初中数学解题方法与技巧

翁抗生　陈桂隆

中学生读物

广 东 科 技 出 版 社

中学生读物

初中数学解题方法与技巧

翁抗生　陈桂隆

广 东 科 技 出 版 社

初中数学解题方法与技巧

Chuzhong Shuxue Jieti Fangfa yu Jiqiao

翁抗生　陈桂隆

*

广东科技出版社出版发行

广东省新华书店经销

广东新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　5.125印张 100,000字

1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷

印数1—60,200册

ISBN 7—5359—0127—1

O·9　　定价1.00元

前　　言

学生从小学到中学，是学习生活上的一个转折，新的学习内容，新的学习环境，使中学生抱着很大的热情，希望学到更多的新知识。但是，也有不少学生上中学后感到学习数学很困难，学习掉队了。感到学习困难表现在：遇到问题时或束手无策，或试着用一种方法不成功之后，便再无其他方法了，这是思路狭窄的表现。也有学生对给出较多已知条件的问题分不清因果关系，象对着一堆乱麻理不出头绪，这是思路混乱的表现。还有的学生在考虑问题时采用了错误的推理或判断，或用待证的结论作为前提来推证该结论，这都违反了科学规律，是思路错误的表现。要使思路开阔、清楚、正确不是一朝一夕的事，而是要在长期的学习过程中逐步培养起来的。

有的学生在小学时，比较注意提高运算和列式解应用题的能力，而不太注意理解和记忆数学概念。小学数学中概念和定理较少，四则运算在算术数中进行，情况较简单，一般不用讨论，只要列式对、并计算准确就能得到正确的答案。而中学数学中有许多问题要从概念或定理出发，才能找到正确的解决方法和答案。因此，要学好中学数学，就要比小学时更加注意理解和记忆数学概念和定理。记忆的方法是很多的，做练习就是其中之一，如果在做几道习题中重复运用了某个概念或定理，那么对它的记忆一定会很深刻。

中学数学要求学生通过学习，逐渐培养创造思维的能力。这种思维的特点是创新，不是重复。一般认为“创造”是创造者不因袭、不模仿他人的思想或行为模式，这说明“创造”是“模仿”的对立面；然而“创造”与“模仿”还有统一的一面，即要在模仿的基础上创造。初中学生学习数学的时间不算长，解决问题的方法和手段都较单一，如果不是先通过模仿，学习别人的思想方法与技巧，积累丰富的解题经验，在遇到新问题的时候，就很难会联想到类似的其他问题，并灵活运用已掌握的各种解题手段解决新问题。这就是说，没有基础是难以创新的。课本中有许多的习题是让学生模仿例题练习使用的，而有一些综合性的习题是锻炼学生的思维能力的。因此我们提倡多做一些练习题。

在本书里，列举了许多例题，基本上已把初中数学的基本知识概括在内了，并尽可能详细地对例题进行分析，也就是对解题思想方法和技巧进行分解，以便帮助读者弄清解题的细节，从中领悟解题方法。书中各章附有习题供读者练习和参考。

本书承蒙华南师范大学数学系黄番华同志审校，在此表示感谢。

由于我们水平有限，教学经验不足，不妥之处请读者指正。

编　者

一九八四年七月三日于广州

目　录

第一章 代　　数

一、实　　数

这一部分的要求是：理解有理数、无理数、实数的概念，实数和数轴上的点一一对应的关系；能够熟练地进行实数的加、减、乘、除、乘方、开方运算。

1．实数的分类

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\
\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}
\end{cases}
$$

确定了原点、方向和单位长度的直线叫做数轴。所有的实数都可以用数轴上的点表示；反过来，在数轴上每一个点的位置都能用一个实数来表示。

2．绝对值

(1) 定义：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

(2) 符号：实数a的绝对值记作$|a|$，

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

(3) 几何意义：a的绝对值$|a|$可以看成数轴上与实数a对应的点到原点之间的距离。

3．实数的运算

(1) 在实数范围内，加、减、乘、除、乘方的结果仍为实数。

(2) 在实数范围内，开方运算不一定可进行。正数的奇次方根是一个正数；负数的奇次方根是一个负数；正数的偶次方根是两个相反的数；负数的偶次方根没有意义；零的任何次方根仍是零。

(3) 算术根：正数的正的方根叫做算术根。零的算术根是零；负数没有算术根。

例 1　a、b是什么数时，$\frac{b}{a}$是(1)正数；(2)负数；(3)零；(4)整数；(5)没有意义。

思考方法：a，b都表示任意的实数，由于a，b符号的异同，这两个数中可能有为零的数，可能其中有一个是另一个数的整倍数，这就使$\frac{b}{a}$表示几种不同类的数。依此逐个进行分析，就可得出结果。

