概率論及数理統計

（上册）

习题解答

许刘俊　杨维权

中山大学

编 者 的 话

这本《习题解答》，系配合高等学校试用教材《概率论及数理统计》（中山大学梁之舜、邓集贤主编）而编写的，其内容编排和名词术语，都与该教材相一致，但习题数目有所补充，共有600余题。其中已解500余题。

概率论及数理统计这门学科，应用相当广泛。不仅在天文、气象、文水、地质、物理、化学、生物、医学等学科的研究中有其应用，而且在工业、农业、商业、军事、电讯等各个部门也有广泛的应用。因此，不仅各类高等院校的教学课中讲授概率统计课，而且许多部门举办概率统计讲座或短训班，新编中学教学大纲中也增加了概率统计的初步知识，这充分说明这门学科已得到各方面应有的重视。

这本《习题解答》，阅读对象不仅是各类高等院校的学生，而且适合广大的科技、工程人员。我们考虑到初学者的情况，对习题解答作了尽可能详细的叙述，还注意到习题的多种解法。考虑到高等院校读者的需要，对这门课程的特征函数、中心极限定理、估计理论及假设检验，较系统的收集了有关的习题并作出了解答。在选题中我们考虑到广大科技、工程人员的需要，还注意到习题的广泛性。

对于这本《习题解答》，我室的几位教师也提了改正意见，我校参加《概率论提高班》的几位教师也提了改正的意见，我们在此表示衷心的感谢。

概率论的五章习题解答，由许刘俊同志执笔，数理统计的四章题习解答，由扬维权同志执笔。由于我们的学识、水平有限，必有不少缺点或错误，敬请同志们批评指正。

编　者

一九八〇年六月

目 录

第一章 随机事件和概率

〔**本章要点**〕

一 事件运算

事件之间的关系主要有相容关系、包含关系、等价关系。在事件之间可以定义并、交、差等运算。下面列出几个主要结果：

1. 事件的并(交)的运算满足交换律、结合律：

$A\cup B=B\cup A$;

$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$A\cap B=B\cap A$;

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

2. 事件的并(交)对交(并)满足分配律：

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3. 事件的差的运算：

$A-B=A\cap\overline{B}$。

4. De－Morgan公式：

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i;\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i.$$

注：事件之间的运算关系与点集论中集的运算关系完全等价。事件相当于子集，必然事件与不可能事件相当于全集

与空集。逆事件相当于余集。因此，有点集论知识的读者，可将点集论中的结果完全搬到事件的运算中来。

二　古典概率计算

这种计算概率的方法适用于：如果全体基本事件共有限多个，且每个基本事件的出现可能性相等。这时，任意事件A的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

为了具体算出上式中的分子、分母的数值，一般利用排列组合的方法。关于排列组合的主要结果请参看本“解答”的附录。

三　几何概率

几何概率适用于以下情况中计算事件A出现的概率：如果试验的结果由某一区域内的点的随机位置来确定，并且点落在该区域内的任意位置是等可能的。则

$$P(A)=S_A/S.$$

其中S是全体试验结果构成的区域的度量。S_A是有利于A的S中的部分区域的度量。这里，“区域”可能指一直线上的图形，平面中的图形，也可能指三维空间中的图形。这时S与S_A分别指线段的长度、平面图形的面积及空间图形的体积。

四　概率空间、概率的基本性质

所有基本事件对应的全部元素组成的集合Ω称为样本空

间。Ω的某些子集组成的集类$\mathbf{F}$若满足：

1) $\Omega \in \mathbf{F}$；

2) 若$A \in \mathbf{F}$，则$\overline{A} \in \mathbf{F}$；

3) 若$A_n \in \mathbf{F}$，$n=1$，2，…，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}$$

则称$\mathbf{F}$为σ一代数。

定义在$\mathbf{F}$上的的一个非负集函数$P(A)$若满足：

1) 对任意$A \in \mathbf{F}$，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2) $P(\Omega)=1$；

3) 若$A_n \in \mathbf{F}$，$n=1$，2，…，且当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \phi$，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称P为概率，$P(A)$称为事件A的概率，(Ω，$\mathbf{F}$，P) 称为概率空间。概率有如下性质：

1) $P(\phi)=0$；

2) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

3) 若A_1，A_2，…，A_n满足$A_i \cap A_j = \phi$，$i \neq j$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) ,$$

4) 若$A \subset B$，则$P(A) \leqslant P(B)$ ；

5) 概率的加法定理：

$$P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} P(A_i A_j) + \cdots +$$

$$+(-1)^{N+1}P(\bigcap_{i=1}^{N} A_i)$$

6）概率的连续性定理：若$A_n\epsilon\mathbf{F}$，$n=1, 2, \cdots, A_n\supset A_{n+1}$，

且$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=A$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

