無渦移動波之數學理論

中央人民政府水利部
南京水利實驗處譯

無渦移動波之數學理論

中央人民政府水利部
南京水利實驗處譯
一九五二年一月

無渦移動波之數學理論

原　著　庫利根及派脫生
翻　譯　南京水利實驗處
出　版　南京水利實驗處
南京廣州路龍蟠里50號
印　刷　美豐祥印書館
南京長江路136號
一九五二年一月出版

初 1—500

無渦移動波之數學理論

內容概要

本書係研究明渠中洪水波及其他各種移動波叢書中之第一種。其所討論之波動，係流體摩擦力與慣性力及重力相比可以略而不計者。研究時假定矩形水平渠道中，理想液體因原來水面被擾動而作無渦運動時，一斷面內之水平流速近乎相等。研究所得結果，同樣可適用於水流在坡度均勻之渠道中原係以等速進行時之波動情形。特別著重波形在傳播過程中並不改變之擾動。在此種情形下，導出波形及波浪傳播速度之公式。對於任一單波（intumescence）之變形、能量、重心運動，以及不穩力矩（moment of instability），亦分別以公式導出之。又論及波形不變時之最大波高。若干公式，曾與可以應用之實驗資料相比照。其中尤富於興趣者，為湧波（surge）波首之形態與振幅餘弦波（cnoidal wave）特性之比較。

本書原著者為庫利根(Garbis H. Keulegan)及派脫生(George W. Patterson)兩氏。由本處余廣明同志繙譯，陳子霞同志校閱。正文中原著有講解不夠詳盡之處，均已加以增補。插圖亦自十幅增至二十四幅。附錄部份，均係譯者附加，用意在對正文中所涉及之理論及公式，作進一步之說明。

符 號 表

c	波高及波面曲率可以不計之長波之傳播速度。
c_1	渠道斷面驟變前之波浪傳播速度。又表示一積分常數。
c_2	渠道斷面驟變後傳進波之傳播速度。又表示一積分常數。
$\mathrm{cn}(x,k)$	雅科俾氏橢圓函數，振幅餘弦。
$\rho g E$	單位渠寬波浪之總能量 [MLT^{-2}]。
E	第二類完全橢圓積分。
$f(\ ),\ F(\ ),$	右下角無論有無數碼，均代表函數符號。
$F(x,k)$	第一類不完全橢圓積分。
g	重力加速度。
$g(\ ),\ G(\ ),$	函數符號。
h	流量波主波波高（第五章第十五節）；水面之垂直位移。
h'	流量波平均波高。
h_1	渠道斷面驟變前水面之垂直位移（第四章第五節）；弧立波之最大波高；負波之最大波深；振幅餘弦波之最大波高。
$h_1,\ h^*$	流量增加時先頭波之最大波高。
h_2	渠道斷面驟變後水面之垂直位移（第四章第五節）；振幅餘弦波之最大波深。
$h_3 = H\eta_3$	（第五章第九節）。
$H',\ H$	渠道未經擾動前之水深。
$H(\ )$	函數符號。
k	橢圓積分之係數。
K	第一類完全橢圓積分。
l	渠段長度（第四章第四節）。
$l,\ m,\ n$	方向餘弦。
M_s	不穩力矩 [L]。
M_1',M_2,M_2',M_x	單位渠寬之動量 [MT^{-1}]。
p	壓力 [$ML^{-1}T^{-2}$]。
p_a	大氣壓力。
q	質點速率（第二章第五、七、八節）；斷面中單位寬度流量 [L^2T^{-1}]（第五章第二節）。
Q	弧立波單位寬度之總體積 [L^2]。
s	弧長。
$\mathrm{sn}(x,k)$	雅科俾氏橢圓積分，振幅正弦。
t	時間。
$u,\ v,\ w$	流速在 x, y, z 方向之分速。
u_0	槽底之 x 方向分流速；斷面流速之第一次近似值。
$u_0,\ v_0,\ w_0$	衝擊前之分流速（第二章第六節）。
$u_1,\ u_2$	渠道斷面驟變前後波分子之速度（第四章第五節）。

