有计算公式的方法去避开这种减法. 例如, 当 x 很小时去求 $1-\cos x$ 的值, 就可以根据 $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 的右端计算; 或者把 $\cos x$ 展成泰勒级数, 得到

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots.$$

然后按此式右端计算.

表 1.2

情形编号	近似值	真值	绝对误差限	相对误差限
1	$\frac{7}{5}-1=0.4$	$\sqrt{2}-1$	0.0143	0.037 = 3.7%
	$\left(\frac{7}{5}-1\right)^6=0.004096$	$(\sqrt{2}-1)^6$	0.00091	6 × 0.037 = 22.2%
2	$\left(3-2\times\frac{7}{5}\right)=0.2$	$3-2\sqrt{2}$	0.0285	0.143 = 14.3%
	$\left(3-2\times\frac{7}{5}\right)^3=0.008$	$\left(3-2\sqrt{2}\right)^3$	0.0035	3 × 0.143 = 42.9%
3	$99-70\times\frac{7}{5}=1$	$99-70\sqrt{2}$	0.995	99.5%
	$\left(\frac{1}{\frac{7}{5}+1}\right)=\frac{5}{12}=0.416667$	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	0.00246	0.0059 = 0.59%
4	$\left(\frac{1}{\frac{7}{5}+1}\right)^6=0.005232$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6$	0.000189	6 × 0.0059 = 3.54%
	$\frac{1}{3+2\times\frac{7}{5}}=\frac{5}{29}=0.172414$	$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$	0.000840	0.0049 = 0.49%
5	$\left(\frac{1}{3+2\times\frac{7}{5}}\right)^3=\left(\frac{5}{29}\right)^3=0.0051252$	$\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3$	0.000071	3 × 0.0049 = 1.38%
6	$\left(99+70\times\frac{7}{5}\right)^{-1}=\frac{1}{197}=0.00507614$	$\left(99+70\sqrt{2}\right)^{-1}$	0.000022	0.0049 = 0.49%

现在我们就能够对 1.1 节的例子中的问题作答复. 我们只对以 $7/5 = 1.4$ 作为 $\sqrt{2}$ 的近似值来进行讨论. 表 1.2 中是各种情形的误差限.

从相对误差来看, 前三种算法相对误差都很大, 而以第三种为最大, 原因是这三种情形中的减法运算 $\frac{7}{5}-1, 3-2\times\frac{7}{5}$ 及 $99-70\times\frac{7}{5}$ 各使结果有效数字在前两种情形减少了一位, 而在第三种情形则损失了两位.

在后三种算法中, 都避免了有效数字的耗失. 由于 x^* 的 p 次乘幂的相对误差是 x^* 本身相对误差的 p 倍, 所以这三种算法中第四种结果的相对误差最大, 第五种次之, 而第六种算法最好. 经过舍入, 得到 $x = (\sqrt{2}-1)^6$ 的具有两位有效数字的近似值 0.0051.

习 题 1

1. 问 $3.142, 3.141, \frac{22}{7}$ 分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字?
2. 已知近似数 x^* 有两位有效数字, 试求其相对误差限.
3. 已知近似数的相对误差限为 0.3%, 问 x^* 至少有几位有效数字?
4. 若 $x^* = 3587.64$ 是 x 的具有六位有效数字的近似值, 求 x 的绝对误差限.
5. 计算 $\sqrt{10}-\pi$ 的值, 准确到五位有效数字 $(\sqrt{10} = 3.16227766\cdots)$.
6. 如果近似值 $x^* = \pm(\alpha_1 + \alpha_2\times 10^{-1} + \alpha_3\times 10^{-2} + \cdots + \alpha_n\times 10^{-n+1})\times 10^m$ 的相对误差限小于 $\frac{1}{2(\alpha_1+1)}\times 10^{-n+1}$, 证明这个数具有 n 位有效数字.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com