五　条件概率、概率的乘法定理

若$P(A)>0$，称$P(B|A)=P(AB)/P(A)$为"在已知事件A发生的条件下，事件B的条件概率"。由定义得到

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

称为概率的乘法定理。

六　全概率公式与贝叶斯公式

若H_1，H_2，…，H_n，…为一序列互不相容的事件(假设事件)，且$P(H_k)>0$．则对任意$B\epsilon\mathbf{F}$，$B\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$，有

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(H_k)P(B/H_k)$$

称为全概率公式。通常取$\bigcup_k H_k=\Omega$。

反过来，若事件B已经发生，则

$$P(H_k|B)=\frac{P(H_k)P(B|H_k)}{P(B)}$$

称为贝叶斯公式。

七 相互独立随机事件、贝努里概型

若事件A与B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立。

若事件A_1，A_2，$\cdots A_n$，对任意$S, 1\leq S\leq n$，任意i_k：$1\leq i_1<i_2<i_s\leq n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

则称A_1，A_2，$\cdots$，A_n相互独立。

若A_1，A_2，$\cdots$，为一序列事件，对任意n，任意n个事件均相互独立，则称A_1，A_2，$\cdots$相互独立。

做n次独立重复试验，每次试验的结果是A与$\overline{A}$，而$P(A)=p$与试验的次数无关，这种试验称为贝努里试验，或称贝努里概型。在贝努里概型中，事件发生k次的概率为

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

八 其它概型及用微分方程、差分方程解概率论问题等

〔本章习题〕

1、设$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$且$C=\{5,6,7\}$。求下列事件：

i) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$； ii) $\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$。

〔解i)〕

方法1：因$A=\{2,3,4\}$，故$\overline{A}=\{1,5,6,7,8,9,10\}$、又因$B=\{3,4,5,\}$故$\overline{B}=\{1,2,6,7,8,9,10\}$。所以$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,6,7,8,9,10\}$。于是$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{2,3,4,5\}$。

方法2： 由De—Morgan公式：

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{(A\cup B)}$$

即得

$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}。$$

方法3：由于事件$\overline{A}\cap\overline{B}$表示$A$不发生同时$B$也不发生。它的逆事件当然是$A$、$B$至少有一个发生，即$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{2,3,4,5\}$。

注：比较上述三种解法可见，它们基本相似，但**方法3**着重于事件的直观背景。**方法1**则是从集合论的眼光来处理问题的。最后，**方法2**是利用了事件间相互关系的已知结果。这几种方法，对于每一个学习概率论的读者来说，都应当熟悉。

〔解ii)〕 用与解i)同样的方法，可以得到

$$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}=\{1,5,6,7,8,9,10\}。$$

2．证明：

i) 对任一事件A，必有$\phi\subset A\subset\Omega$；

ii) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$；

iii) 若A与B为互斥事件，则有$A\cap B=\phi$。

〔证i)〕 因为事件Ω必然出现，所以“事件A出现，则事件Ω出现”这一事实一定成立。即对任一事件A，关系式A

$\subset\Omega$成立。其次，因为ϕ是一定不出现的事件，所以“若A不出现，则ϕ不出现”一定成立。故$\phi\subset A$。

注：在上面的证明中，证明$\phi\subset A$时，我们利用了包含关系的等价性定义。即，若“A不出现，则B一定不出现”，则有$B\subset A$成立。

〔证ii)〕 因为$A\subset B$，即A出现则B一定出现。而$B\subset C$，即B出现则C一定出现。所以若A出现，则C一定出现。即$A\subset C$成立。

〔证iii)〕 因为A与B为互斥事件，即A与B不可能同时发生。故$A\cap B$为不可能事件，即$A\cap B=\phi$。

习题：证明若$A\cap B=\phi$且$C\subset A$，则$B\cap C=\phi$。

3．利用事件的运算和关系证明下列各式：

i) $\bar{\bar{A}}=A$；

ii) $(A-A\cap B)\cup B=A\cup B=\overline{(\bar{A}\cap\bar{B})}$；

iii) $(A\cup B)-B=A-(A\cap B)=A\cap\bar{B}$；

iv) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$。

〔证i)〕 因为$\bar{\bar{A}}$发生表示$\bar{A}$不发生，而这又等价于A发生。故$\bar{\bar{A}}=A$。

注：也可以这样证明：由于第2题之i)，$A\subset\Omega$显然成立，故

$$\bar{\bar{A}}=\Omega-\bar{A}=\Omega-(\Omega-A)=A。$$

条件$A\subset\Omega$是最后一等号成立所必需的。一般说来，$B-(B-A)$不一定等于A。要它等于A，必须$A\subset B$成立。

〔证ii)〕 因为

$$(A-A\cap B)\cup B=[A\cap(\overline{A\cap B})]\cup B$$
$$=[A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B$$
$$=A\cup B。$$

