平面解析几何题解

高考复习参考丛书

高考复习参考丛书

平面解析几何题解

罗汉杰　冯纪清

甘肃人民出版社

封面设计：陆惟宁

高考复习参考丛书

平面解析几何题解

罗汉杰　冯纪清

甘肃人民出版社出版

（兰州庆阳路230号）

甘肃省新华书店发行　兰州新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1／32　印张7.75　字数120,000

1980年3月第1版　1980年3月第1次印刷

印数：1——120,300

书号：13096·52　定价：0.54元

出版说明

《高考复习参考丛书》是为了帮助参加高考的青年复习时参考用的，也可作为在校高中学生课外阅读和社会青年自学的参考读物。

这套丛书，主要是根据教育部新编中学各学科教学大纲（征求意见稿）的要求，并参考近两年来全国高考复习大纲和全国高考试题而编写的，将按高中各学科分政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语等几个方面分册陆续编辑、出版。在编写体例上，有的本子以解题为主；有的本子则以讲述基础知识为主、附有部分题解。

我们编辑、出版这类读物还没有经验，缺点和错误在所难免，希望广大读者提出指正意见，以便不断修改，使其日臻完善。

前　言

本书以教育部《中学数学教学大纲（草案）》为依据，选编了平面解析几何的例题二百三十余道，逐一做了详解。选题力求典型，以达到巩固基础知识和提高解题技能的目的；同时注意了难易有别、由浅入深；部分题难度较大，有助于加强对综合分析能力的训练；有些题还适当地加了分析，帮助读者开拓思路。题解按内容分章节选编，每一章节的前面有内容提要，后面有练习题。书后附有总复习题及全书练习题答案。

本书主要供高中学生和知识青年复习参考之用。由于我们思想和业务水平不高，加之编写时间仓促，因此漏洞和错误在所难免，恳请读者予以批评指正。

编　者

1979年10月

目　录

第一章　直　　线

第一节　有向线段、距离公式及定比分点

1. 有向线段　规定了起点和终点的线段，叫有向线段.

2. 有向线段的数量　一条有向线段的长度连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量. 如图 1 . A点和B点相距 6 个单位，那么就有 $\overline{AB}=6$，$\overline{AB}=-6$.

图 1

3. 有向线段的数量计算公式　在数轴上，有向线段AB的数量，等于终点B的坐标x_2减去起点A的坐标x_1，即

$$AB=x_2-x_1.$$

4. 两点间的距离公式　已知两点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$，那么

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

5. 线段的定比分点的坐标　如果在已知线段P_1P_2上确定一个点P，使得线段P_1P与PP_2的长度的比等于给定的正数λ，即

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\lambda,$$

那么，我们就把点P叫做线段P_1P_2的定比分点.

定比分点P的坐标公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

如果P是P_1P_2的中点，则

$$\lambda=1.$$

由定比分点P的坐标公式就可以得到线段P_1P_2的中点的坐标公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

【1】 数轴上A、B两点的坐标分别是x_1和x_2，

设：(1)$x_1=8$，$x_2=6$；(2)$x_1=5$，$x_2=-3$；

(3)$x_1=4$，$x_2=0$；(4)$x_1=-9$，$x_2=-11$；

求AB与BA。

解：根据$AB=x_2-x_1$，得

(1)$AB=6-8=-2$，$BA=8-6=2$；

(2)$AB=-3-5=-8$，$BA=5-(-3)=8$；

(3)$AB=0-4=-4$，$BA=4-0=4$；

(4)$AB=-11-(-9)=-2$，$BA=-9-(-11)=2$。

【2】 设A、B、C、D是同一条直线上的四个点，求证不论它们的位置关系怎样，都有如下关系：

(1)$AB+BC+CD+DA=0$；

(2)$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

证明：(1)分两种方法证明。

证法一：

取这条直线为数轴，设A点为原点，B、C、D的坐标

分别为b、c、d，那么

$$AB+BC+CD+DA=b+(c-b)+(d-c)-d$$
$$=b+c-b+d-c-d=0.$$

故　不论A、B、C、D在这条直线上的位置关系怎样，均有

$$AB+BC+CD+DA=0.$$

证法二：

由沙尔定理知

$$AB+BC=AC,$$
$$CD+DA=CA.$$

故　$AB+BC+CD+DA=AC+CA$
$$=AC-AC=0.$$

（2）取这条直线为数轴，设A点为原点，B、C、D的坐标分别是b、c、d，那么

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=b(d-c)+(c-b)d$$
$$=-bc+cd=cd-bc.$$

而　$AC\cdot BD=c(d-b)=cd-bc$，

故　$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

【3】　已知A、B、C三点在数轴上的坐标分别是4、-2、-6，求AB、BC、CA的数量和绝对值.

