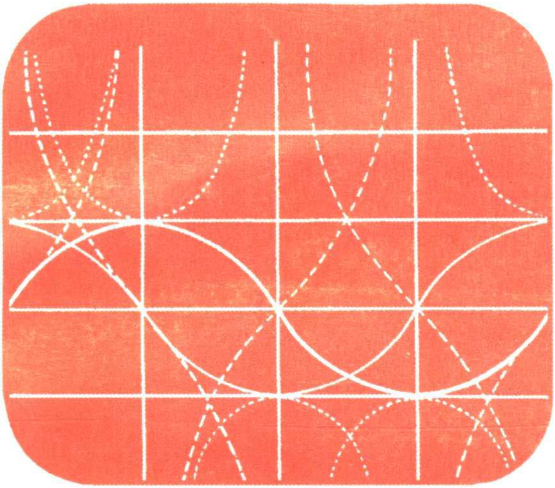

冯跃峰 著

棋盘上的组合数学

上海教育出版社

棋盘上的组合数学

冯 跃 峰著

上 海 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍了棋盘上的一些有趣而深刻的组合问题.其中有些问题已经解决,有些问题还没有解决,有待读者进一步研究.对已经解决的问题,作者重点剖析解决这些问题的基本途径;对没有解决的问题,则从不同的侧面进行了有益的分析和探索.这些问题都是数学奥林匹克的良好材料.

书中的大部分内容是作者在数学研究中的最新成果.但为系统性起见,书中也选用了个别其他作者的结果.这些都在书中一一注明,以示尊重.

本书共分五章,每章都配有习题,可供读者练习.书后附有解答,以供查对.

本书适合高等院校数学系师生,中学数学奥林匹克选手及广大中学生和数学爱好者阅读.

棋盘上的组合数学
冯 跃 峰著
上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
(邮政编码:200031)
各地新华书店经销　上海东华印务公司印刷
开本 787×1092　1/32　印张 7.75　字数 166,000
1998 年 9 月第 1 版　1998 年 9 月第 1 次印刷
印数 1-3,150 本
ISBN 7-5320-5912-X/G·6067　定价:7.30 元
如遇印刷质量问题请拨打 52815253×3019　地址:云岭西路 400 弄 251 号

前　　言

本书是一本专门研究棋盘上的数学问题的书.

棋盘上的数学问题,最初只是作为一种数学游戏.但随着数学的不断发展,特别是计算机的不断普及以及数学竞赛的深入开展,棋盘上的数学问题不断得到开发和利用.现在,棋盘上的数学问题涉及到程序设计,图论,对策论,组合论等的各个方面,而且在生产、生活实际中有着广泛的应用,因而引起人们对之进行深入的研究.

近几年来,作者在数学教学和数学研究中,遇到了大量与棋盘有关的数学问题.现将这些内容整理、归类成五个方面的问题,称之为棋盘上的组合数学.其中有些问题已经解决,有些问题还没有解决,有待读者进一步研究.对已经解决的问题,重点剖析解决这些问题的基本途径;对没有解决的问题,则从不同的侧面进行分析和探索.书中的大部分内容是作者在数学研究中的最新成果.但为系统性起见,书中也选用了一些专著、史料、书刊中的少量其他作者的结果,这些一般都在书中一一注明,以示尊重.但也有个别结果不知出处,因而只“援引作者的证明,而不是援引他们的姓名”(帕斯卡语).在此,特向这些原作者致以谢意!

在编排上,本书各章的内容是相对独立的,但也注意了各节之间的联系.每章之后配有习题,可供读者练习.书后附有解答,以供查对.不必否认,数学并不是一门人人都喜欢的学科.数学家帕斯卡就曾说过:数学研究的对象是这样的严肃,最好不要失去机会把它们变得稍微有趣些.正是基于这种想

法，作者写成了此书．倘若能够使读者对一些数学问题产生兴趣，甚至激发出读者研究数学的热情，那就是作者所希望的．

限于水平，书中谬误难免．恳请专家、读者不吝指正，以便有机会再版时修改．

作者非常感谢上海科技出版社的田廷彦编辑，他曾阅读了本书的初稿，并提供了宝贵的意见．

冯跃峰

1998年秋

目　　录

第一章　棋盘的覆盖

象棋是大家非常喜爱的一种博弈游戏,其工具由棋盘和棋子两个方面构成.阅读本书的读者也许都有过下棋的经历,对棋和棋盘是最熟悉不过的了.就是这样一个普普通通的棋盘,却隐含着大量深刻而有趣的数学问题.