解：(1) a，b同号时；(2) a，b异号时；(3) $b=0$，$a\neq0$；(4) b是a的整数倍；(5) $a=0$。

例 2　当x是什么数时，有(1) $|x-2|=3$；(2) $|x-2|=0$；(3) $|x-2|=-3$。

思考方法：从绝对值的定义知，$|x-2|$中的$x-2$，可

为正数、负数或零。因此，（1）有$x-2=\pm3$两种情形；（2）仅有$x-2=0$；（3）由于$|x-2|$表示非负数，故无解。

解：（1）$\because\ |x-2|=3$

则 $x-2=3$ 或 $x-2=-3$

$\therefore\ x=5$ 或 $x=-1$

（2）$\because\ |x-2|=0$

则 $x-2=0$

$\therefore\ x=2$

（3）$\because$ 任何数的绝对值都是非负数，$\therefore$ 本题无解。

例 3　下列结论是否正确？在什么条件下正确？

（1）两个数中，绝对值较大的数大；（2）$-a$是负的；（3）a大于$-a$。

解：（1）不正确。当两个数都是非负数时才正确。

（2）不正确。当a是正数时才正确。

（3）不正确。当a是正数时才正确。

注：随着数的范围的扩大，比较数的大小时必须注意它们的范围，否则会得到错误的结论。

例 4　计算：（1）$0.25^{10}\times4^{9}$

（2）$\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\times\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}\div\left(-\frac{1}{2}\right)-3^{2}-(-3)^{2}\right]$
$\times(-1)^{21}$

（3）$\frac{1}{0.32}+\frac{3}{0.3}-\frac{0.1}{16}+\frac{0.3}{0.001}$

思考方法：（1）将式中的0.25化为$\frac{1}{4}$并使分子分母同时乘方后，就可通过约简得出结果。

（2）只要将前面两项的分子分母同时乘方，就可约简。

其他各项也同时化为整数而使运算简化。

(3) 先把含小数的分数化为分子和分母均为整数的分数，然后通分，再进行加减运算。

解：(1) $0.25^{10}\times 4^{9}=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\times 4^{9}=\frac{4^{9}}{4^{10}}=\frac{1}{4}$

(2) 原式 $=\left[-\frac{3^{3}}{2^{3}}\times\frac{4^{2}}{3^{2}}\times(-2)-9-9\right]\times(-1)^{21}$

$=(12-18)\times(-1)$

$=6$

(3) 原式 $=\frac{100}{32}+\frac{30}{8}-\frac{1}{160}+\frac{300}{1}$

$=\frac{500}{160}+\frac{600}{160}-\frac{1}{160}+300$

$=\frac{1099}{160}+300$

$=6\frac{139}{160}+300$

$=306\frac{139}{160}$

习 题 一

1. 指出下列各数中哪些是自然数、整数、有理数、无理数、实数，并将它们按从小到大的顺序排列起来。

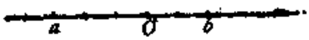
0，3.1416，0.3，-1，π，$7\frac{1}{3}$，$0.1010010001\cdots$，

$\sqrt{7}$，1.4142，4。

2. x是什么数时，(1) $\frac{|x|}{x}=1$；(2) $\frac{|x|}{x}=-1$；

(3) $\frac{|x|}{x}>0$；(4) $\frac{|x|}{x}<0$；(5) $\frac{|x|}{x}$没有意义。

3. a，b两数在数轴上的对应点如图所示：



第3题

(1) 在数轴上表示$-a$和$-b$；

(2) 决定下列式子的值是正的还是负的：

① $a-b$；　② $a+b$；　③ $|a|-|b|$

(3) 化简$|a+b|+|b-a|+|a|+|b|$

4. 计算$\frac{x}{|x|}-\frac{|x|}{x}$　$(x\neq0)$

5. 不用绝对值符号，写出式子$|x-5|$来。

6. 计算

(1) $-2\frac{1}{2}+5\frac{3}{5}+(-2)^3\times\left(-\frac{5}{7}\right)^2-0\div42$

(2) $[(-2)^3-(-1)^2]\times\frac{1}{-0.3^2}\div\left(3\frac{1}{3}\right)^2\times$

$\left|\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right|$

二、代　数　式

这一部分的主要要求是：理解代数式和恒等变形的概念，掌握代数式的运算规律和因式分解的方法，以及各种代数式的求值和化简的方法。

1．代数式

用运算符号（＋、－、×、÷、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式，单独一个数或一个表示数的字母也叫做代数式。

代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2．恒等式

如果两个代数式，其中的字母在其取值范围内不论取什么值，这两个代数式的值都相等时，则说这两个代数式恒等。表示两个式子恒等的等式叫做恒等式。

例如，$2x+3(x+1)=5x+3$ 是恒等式，当 x 为任何值时，式子左右两边的值都相等；$\frac{2}{x+3}+\frac{5}{x-1}=\frac{7x+13}{(x+3)(x-1)}$ 是恒等式，当 $x\neq-3$ 且 $x\neq1$ 时，式子左右两边的值都相等；$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 是恒等式，当 $a\geqslant0$ 且 $b\geqslant0$ 时，式子左右两边的值都相等。

