

CHUDENGSHUXUE



初等数学

(中册·几何)

湖南师范学院数学系编

湖南人民出版社

初 等 数 学

(中册·几何)

湖南师范学院数学系编

*

湖南人民出版社出版

湖南省新华书店发行

湘潭地区印刷厂印刷

*

印数: 60,001—100,000册 印张: 9.75

1978年4月第1版第1次印刷

1978年9月第2次印刷

统一书号: 13109·36 定价: 0.57元

目 录

引 言	(1)
第一章 预备知识	(3)
第一节 直线	(3)
第二节 角	(6)
一、角的概念	(6)
二、角的大小	(7)
三、角的度量	(10)
第三节 相交直线	(11)
习题	(13)
第四节 平行直线	(15)
一、平行线的概念	(15)
二、平行线的判定	(17)
三、平行线的性质	(20)
习题	(22)
第二章 三角形	(27)
第一节 一个三角形	(27)
一、三角形的概念	(27)
二、三角形的边、角关系	(30)
习题	(33)
习题	(40)

第二节 两个三角形	(44)
一、全等三角形	(44)
二、三角形全等的判定	(45)
习题	(53)
第三节 线段的中垂线和角的平分线	(57)
习题	(62)
第四节 作图的基本知识	(63)
习题	(69)
第三章 四边形	(71)
第一节 特殊四边形	(72)
一、平行四边形	(72)
二、特殊的平行四边形	(76)
三、梯形	(80)
习题	(84)
第二节 平行线等分线段定理	(87)
习题	(93)
第三节 对称图形	(96)
一、轴对称图形	(96)
二、中心对称图形	(100)
三、旋转	(103)
习题	(107)
第四章 相似形	(110)
第一节 线段的比和成比例的线段	(110)
一、线段的比和比例	(110)

二、比例的性质	112
习题	(115)
第二节 平行线截得的比例线段	(117)
习题	(123)
第三节 相似三角形	(125)
一、相似多边形	(125)
二、相似三角形的判定	(127)
习题	(133)
三、相似三角形的性质	(137)
四、勾股定理	(139)
习题	(143)
第四节 位似图形	(147)
一、位似变换	(147)
二、放缩尺	(150)
习题	(152)
第五章 圆	(154)
第一节 一个圆	(154)
一、圆的确定	(156)
二、圆的对称性	(157)
三、圆心角、圆周角与弧	(159)
习题	(166)
第二节 直线与圆	(171)
一、直线与圆的位置关系	(171)
二、切线的性质	(172)

三、弦切角·····	(174)
四、有关圆的比例线段·····	(177)
习题·····	(181)
第三节 两个圆·····	(184)
一、两圆的位置关系·····	(184)
二、两圆的公切线·····	(186)
三、直线和弧、弧和弧的吻接·····	(188)
习题·····	(191)
第四节 正多边形与圆·····	(194)
一、等分圆周·····	(195)
二、圆周长·····	(199)
习题·····	(204)
第六章 轨 迹·····	(209)
第一节 轨迹的意义·····	(209)
第二节 轨迹命题的证明·····	(211)
习题·····	(215)
第三节 轨迹问题的探求·····	(217)
第四节 轨迹在作图中的应用·····	(220)
习题·····	(221)
第七章 空间直线和平面·····	(223)
第一节 平面·····	(223)
一、平面及其基本性质·····	(223)
二、水平放置着的平面图形的画法·····	(227)
习题·····	(230)

第二节 直线与直线的位置关系	(231)
一、空间两直线的位置关系	(231)
二、平行直线	(233)
三、异面直线所成的角	(235)
习题	(237)
第三节 直线与平面的位置关系	(238)
一、直线与平面的平行	(239)
二、直线与平面的垂直	(241)
三、平面的垂线和斜线的长	(245)
四、直线和平面所成的角	(248)
习题	(249)
第四节 平面与平面的位置关系	(252)
一、平行平面	(253)
二、二面角, 二面角的平面角	(256)
三、垂直平面	(258)
习题	(262)
第五节 多面角	(263)
习题	(267)
第八章 几何中的逻辑知识初步	(269)
第一节 几何概念	(269)
一、概念的内涵与外延	(270)
二、概念的定义	(271)
三、概念的分类	(273)
习题	(274)