当然,本书中所说的棋盘并不局限于 8×8 的国际象棋盘和 9×10 的中国象棋盘,而是数学化了的 $m\times n$ 棋盘.所谓 $m\times n$ 棋盘,是指由 m 行 n 列方格构成的 $m\times n$ 矩形,简称棋盘.每个方格称为棋盘的格,位于第 i 行第 j 列的格记为 a_{ij}.当 $i+j$ 为奇(偶)数时,称格 a_{ij} 为奇(偶)格.显然 $m\times n$ 棋盘共有 mn 个格.

本章中,我们讨论棋盘中的一个典型问题——棋盘的覆盖.

所谓棋盘的*覆盖*,是指用若干个图形去覆盖 $m\times n$ 棋盘.覆盖棋盘的每个图形也由若干个方格组成,我们称之为*覆盖形*.在棋盘的覆盖中,约定任何两个覆盖形互不重叠,且任何一个覆盖形的任何一个格总与棋盘的某个格重合.

1.1　棋盘的完全覆盖

定义 1　在棋盘的覆盖中,若各个覆盖形的总格数等于棋盘的总格数,则称此覆盖为*完全覆盖*.

显然,完全覆盖是一种既无间隙又不重叠的覆盖.

定义 2 在棋盘的覆盖中,若只含有一种形状的覆盖形,则称之为同形覆盖,否则称之为异形覆盖.

我们先讨论 $m\times n$ 棋盘的同形完全覆盖.一个最简单的结果如下:

定理 1 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 $k\mid m$ 或 $k\mid n$.

证:充分性是显然的.下证必要性.

现设 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖.在 $m\times n$ 棋盘的各个格中填数:第一列的格从上至下依次填 $1,2,\cdots,m$.此外,对其中的任何一行,所填各数从左至右构成公差为 1 的等差数列.这样,每一个 $1\times k$ 矩形在棋盘的覆盖中所盖住的格所填的数恰好构成模 k 的一个完系.因为 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖,所以,$m\times n$ 棋盘中所填的数属于模 k 的不同剩余类中的数的个数相等.

设 $m=pk+s$, $n=qk+t$ $(0\leqslant s,t<k)$.反设 $st\neq 0$,则不妨设 $0<s\leqslant t<k$.将 $m\times n$ 棋盘按图 1 方式分为 3 块:一个 $s\times t$ 矩形,一个 $pk\times n$ 矩形和一个 $s\times qk$ 矩形.

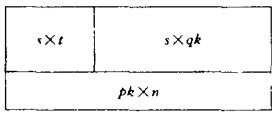

图 1

显然,$pk\times n$ 矩形和 $s\times qk$ 矩形中属于模 k 的各个不同剩余类中的数的个数相等,从而 $s\times t$ 矩形中属于模 k 的不同剩余类的数的个数也相等.考察 $s\times t$ 矩形中所填的数(图 2):

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & t-1 & t \\
2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & t & t+1 \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
s-1 & s & s+1 & \cdots\cdots & s+t-3 & s+t-2 \\
s & s+1 & s+2 & \cdots\cdots & s+t-2 & s+t-1
\end{array}
$$

图 2

将上述数表作如下改造：对表中任何一个数 a，若 $a>k$，则将 a 换作 $a-k$. 这样得到一个新的数表. 将新数表记为 A，考察数 t 与 $t+1$ 在表 A 中出现的次数. 显然，在前 t 条对角线上不出现 $t+1$. 又 $s+t-1<k+t-1<k+t+1$，所以在第 $j(j>t+1)$ 条对角线上也不出现 $t+1$. 所以，$t+1$ 都在第 $t+1$ 条对角线上，即 $t+1$ 共出现 $s-1$ 次. 注意到第 t 条对角线上的数都为 t，所以 t 在表 A 中至少出现 s 次. 于是，t 出现的次数多于 $t+1$ 出现的次数，矛盾.

有以上的定理 1 为基础，便可彻底解决 $m\times n$ 棋盘的 $p\times q$ 矩形完全覆盖问题.