又因为

$$(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}})=(\overline{\overline{A\cup B}})=A\cup B$$

故ii)得证。

〔证iii)〕 因为

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\overline{B}=A\cap\overline{B}$$

而

$$A-(A\cap B)=A\cap(\overline{A\cap B})=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=A\cap\overline{B}$$

故iii)得证。

〔证iv)〕 因为

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$$
$$=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})。$$

故iv)得证。

注1：本题给出的证明方法并不是唯一的。例如对

$$(A-A\cap B)\cup B=A\cup B$$

也可以用以下方法证明：

方法1：由于$A-A\cap B$表示A发生而A,B不同时发生，即A发生而B不发生，故$(A-A\cap B)\cup B$表示A与B至少有一个发生。这等价于说事件$A\cup B$发生。

方法2：由于$A-(A\cap B)\subset A$，故关系"$\subset$"成立。反之，若$x\in A\cup B$，则将$A\cup B$分解为三个互斥事件的并

$$A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)$$

容易看到，这时x必属于上式右边三个事件之一，从而属于

$(A-A\cap B)\cup B$。故关系"$\supset$"也成立。

又例如对iv)，可用以下方法证明：

$(A\cup B)-(A\cap B)$表示"A与B至少有一个发生而不能同时发生"，这等价于说，或事件"A发生而B不发生"或"B发生而A不发生"，即iv)成立。

注2：注1中的方法2是研究事件（集合）之间关系时常用的两种最基本的方法。

注3：在证明事件相等的时候，利用事件间的关系，特别是De—Morgan公式，会带来不少方便。当然，这些公式的证明，必须从定义出发，否则容易发生循环论证的逻辑错误。

注4：从证明过程可见，对于减法运算，我们总是将它化为交的运算（利用公式：$A-B=A\cap\bar{B}$）。因为对事件之交，并的运算有交换律、结合律、分配律等等性质可用。这一点在下面的习题中还会看到。

4。证明：

$$(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$$
$$=(A\cup B\cup C)-[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]$$

〔证〕 $(A\cup B\cup C)-[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]$
$$=(A\cup B\cup C)\cap\overline{[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]}$$
$$=(A\cup B\cup C)\cap[\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(B\cap C)}\cap\overline{(A\cap C)}]$$

再利用并（交）对交（并）的分配律并作简单的化简就可以得到所要的结论。

注：本题左边可以解释为A、B、C三个事件中仅仅一个发生。右边可以解释为A、B、C中至少有一个发生，但不能有两个事件同时发生（从而更不能三个事件同时发生）。显然，这等价于仅仅有一个事件发生。

5. 化简以下二式：

i) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$；

ii) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$。

〔解i)〕

$(A\cup B)\cup(B\cup C)=B\cup(A\cap C)$。

〔解ii)〕

$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A\cup(B\cap\overline{B})=A$。

6. 设A、B、C为任意三个事件。试写出下列关于A、B、C的事件表达式：

i) 仅仅A发生；

ii) 仅仅A不发生；

iii) A和B都不发生，但C发生；

iv) A和B都发生，但C不发生；

v) A和B至少有一个发生，但C不发生；

vi) 至少有一个事件发生；

vii) 至少有两个事件发生；

viii) 仅仅有一个事件发生；

ix) 仅仅有两个事件发生；

x) 三个事件都不发生；

xi) 有不多于两个事件发生。

〔解〕

i) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$或$A-(B\cup C)$；

ii) $\overline{A}\cap B\cap C$；

iii) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$；

iv) $A\cap B\cap\overline{C}$；

v) $(A\cup B)\cap\overline{C}$；

vi) $A\cup B\cup C$;

vii) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$或

$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)$或

$(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup$

$(A\cap B\cap C)$;

viii) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$或

$(A\cup B\cup C)-[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)]$;

ix) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$或

$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)-(A\cap B\cap C)$;

x) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$或$\overline{(A\cup B\cup C)}$;

xi) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$或$\overline{(A\cap B\cap C)}$。

注：利用事件的运算和关系，读者容易证明上述同一事件的不同表达式之间的等价性。在前面的第4题中，我们给出了viii)的两种表达式的等价性的证明。

7。在数学系的学生中任选一名学生。设事件A表示被选出的人是男生。事件B表示该生是三年级学生。事件C表示该生是运动员。

i) 叙述事件$A\cap B\cap\overline{C}$的意义；

ii) 在什么条件下有恒等式：

$A\cap B\cap C=C$

iii) 什么时候关系式$C\subset B$正确？

iv) 什么时候关系式$\overline{A}=B$成立？

〔解i)〕 该生是三年级的男生，但不是运动员。

〔解ii)〕 要$A\cap B\cap C=C$成立，即要求$A\cap B=C$。这表示$A\cap B\supset C$同时$A\cap B\subset C$。而$A\cap B$表示“三年级男生”。故$A\cap B\supset C$表示数学系的运动员都是三年级的男生；而