第二节 几何命题·····	(275)
一、几何命题的意义·····	(275)
二、几何命题的四种形式与关系·····	(276)
三、充分条件、必要条件、充要条件·····	(280)
习题·····	(282)
第三节 几何的推理·····	(283)
一、逻辑思维的基本规律·····	(283)
二、几何中的推理·····	(285)
习题·····	(288)
第四节 几何命题的证明·····	(290)
一、证明的意义与表达形式·····	(290)
二、间接的证明方法——反证法·····	(292)
三、证明与解题前的分析·····	(295)
习题·····	(298)
附表一、常用的平面图形面积计算公式	
附表二、常用的立体图形的表面积与体积计算公式	

引 言

毛主席教导我们：“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”我们周围的各个物体，它们除了有颜色、重量、硬度等方面的差别外，还有形状、大小和位置的差别。对我们周围物体的形状、大小、位置关系的研究，是很重要的。例如，飞机的形状，要求能适合高速度的飞行；人民公社修建粮仓的大小，要求能储藏一定数量的谷物；生产队的晒谷场，要求选择在受光时间长且有利于运输的位置上，等等。几何学就是研究物体的形状、大小、位置这些方面的特殊矛盾的科学。

恩格斯指出：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。……，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点，没有厚度和宽度的线……。”这些仅有位置的点、仅有长度的线和仅有长宽的面，是在现实的基础上高度抽象的产物，是组成几何图形的基本元素。

列宁指出：“物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以

及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”因此我们研究由抽象的点、线、面所构成的几何图形，不是为抽象而抽象，而是为了反映自然，改造自然。

所有的点都在同一个平面内的图形，叫做平面图形；所有的点不全在同一个平面内的图形，叫做空间图形。本书第一至第六章讨论平面图形，第七章讨论空间图形。

第一章 预备知识

第一节 直 线

直线是组成几何图形的一个基本元素。拉紧的细线，从小孔射进室内的光线，都是笔直的，给人们以直线的形象。由于空间的无限性，对于一条直线，我们要想象它的两方是可以无限伸长的。

直线通常用它上面任意两个点的大写字母来表示，也可以

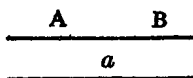


图 1—1

只用一个小写字母来表示。如图 1—1 中的两条直线，分别记作“直线AB”和“直线a”。

实践告诉我们，直线具有下面

一个性质：

经过两个不同的点可以作一条直线，并且只能作一条直线。

例如，木工师傅在木板上画直线时，经过木板上两个点，用拉紧的墨线可以弹出一条直线，而且也只有一条。

象几何图形这样的基本性质，已经为人们反复的实践所证实，可以作为今后推理的出发点，我们叫它做几何学的公理。根据这条公理，可以推得下面一个判断：

两条不同的直线，最多只有一个公共点。

因为两条直线如果有两个公共点，那么根据上述公理，这两条直线就重合了。

如果两条不同的直线有公共点，我们称这公共点为两直线的交点，这时叫两直线相交。

关于几何图形性质的判断，如果能够用逻辑推理的方法证明它是正确的，这就叫几何学的定理。

在直线上的一个点，把这直线分成两个部分；每一部分都象从发光点射出的光线，称为射线。这个点称为射线的端点，因此射线只能在一个方向无限伸长。

射线通常用它的端点和射线上另外任意一点的大写字母来表示，端点的字母写在前面。如图 1—2 中的射线，记作“射线OP”。

桌子或书本的边缘都有两个端点，因此可以把它看作是直线上两点间的一部分。我们把直线上任意两点间的部分叫做线段。

在这里，“直线上任意两点间的部分叫做线段”这句话，明确地指出了“线段”这个名字的意义（即它是如何由直线和点而产生的），象这种明确指出一个名字或关系的意义的语句，在数学上称为定义。

线段通常用它的两个端点的大写字母来表示，如图 1—3 中的线段，记作“AB”。



图 1—2



图 1—3

直线和射线都是无限伸长的，它们相互间不能比较大小，线段的大小，是由它的两个端点所限定的，用迭合的方法可以比较两条线段的大小。如图 1—4 所示，要比较线段 AB 和 CD 的大小，可以把 AB 放在 CD 上，使 A 点和 C 点重合，并使 AB 顺着 CD 落下：