定理 2 $m\times n$ 棋盘存在 $p\times q$ 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 m,n 满足下列条件之一：

(i) $p\mid x$ 且 $q\mid y$;

(ii) $p\mid x, q\mid x$，且存在自然数 a,b，使 $y=ap+bq$.

其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$.

证：充分性.

若 $p\mid x$ 且 $q\mid y$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$. 不妨设 $p\mid m$ 且 $q\mid n$. 令 $m=ps$，$n=qt$，则 $m\times n$ 棋盘可以划分为 $s\times t$ 个 $p\times q$ 矩形，结论成立；若 $p\mid x, q\mid x$，且存在自然数 a,b，使 $y=ap+bq$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$，不妨设 $p\mid m, q\mid m$，且存在自然数 a,b，使 $n=ap+bq$. 那么，将 $m\times n$ 棋盘划分为两个棋盘：一个 $m\times ap$ 棋盘，一个 $m\times bq$ 棋盘. 这两个棋盘均可被 $p\times q$ 矩形覆盖，结论成立.

必要性.

现设 $m\times n$ 棋盘存在 $p\times q$ 矩形的完全覆盖，从而 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times p$ 矩形的完全覆盖. 由定理 1，$p\mid m$ 或 $p\mid n$. 同理，$q\mid m$ 或 $q\mid n$. 这有以下两种情况：

(1)p,q 可分别整除 m,n 中的各一个，即有 $p|x,q|y$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$，则结论显然成立.

(2)p,q 只能同时整除 m,n 中的同一个. 不妨设 $p|m,q|m$，且 $p\nmid n,q\nmid n$. 考察至少盖住第一行中一个格的那些覆盖形，设其中以“$p\times q$”的方式覆盖的矩形有 b 块，以“$q\times p$”的方式覆盖的矩形有 a 块. 再注意到第一行共有 n 个格，所以 $n=ap+bq$，结论成立.

综上所述，定理获证.

$m\times n$ 棋盘的 $p\times q$ 矩形完全覆盖是棋盘覆盖中最简单的一种情形. 稍复杂一些的覆盖是所谓棋盘的“$k-L$ 形”完全覆盖.

定义 3 由 k 个方格组成的形如图 3 所示的图形称为 $k-L$ 形，记为 $L(AB)$. 其中线段 AB 称为 $k-L$ 形的底线，线段 AF 称为 $k-L$ 形的顶线. 以顶线为边界的两个方格称为顶格，其余的 $k-2$ 个方格称为底格. 仅与顶格相邻的顶格叫做外顶格，另一个顶格叫做内顶格.

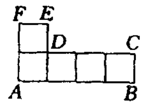

图 3

定义 4 在棋盘的 $k-L$ 形覆盖中，若某个 $k-L$ 形的底线是横(纵)向的，则称此 $k-L$ 形在覆盖中是横(纵)向覆盖的，并称此 $k-L$ 形所覆盖的方格是被横(纵)向覆盖的.

1982 年，薛通和王元元共同解决了棋盘的 $3-L$ 形，$4-L$ 形完全覆盖问题(见《数学的实践与认识》，1987 年第 4 期，p.35)，但他们给出的证明相当复杂. 后来，笔者得到了这两个定理的简单证明，今介绍如下：

定理 3 $m\times n$ 棋盘不存在“$3-L$ 形”的完全覆盖的充分必要条件是：要么 $3\nmid mn$，要么 m,n 中一个为 3，另一个为奇数.

证：充分性.

首先，$3 \nmid mn$ 时，$m \times n$ 棋盘显然不存在"3 - L 形"的完全覆盖，结论成立. 其次，考察 $3\times(2n-1)$ 棋盘. 当 $n=1$ 时，3×1 棋盘显然不存在"3 - L 形"的完全覆盖，结论成立；当 $n>1$ 时，反设 $3\times(2n-1)$ 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖. 如图 4，将 $3\times(2n-1)$ 棋盘的各个格用 1，2，3，…编号，并用 (i,j,k) 表示编号为 i,j,k 的三个格被同一块 3 - L 形盖住.