解： $AB=-2-4=-6$，$|AB|=6$；

$BC=-6-(-2)=-4$，$|BC|=4$；

$CA=4-(-6)=10$，$|CA|=10$.

【4】　求下列两点间的距离：

（1）$A(-2,5)$和$B(4,-3)$；

（2）$C(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$和$D(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$.

解：（1）$|AB|=\sqrt{(4+2)^2+(-3-5)^2}=10$；

（2）$|CD|=\sqrt{(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2}$

$$=\sqrt{2-2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{2}[1-\cos(\theta_1-\theta_2)]}$$

$$=2\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|.$$

【5】 求一点，使它到两个坐标轴和（3,6）都有相等的距离.

解：设所求的点是$P(x,y)$.

根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=\sqrt{y^2},\qquad (1)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2}.\qquad (2)$$

二式相减，得$\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}$，

∴ $x=y$或$x=-y$.

把$x=y$代入（1），得

$$\sqrt{(x-3)^2+(x-6)^2}=\sqrt{x^2}.$$

化简，得

$x^2-18x+45=0$，

$(x-3)(x-15)=0$，

∴ $x_1=3$，$x_2=15$.

所求的点是(3,3)，(15,15).

把$x=-y$代入（2），得

$$\sqrt{(x-3)^2+(-x-6)^2}=\sqrt{x^2},$$

化简，得

$x^2+6x+45=0$，

$\because \quad b^2-4ac=36-4\times 45<0$，

$\therefore$ 方程无解.

即$x=-y$的点不存在.

【6】 点A（1，1）到点B的长为5单位，线段AB中点的横坐标为3单位，求点B的坐标.

解：设点B的坐标为(x,y).

由两点间的距离公式，得

$$|AB|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}，$$

即 $25=(x-1)^2+(y-1)^2$.　　　　(1)

同时由中点公式，得

$$\frac{x+1}{2}=3，$$

$$x=5；$$

将$x=5$代入(1)，得

$$y_1=4，\ y_2=-2.$$

$\therefore$ 点B的坐标为$(5,4)$或$(5,-2)$.

【7】 两点$(x,5)$和$(-2,-3)$与点$(1,1)$等距离，求x的值.

解：根据两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(-3-1)^2}，$$

化简，得

$$x^2-2x-8=0，$$

解之，得 $x_1=-2，x_2=4$.

【8】 求证三个点$(a\cos\theta_1，a\sin\theta_1)$，$(a\cos\theta_2，a\sin\theta_2)$，$(a\cos\theta_3，a\sin\theta_3)$在以原点为圆心的同一个圆上$(a>0)$.

证明：

各点到原点的距离分别为

$$\sqrt{a^2(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)}=a,$$

$$\sqrt{a^2(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)}=a,$$

$$\sqrt{a^2(\sin^2\theta_3+\cos^2\theta_3)}=a,$$

∴ 三个点（$a\cos\theta_1, a\sin\theta_1$）、（$a\cos\theta_2, a\sin\theta_2$）、（$a\cos\theta_3, a\sin\theta_3$）都在以原点为圆心，$a$为半径的同一个圆上。

【9】 一个动点$P(x, y)$和$Q(-3, 4)$的距离等于5，x和y应当满足什么条件？

解： 应当满足方程

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25,$$

即 $x^2+y^2+6x-8y=0$.

【10】 一个动点$P(x,y)$和点$A(1,-2)$、$B(-3,7)$等距离，它的坐标应当满足什么条件？

解： 应当满足方程

$$(x-1)^2+(y+2)^2=(x+3)^2+(y-7)^2,$$

即 $8x-18y+53=0$.

【11】 已知三角形ABC的三个顶点是$A(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$、$B(\frac{1}{2},2)$及$C(-\frac{1}{2},-2)$，求证这三角形是等边三角形.