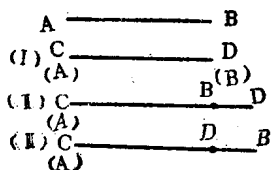


图 1—4

(I) 如果 B 点和 D 点重合，这时叫线段 AB 和线段 CD 相等，记为 $AB = CD$ ；

(II) 如果 B 点落在 C、D 之间，这时叫线段 AB 小于线段 CD，记为 $AB < CD$ ；

(III) 如果 B 点落在 CD 的延长线上，这时叫线段 AB 大于线段 CD，记为 $AB > CD$ 。

如果线段 AB 上的点 M，使 $AM = MB$ ，我们说 M 点平分 AB。平分一条线段的点叫做这条线段的中点。每一条线段只有一个中点。

要求两已知线段 AB、CD 的和，只要如图 1—6 (I) 所示，将 C 点与 B 点重合，CD 顺着 AB 线段的延长线落下，则 AD 就是 AB、CD 的和。并记为 $AB + CD = AD$ 。

图 1—6 (II) 告诉了我们求两线段差的方法，即 DB 是 AB 与 CD 之差，通常记为 $AB - CD = DB$ 。



图 1—5

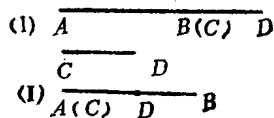


图 1—6

问 已知三条线段 AB 、 CD 、 EF ，怎样求 $AB + CD - EF$ ？

人们为了对任意的两线段进行比较与加减，不一定要像上面所说迭合的办法。而是用一已知线段作标准，比如常用的市尺，叫做单位线段。其他线段与单位线段进行比较，看它含有多少单位线段，这个数就叫该线段的长度。单位线段的长度是1。通常说 A 、 B 两点间的距离，就是以 A 、 B 为端点的线段 AB 的长度。线段有了长度，我们就可以用来比较任意两线段的大小，也可求两线段的和或差等等。

第二节 角

一、角的概念

尖嘴的锄头，人字屋架……等等，在人们的实践中引起了多次的感觉和印象，如果不管它们是木制的还是铁制的，从纯粹的状态中研究它们的形象，我们得到角的定义。

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。如图1—7，

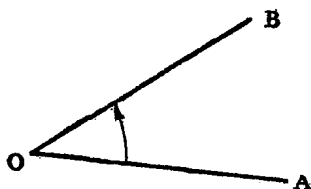


图1—7

就是从点 O 引出的两条射线 OA 、 OB ，它们构成了一个角。点 O 叫做角的顶点，射线 OA 、 OB 叫做角的边，这角记为 $\angle AOB$ ，也可记为 $\angle O$ 。

在客观实践中，角不都是静止的。如钟表上的时针和分针

所成的角，它是由旋转而形成的。因此从运动的观点来考察，角又可以看成是由一条射线围绕着它的端点旋转而形成的。如图 1—7 中的 $\angle AOB$ ，可看作是射线 OA 绕着端点 O 旋转到新的位置 OB 而形成的。原来的位置 OA 叫做角的始边，新的位置 OB 叫做角的终边。旋转时射线在平面上经过的一部分通常称为角的内部，平面上的其他部分称为角的外部。

二、角的大小

角的大小是由它的两条边张开的程度来决定的，因为角的两边是射线，所以角的大小与所画边的长短无关。

如图 1—8 所示，要比较 $\angle AOB$ 和 $\angle A_1O_1B_1$ 的大小，可以把 $\angle AOB$ 放在 $\angle A_1O_1B_1$ 上，使顶点 O 和顶点 O_1 重合，始边 OA 和始边 O_1A_1 重合，而 OB 和 O_1B_1 同在 O_1A_1 的一侧：

(I) 如果终边 OB 和终边 O_1B_1 重合；那么就说这两角相等，简称等角，写成 $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ ；

(II) 如果终边 OB 落在 $\angle A_1O_1B_1$ 的内部，就说 $\angle AOB$ 小于 $\angle A_1O_1B_1$ ，写成 $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ ；