如果两个多项式合并同类项后对应项系数都相等，那么这两个多项式恒等；反过来，如果两个多项式恒等，则它们合并同类项后，对应项系数都相等。

3．代数式的恒等变形

把一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式，叫做代数式的恒等变形。

整式的四则运算、因式分解、分式运算、根式运算等一般是恒等变形。

4. 乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

5. 因式分解

把一个多项式化为几个整式相乘的积的形式，叫做多项式的因式分解．分式运算、解方程常要用到因式分解，在研究三角函数式的恒等变形时，也常要用到它。

因式分解的方法有：(1) 提取公因式法；(2) 应用公式法；(3)分组分解法。

把一个二次三项式分解为两个一次因式的积，除可运用上述的方法外，还可用如下方法：(1) 十字相乘法；(2) 配方法；(3) 求根法．

注：①对多项式进行因式分解时，应先考虑提取公因式，而且对各项中公因式应该一次提尽．例如

$$\begin{aligned}116x^{n-2}-29x^n&=29x^{n-2}(4-x^2)\\&=29x^{n-2}(2-x)(2+x)\end{aligned}$$

②多项式的因式分解到什么时候为止，与指定的范围有关．分解时要彻底，即必须分解到每个因式在指定的范围内不能再分解为止。例如，多项式x^4-9在有理数范围内分解：

$$x^4-9=(x^2+3)(x^2-3)$$

分解到此为止。如在实数范围内分解，则要继续分解下去：

$$\begin{aligned}x^4-9&=(x^2+3)(x^2-3)\\&=(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\end{aligned}$$

如无特别说明，多项式的因式分解在实数范围内进行。

③对一个多项式进行分解因式，方法可以不同，但结果

是一样的．例如

$$
\begin{aligned}
& ax^2-bx^2-bx+ax+a-b \\
&= a(x^2+x+1)-b(x^2+x+1) \\
&= (x^2+x+1)(a-b)
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
& ax^2-bx^2-bx+ax+a-b \\
&= x^2(a-b)+x(a-b)+(a-b) \\
&= (a-b)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

6．分式

除式中含有字母的有理式叫做分式。

基本性质：分式的分子和分母都乘或除以不等于零的同一个代数式，分式的值不变．分式的基本性质是分式恒等变形（如约分、通分）的根据．

符号法则：$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b}$

运算：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$，　$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$$ （n是正整数）

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$$ （$a>0$，$b\geqslant 0$，n是正整数）

繁分式：分式的分子、分母中含有分式。如$\frac{\frac{c}{b}}{a}$，

$\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{1-x}}$等等，繁分式可以根据分式的基本性质进行化简．

7．根式

表示方根的代数式叫做根式．$\sqrt[n]{a}$叫做n次根式，n叫做根指数，a叫做被开方数．特别地，$\sqrt{a}$叫做二次根式，其中$a\geqslant 0$。

基本性质：$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant 0)$

符合下述三个条件的根式叫最简根式：(1) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；(2) 被开方数不含分母；(3) 被开方数的指数和根指数是互质数．

同类根式：几个根式化成最简根式以后，如果被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式叫做同类根式．

根式的运算：

根式相加、减运算：把同类根式分别合并．

根式的乘除运算：同次根式相乘（除）时把被开方数相乘（除），根指数不变；异次根式相乘（除）时，先化成同次根式，然后按同次根式进行运算．

根式的乘方：把被开方数乘方，根指数不变．

根式开方：被开方数不变，把乘方的次数与根指数相乘．

分母有理化方法：把分子分母都乘以同一个适当的根式，使分母不含根式．

例1　已知$x^3+ax^2+bx+c\equiv(x+2)(x-2)(x-7)$，求系数$a$，$b$，$c$。

思考方法：只要将恒等式右边展开，合并同类项后，就可找出左、右两边对应项（x^3，x^2，x及常数项）的系数从而求出a，b，c。

解：∵　$x^3+ax^2+bx+c\equiv(x+2)(x-2)(x-7)$

∴　$x^3+ax^2+bx+c\equiv x^3-7x^2-4x+28$

比较对应项的系数，得

$$a=-7,\ b=-4,\ c=28$$

例 2　把多项式$2(a-b)^2+(a-b)-6$分解因式。

解：$2(a-b)^2+(a-b)-6=[(a-b)+2][2(a-b)-3]$

$$=(a-b+2)(2a-2b-3)$$

注：这里，把（$a-b$）看作一个字母，用十字相乘法分解。

例 3　把x^4+4因式分解。

解：$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

注：如需加一辅助项时，一定要同时减去所添置的辅助项。

例 4　分解因式：$4x^2+8x-1$

解：解方程$4x^2+8x-1=0$，得

$$x=\frac{-8\pm4\sqrt{5}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$$

即　$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$，　$x_2=\dfrac{-2-\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore\quad 4x^2+8x-1=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})$$

注：ax^2+bx+c分解后的一般形式是$a(x-x_1)(x-x_2)$。

例 5　当x等于什么数时，分式$\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}$没有意义？