证明： $AB=\sqrt{(\frac{1}{2}+2\sqrt{3})^2+(2-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}=\sqrt{17}$,

$$BC=\sqrt{\left[\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})\right]^2+[2-(-2)]^2}=\sqrt{17},$$

$$CA=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+2\sqrt{3}\right)^2+\left(-2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{17}.$$

$\because\quad AB=BC=CA,$

$\therefore\quad \Delta ABC$是等边三角形。

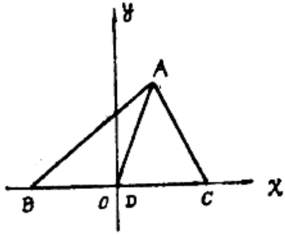

图 2

【12】 ΔABC在BC边上的中线是AD，试证

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2).$$

证明：如图2．取D作原点，线段BC所在直线为x轴．设C点的坐标是(a,o)，则B点的坐标是$(-a,o)$，再设A的坐标是(x_1,y_1)，那么

$$AD^2=x_1^2+y_1{}^2,$$

$$DC^2=a^2,$$

$$2(AD^2+DC^2)=2(x_1^2+y_1^2+a^2),$$

$$AB=\sqrt{(x_1+a)^2+y_1{}^2},$$

$$AC=\sqrt{(x_1-a)^2+y_1^2},$$

$$\therefore\quad AB^2+AC^2=(x_1+a)^2+y_1^2+(x_1-a)^2+y_1^2$$

$$=2(x_1{}^2+y_1^2+a^2).$$

即 $AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2)$.

【13】 甲船在某港口的东50公里、北30公里，乙船在同一港口的东17公里、南26公里，求两船的距离。

解：如图3．设在直角坐标系上，以港口所在的位置为原点，东西方向的位置为横轴，南北方向为纵轴，则

两船位置分别为 $A(50,30)$、$B(17,-26)$．

$$|AB|=\sqrt{(50-17)^2+(30+26)^2}=65.$$

答：两船间的距离为65公里．

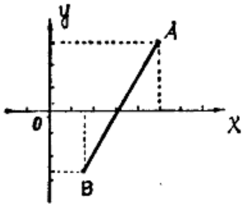

图3

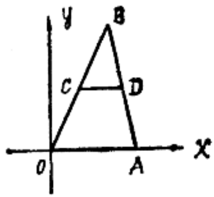

图4

【14】 求证三角形两边中点的连线平行于第三边．

证明：选择如图4的坐标系，使原点和三角形的一个顶点重合，又使ox轴与过这一顶点的一条边重合，设ΔOAB的三个顶点的坐标分别是$O(o,o)$、$A(x_1,o)$、$B(x_2,y_2)$；同时设C、D两点分别是OB和AB的中点，那么

C、D两点的纵坐标y_C及y_D分别为

$$y_C=\frac{o+y_2}{2}=\frac{y_2}{2},$$

$$y_D=\frac{o+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}$$

$\therefore\quad y_C=y_D,\quad\therefore\quad CD\parallel OA.$

即　三角形两边中点的连线平行于第三边．

【15】 P_1和P_2的坐标分别是$(-1,\ -6)$和$(3,\ 0)$，延长P_2P_1到P，使$|P_1P|=\frac{1}{3}|P_1P_2|$，求$P$点的坐标．

解法一：

$$\because \quad \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{1}{4},$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 3}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-2\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=-8.$$

解法二：

设 P的坐标是（x,y），把P_1点看作是线段PP_2的分点.

$$\because \quad \lambda=\frac{PP_1}{P_1P_2}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad -1=\frac{x+\frac{1}{3}\times 3}{1+\frac{1}{3}},$$

$$-6=\frac{y+\frac{1}{3}\times 0}{1+\frac{1}{3}},$$

即 $x=-2\frac{1}{3}$，$y=-8$.

故 P点的坐标是$\left(-2\frac{1}{3},\ -8\right)$.

【16】 求证三角形的三条中线相交于一点，这点离顶点的距离是它离对边中点的距离的 2 倍.

证明：选择如图5的坐标系．设三角形的三个顶点分别是$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$和$C(x_3, y_3)$，那么BC的中点D的坐标就是

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

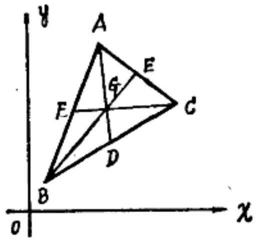

图5

并设G是分中线AD成$2:1$的分点，那么G的坐标就是

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

同理，可求得另两条中线BE和CF成$2:1$的分点的坐标都是$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

∴ 三角形ABC的三条中线AD、BE、CF都经过G点，这点离顶点的距离是它离对边中点的距离的2倍．

【17】 有两个质点，它们的重量分别为3克和4克，位置分别在$P_1(-6, 5)$和$P_2(8, -2)$处，求重心P的位置．

解：根据力学，重心P把线段P_1P_2分成与重量成反比的两部分，使

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{4}{3}.$$

据定比分点公式，得