$A\cap B\subset C$表示数学系的男生都是运动员。所以，当且仅当数学系的运动员都是三年级的男生时，$A\cap B\cap C=C$成立。

〔解iii〕当数学系的运动员一定是三年级的学生，或者说数学系除三年级外其它年级的学生都不是运动员时，$C\subset B$成立。

〔解iv)〕$\overline{A}=B$成立，即是说三年级的学生都是女学生，而其它年级都没有女生。

注：要全面了解事件等式的意义，必须明白，这里的相等表示左边事件包含右边事件，同时右边的事件也包含左边的事件。即关系“$\subset$”和“$\supset$”同时成立。

习题1. 假定一个工人生产了n个零件。事件A_i $(i=1, 2,\cdots,n)$表示他所生产的第i个零件是正品。试用A_i表示下列各事件：

i) 没有一个是次品；$\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\text{.}\right)$

ii) 至少有一个是次品；（为i)之逆。）

iii) 仅仅有一个是次品；$\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \cap \left(\bigcap\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} A_k\right)\text{。}\right)$

iv) 至少有两个不是次品。

$$\left[\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)\cup\left[A_i\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\overline{A}_j\right)\right]}\text{或}\right.$$

$$\left.\bigcup_{1\le i<j\le n}(A_i\cap A_j)\text{ 或 }\bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(A_i\cap A_j)\text{。}\right]$$

习题2。有一批含有重量为5斤，10斤，15斤，…，50斤的物品。假设在这批物品中，每种重量的至少有两件。从这批中选出两件，令X、Y分别表示选出的第一件及第二件的重量。于是一对数(X,Y)就代表这个试验的一个结果。利用XY平面指出这一试验的样本空间及下列事件：

i) $\{X=Y\}$；

ii) $\{X>Y\}$；

iii) 第二件的重量是第一件的重量的2倍；

iv) 第一件的重量比第二件少10斤；

v) 两件的平均重量小于30斤。

8．证明：对任意二个事件A与B，关系式：i) $A\subset B$；ii) $\overline{A}\supset\overline{B}$；iii) $A\cup B=B$；iv) $A\cap B=A$；v) $A\cap\overline{B}=\phi$等价。

〔证〕

i)⇒ii) 用反证法：设$\overline{A}\subset\overline{B}$成立。即"$A$不发生则$B$不发生"。这等价于$B\subset A$成立，从而与i)矛盾。故i)⇒ii)成立。

ii)⇒iii) 因为$\overline{B}\subset\overline{A}$表示"$B$不发生则$A$一定不发生"，这就是说$A$是$B$的部分事件。故$A\cup B=B$。

iii)⇒iv) 显然，$A\cap B\subset A$。反之，由iii)

$$A\cap B=A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)\supset A$$

故iv)得证。

iv)⇒v) 由iv)得

$$A\cap\overline{B}=(A\cap B)\cap\overline{B}=A\cap\phi=\phi$$

即v)成立。

v)⇒i) 用反证法：若i)不真，即有$B\subset A$成立。于是$A-B$不是不可能事件。即$A\cap\overline{B}\neq\phi$。这与v)的假设矛盾。因此v)⇒i)得证。

9．下列有关事件的关系式是否正确？若不正确，应如

何改正？

i) $A\cup B\cup C=A\cup[B-(A\cap B)]\cup[C-(A\cap C)]$；

ii) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$；

iii) $A\cup B-A=B$。

〔解i)〕 因为

$$
\begin{aligned}
&A\cup[B-(A\cap B)]\cup[C-(A\cap C)]\\
&\quad=A\cup[B\cap\overline{(A\cap B)}]\cup[C\cap\overline{(A\cap C)}]\\
&\quad=A\cup[B\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cup[C\cap(\overline{A}\cup\overline{C})]\\
&\quad=A\cup[B\cap\overline{A}]\cup[C\cap\overline{A}]\\
&\quad=(A\cup B)\cup(C\cap\overline{A})\\
&\quad=A\cup B\cup C
\end{aligned}
$$

故i)正确。

〔解ii)〕 因为

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C} \tag{1}$$

而

$$
\begin{aligned}
A\cup(B-C)&=A\cup(B\cap\overline{C})\\
&=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})
\end{aligned} \tag{2}
$$

要(1)式等于(2)式，显然要有

$$\overline{C}=A\cup\overline{C}$$

即

$$A\subset\overline{C}$$

由第8题可知，上式等价于

$$A\cap C=\phi$$

所以，ii)只有当$A\cap C=\phi$时才成立。

〔解iii)〕 因为

$$(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap\overline{A}=B-A$$

所以iii)式也不正确。应改为