1	6	7	……
2	5	8	……
3	4	9	……

图 4

考察 $3\times(2n-1)$ 棋盘前两列的格在覆盖中的所有可能覆盖方式. 它们可用下述树图表示：

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1,6,2) & \text{①} \\
 & (1,6) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,6,5) & \text{②} \\
(1) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,2) \arrow[r] & (1,2,5) & \text{③}
\end{tikzcd}
$$

考察其中编号为 3 的格的覆盖. 对于情形③，格(3)无法覆盖，因而这种情形不可能出现；对于情形①，则必出现(3,4,5)；对于情形②，则必出现(2,3,4). 所以，不论出现那种情形，当 $3\times(2n-1)$ 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖时，$3\times(2n-3)$ 棋盘亦存在"3 - L 形"的完全覆盖. 如此下去，有 3×1 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖，矛盾.

必要性.

首先，3×2 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖，从而 $3\times2n$ 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖.

其次，我们证明：当 $3\mid mn$，且 m,n 都不为 3 时，$m\times n$ 棋盘存在"3 - L 形"的完全覆盖.

实际上，由 $3\mid mn$，有 $3\mid m$，或 $3\mid n$. 不妨设 $n=3k(k>1)$.

有以下几种情形:

(1)当 $m=2t$ 时,$2t\times 3k$ 棋盘可划分为 kt 个 2×3 矩形,所以存在"$3-L$ 形"的完全覆盖.

(2)当 $m=5$ 时,若 $k=2p(p\in N)$,则 $n=6p$.此时,$5\times 6p$ 棋盘可划分为 p 个 5×6 矩形;

若 $k=2p+1(p\in N)$,则 $n=6p+3=6(p-1)+9$.此时,$5\times(6p+3)$棋盘可划分为 $p-1$ 个 5×6 矩形和一个 5×9 矩形.由图 5 和图 6 可知,5×6 矩形和 5×9 矩形都存在"$3-L$ 形"的完全覆盖.从而 $m\times n$ 棋盘存在"$3-L$ 形"的完全覆盖.

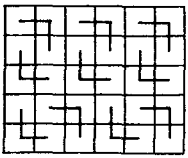

图 5

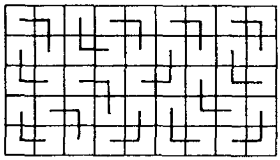

图 6

(3)当 $m=2t+1(t>2)$时,$m=2(t-2)+5$.此时,$m\times 3k$ 棋盘可划分为一个 $5\times 3k$ 矩形和一个 $2(t-2)\times 3k$ 矩形.由前面的(1),(2)两种情形知,$m\times n$ 棋盘存在"$3-L$ 形"的完全覆盖.定理 3 获证.

定理 4 $m\times n$ 棋盘存在"$4-L$ 形"的完全覆盖的充分必要条件是:$8\mid mn$,且 $m,n>1$.

证:充分性.

若 $4\mid m,2\mid n$,则令 $m=4k,n=2t$.此时,$m\times n$ 棋盘可划分为 kt 个 4×2 矩形,所以存在"$4-L$ 形"的完全覆盖.

若 $8\mid m$,则有以下两种情况:

(1)n 为偶数.此时由上知,结论成立;

(2)n 为奇数.令 $n=2t+1(t\in N)$,则 $n=2(t-1)+3$.此时,$m\times n=8k\times n=8k\times 2(t-1)+8k\times 3$,所以 $m\times n$ 棋盘可划分为 $k(t-1)$个 8×2 矩形和 k 个 8×3 矩形.显然,8×2 矩形存在"4 - L 形"的完全覆盖.又如图 7,8×3 矩形存在"4 - L 形"的完全覆盖.所以 $m\times n$ 棋盘存在"4 - L 形"的完全覆盖.

必要性.

首先,当 m 或 $n=1$ 时,$m\times n$ 棋盘显然不存在"4 - L 形"的完全覆盖.

其次,若 $m\times n$ 矩形存在"4 - L 形"的完全覆盖,则必有 $4\mid mn$,从而 m,n 中必有一个偶数.将 $m\times n$ 棋盘的各个格用 1,-1 编号(图 8),使任何两个相邻(有公共边)的格不同号,则棋盘中 1 与 -1 的个数相等.显然,每个"4 - L 形"盖住的 4 个格编号之和为 2 或 -2.注意到棋盘中所有格的编号之和为 0,从而覆盖中,其"和"为 2 与其"和"为 -2 的"4 - L 形"的个数相等.于是共有偶数个"4 - L 形",即 $8\mid mn$.定理 4 获证.