(III) 如果终边 OB 落在 $\angle A_1O_1B_1$ 的外部，就说 $\angle AOB$ 大于

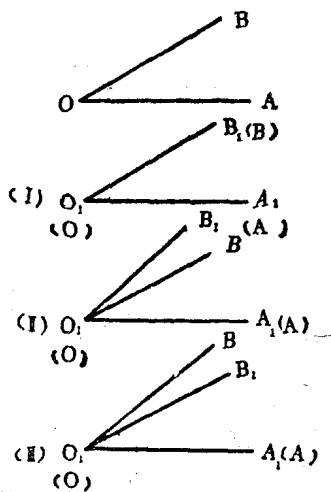


图 1—8

$\angle A_1O_1B_1$, 写成 $\angle AOB > \angle A_1O_1B_1$ 。

如果一条射线 OM 把 $\angle AOB$ 分成两个相等的角, 即 $\angle AOM = \angle MOB$ (图 1-9), 就说 OM 平分 $\angle AOB$ 。平分一个角的射线叫做这个角的平分线, 显然每个角只有一条平分线。

要求两角 $\angle AOB$ 、 $\angle A_1O_1B_1$ 的和, 只要把 O_1 与 O 重合, $\angle A_1O_1B_1$ 的始边 O_1A_1 与 $\angle AOB$ 的终边 OB 重合, 并使 OA 、 O_1B_1 在 OB 的异侧, 则 $\angle AOB_1$ (如图 1-10) 就是所求之和。写成 $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = \angle AOB_1$ 。

至于求两角的差, 图 1-8 (Ⅱ) 告诉我们, $\angle BO_1B_1$ 就是 $\angle A_1O_1B_1$ 与 $\angle AOB$ 之差, 写成 $\angle A_1O_1B_1 - \angle AOB = \angle BO_1B_1$ 。

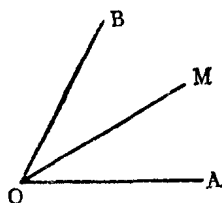


图 1-9

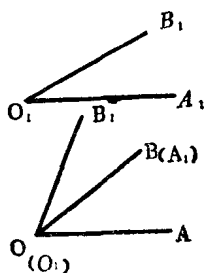


图 1-10

如图 1-11 中, 射线 OA 绕 O 点逆时针旋转时, 它经过 OB_1 、 OB_2 、 OB_3 、 OB_4 等位置, 转动一圈而回复到原始位置 OA' , 那么 $\angle AOB_1 < \angle AOB_2 < \angle AOB_3 < \angle AOB_4 < \angle AOA'$ 。

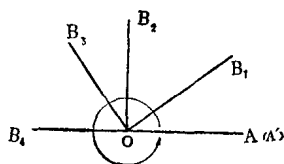


图 1-11

图中 OB_4 与 OA 成一直线, OA' 与 OA 重合。于是得到下面的定义:

始边旋转到与终边成一直线时所形成的角叫做平角, 如 $\angle AOB_4$ 。
始边旋转到与终边重合时所形成的角叫做周角, 如 $\angle AOA'$ 。

实际上, 一个平角可以平分为两个相等的角。我们把平角的一半叫做直角。为了区分其他各角, 我们又以直角、平角、周角为标准, 把小于一直角的角叫做锐角, 如 $\angle AOB_1$;
大于一直角而小于一平角的角叫钝角, 如 $\angle AOB_3$;
大于一平角而小于一周角的角叫做优角。

问 1、凡钝角都相等吗, 为什么?

问 2、凡直角都相等吗, 为什么?

我们看到, 图 1—11 中射线 OA 绕 O 点逐渐逆时针旋转时, 角的变化过程是由锐角经直角、钝角而平角, 再由平角经优角不断增大而成周角的。

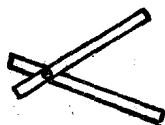


图 1—12

如果把两根木条如图用螺丝钉活动地连接起来, 做一个角的模型。

先把两木条合拢, 然后旋转一条, 顺次可组成锐角、直角、钝角、平角和周角。这就是生产中常用的活络角尺。

下面再来讨论两角的相互关系。

如果两个角的和等于一个直角, 那么这两个角叫做互为余角(如图 1—13甲), 或者说其中一个角是另一个角的余角; 如