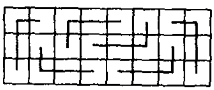

图 7

1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

图 8

对一般的自然数 k,$m\times n$ 棋盘的"k - L 形"完全覆盖问题至今还没有彻底解决.1996 年,我们解决了 k 为质数时的"k - L 形"覆盖问题.先看 $k=5$ 的情形.为此,我们先证明如下的两个引理:

引理 1 当 m 为奇数时,若 $m\times n$ 棋盘 M 存在"k - L

形”完全覆盖，则 M 的第一列格中必有被纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖的.

证：首先证明，$m\times n$ 棋盘的第一列格中必有被纵向覆盖的.实际上，反设 M 在覆盖中第一列格都是横向覆盖的.若存在一个格 a_{i1}，它被某个“$k-L$ 形”$L(AB)$的底格所覆盖(图9)，那么，第一列中与 $L(AB)$的外顶格在同一行的那个格不能被横向覆盖，矛盾.于是，第一列的所有格都被一些横向“$k-L$ 形”的顶格所覆盖.但每个“$k-L$ 形”都有 2 个顶格，当一个横向“$k-L$ 形”有一个顶格覆盖第一列中的格时，它的另一个顶格也覆盖第一列中的格.于是，这些横向“$k-L$ 形”共盖住第一列的偶数个格.但 $m\times n$ 棋盘的第一列有 m(奇数)个格，矛盾.于是第一列中必有被纵向覆盖的格，设 a_{i1}是这样的一个格.若 a_{i1}被纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖，则结论成立；若 a_{i1}被纵向“$k-L$ 形”的顶格覆盖，则 $a_{i-1,1}$或 $a_{i+1,1}$必被另一个纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖，结论成立.引理 1 获证.

引理 2 对任何奇数 k 和自然数 n，$k\times(2n-1)$棋盘不存在“$k-L$ 形”完全覆盖.

证：反设 $k\times(2n-1)$棋盘 M 存在“$k-L$ 形”完全覆盖.由引理 1，在覆盖中 M 的第一列必有一个格是被某个纵向 $k-L$ 形的底格覆盖的.显然，此“$k-L$ 形”在第一列中的覆盖方式本质上只有两种：一是外顶格在边界上，二是外顶格不在边界上(见图 10 和图 11).

对于第一种情形，考察格 a_{12}的覆盖，它只能被横向覆盖.这样，a_{22}无法覆盖，矛盾.对于第二种情形，考察格 a_{11}的覆盖.若它被横向覆盖.则 a_{22}无法覆盖，矛盾.于是，格 a_{12}只能被纵向覆盖.这样，$k\times(2n-3)$棋盘存在“$k-L$ 形”的完全覆盖.如此下去，$k\times1$ 棋盘存在“$k-L$ 形”的完全覆盖，矛盾.

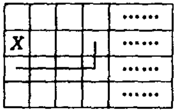

图 9

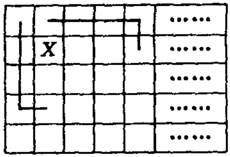

图 10

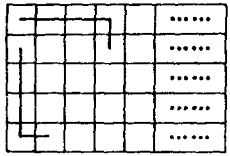

图 11

定理 5 $m\times n$ 棋盘不存在"5 - L 形"的完全覆盖的充分必要条件是:m,n 满足下列 3 个条件之一:

(i) $5\nmid mn$;

(ii) m,n 中有一个为小于 5 的奇数;

(iii) m,n 中一个为 5,另一个为奇数.

证:充分性.

(i) $5\nmid mn$ 时,$m\times n$ 棋盘显然不存在"5 - L 形"的完全覆盖,结论成立.

(ii) 反设 $m\times n$ 棋盘 M 存在"5 - L 形"的完全覆盖.不妨设 m 是小于 5 的奇数,则 $m\leqslant 3$.由引理 1,M 的第一列至少有一个格是被纵向覆盖的,这与 $m\leqslant 3$ 矛盾.

(iii) 直接利用引理 2,结论成立.

必要性.

首先,$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 5×2 矩形,从而存在"5 - L 形"的完全覆盖.

其次,设 $5\mid mn$,且 m,n 都不等于 5 和 3.此时,$5\mid m$ 或 $5\mid n$.不妨设 $5\mid n$,令 $n=5k(k>1)$.

(1) 当 $m=2s$ 时,$m\times n=2s\times 5k$.此时 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 5×2 矩形,从而存在"5 - L 形"的完全覆盖.

(2) 当 $m=7$ 时,若 $k=2t$,则 $m\times n=7\times 5k=7\times 10t$.此时 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 7×10 矩形.由图 12 可

知，7×10 矩形可以划分为若干个 5×2 矩形，即存在"$5-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

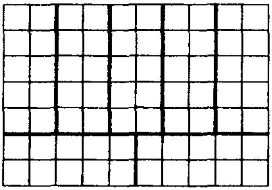

图 12

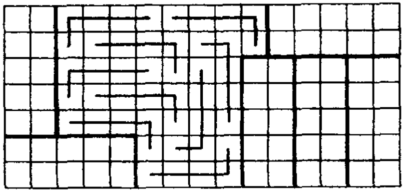

图 13

若 $k=2t+1$,则 $m\times n=7\times5k=7\times5(2t+1)=7\times(10t+5)=7\times[10(t-1)+15]=7\times10(t-1)+7\times15$. 由图 13 可知,$7\times15$ 矩形存在"$5-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

(3)当 $m=2r+1(r>3)$时,$m\times n=(2r+1)\times5k=[2(r-3)+7]\times5k=2(r-3)\times5k+7\times5k$. 注意到 $k>1$,于是,k 为偶数时,$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 2×5 矩形和若干个 7×10矩形,所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖;当 k 为奇数时,$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 2×5 矩形,若干个 7×10 矩形和一个 7×15 矩形,所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

综上所述,定理 5 获证.

为了讨论棋盘的"$k-L$ 形"覆盖问题,我们还需要证明如下引理:

引理 3 对任何奇数 k,$(k+2)\times3k$ 棋盘存在"$k-L$ 形"的完全覆盖.

证:如图 14,在$(k+2)\times3k$ 棋盘的左上角分割出一个 k

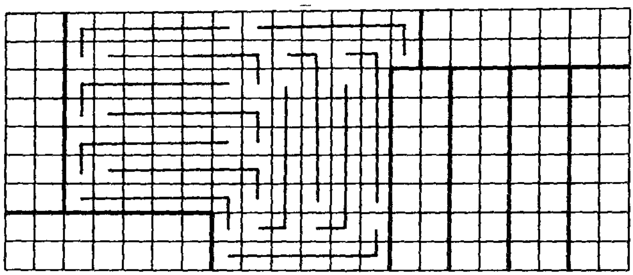

图 14

$\times 2$ 矩形,再在左下角分割出一个 $2\times k$ 矩形,在右下角分割出一个 $(k+1)\times k$ 矩形,在右上角分割出一个 $2\times k$ 矩形.再将下述各组格分别用一个“$k-L$ 形”盖住:$(a_{k+2,k+1}, a_{k+2,k+2}, \cdots, a_{k+2,2k-1}, a_{k+1,2k-1})$, $(a_{k-2,3}, a_{k-2,4}, \cdots, a_{k-2,k+1}, a_{k-1,k+1})$, $(a_{1,k+2}, a_{1,k+3}, \cdots, a_{1,2k}, a_{2,2k})$, $A=(a_{2,3}, a_{1,3}, a_{1,4}, \cdots, a_{1,k+1})$, $B=(a_{2,4}, a_{2,5}, \cdots, a_{2,k+2}, a_{3,k+2})$, $C=(a_{2,2k-2}, a_{2,2k-1}, a_{3,2k-1}, \cdots, a_{k,2k-1})$, $D=(a_{3,2k-2}, a_{4,2k-2}, \cdots, a_{k+1,2k-2}, a_{k+1,2k-3})$.最后,将位于第 3 行到第 $k-1$ 行且在第 3 列到 $k+2$ 列的格从上至下依次按 A,B 的方式覆盖,将位于第 2 行到第 $k+1$ 行且在第 $k+3$ 列到 $2k-3$ 列的格从右至左依次按 C,D 的方式覆盖即可.引理 3 获证.

定理 6 对一切奇质数 p, $m\times n$ 棋盘不存在“$p-L$ 形”的完全覆盖的充分必要条件是 m,n 满足下列 3 个条件之一:

(i) $p\nmid mn$;

(ii) m,n 中有一个为小于 p 的奇数;

(iii) m,n 中一个为 p,另一个为奇数.

证:充分性.