u_1, u_2, U_1, U_2	兩斷面中之各點流速及平均流速（第五章第十六節）。
u_1	波峯處分子速度（第五章第十九節）。
U	斷面中分子平均流速。
U_0	$h=0$ 斷面中之平均流速。
V	體積［L^3］（第二章第三節）；單位寬度之體積［L^2］（第四章第三節，第五章第五節）。
x	卡的遜座標，特指在渠底平面內且與渠道平行之方向。
y	卡的遜座標，特指在水平面內與渠道橫交之方向。
z	卡的遜座標，特指原點在渠底內之垂直向上方向。
$\alpha=3/H^3$（第五章第十節）；比值（第五章第十四節）。	
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	角變率［T^{-1}］。
Γ	循環量［L^2T^{-1}］。
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	線變率［T^{-1}］。
ε	數值甚小之微量。
ξ, η, ζ	渦度在 x,y,z 方向之分值［T^{-1}］（第二章第二、四、五節）。
ζ	自由面之無因次 x 座標。
η, ξ	在原來水面以上之波體積重心之 z 及 x 座標（第五章第五、六、十二、十七節）。
η	自由面之無因次 z 座標 $=h/H$（第五章第八、九節）；鮑心內斯克係數（第五章第十六節）。
$\eta', \eta''=-\eta_2, \eta'''=-\eta_3$	形態不變之波浪微分方程式之三根。
η_1	孤立波之最大相對波高（第五章第八節）；振幅餘弦波之最大相對波高（第五章第九、十八節）。
η_2	振幅餘弦波之最大相對波深。
$\theta(\ )$	函數符號。
λ	振幅餘弦波之波長（第五章第九、十八節）。
ρ	液體密度［ML^{-3}］；波面曲率半徑。
σ	單波單位寬度之部分體積［L^2］。
Σ	單波單位寬度之體積。
ϕ	流速勢［L^2T^{-1}］。
ϕ_0	衝擊前之流速勢（第二章第六節）；流速勢之第一次近似值。
$\psi(\ )$	函數符號。
ω	單波體積傳播速度。
ω_0	波面曲率可以不計時之波高傳播速度。
ω_1	有顯著波面曲率之波高傳播速度。
ω_c	振幅餘弦波之傳播速度。
ω_q	流量傳播速度。
$\overline{\omega}$	衝壓力［$ML^{-1}T^{-1}$］（第二章第六節）。
Ω	重力勢［L^2T^{-2}］。

目　次

第一章 緒　　論

近年以來，由於預測洪水之發生及洪水波向河流下游傳播時之波速及波高日趨重要，故關於此方面之著作有顯著之增加。雖然，對於此種波浪問題之數學處理，無論何種文字，均有不够詳盡之嫌。不同時代不同國別之著述家，曾分別對此問題之各個方面加以研究。故學者欲窺全豹，必須閱讀若干種不同文字之許多論著。因此，將此種用不同方法所得結果加以系統整理，使至目前爲止所已得之成果，以適當形式出現，其需要性實不容置疑。

基於此種理由，在美國氣象局提議下，標準局乃從事於洪水波及其他移動波數學理論叢書之編著。該叢書之目的，不在提供實用方法，以求在水流情形甚爲複雜之天然渠道中，預測洪水波運行及波浪減弱之速率；而在作解決洪水預報問題之嘗試時，提供一種健全的數學理論基礎。

本書係上述叢書中之第一冊，研究矩形水平均勻渠道中流體摩擦力與慣性力及重力相比可以略而不計之移動波之運動情形。計劃中之叢書，尚有其他各冊，均已在進行中。其研究之主題如次：紊流、河槽坡度及形狀對於移動波運動之影響；「準常態流率」（quasi-permanent regime）理論及洪水波預測方法；以及單波（intumescence）變形問題之最近進展。

天然及人工河道中之水流情形，可分爲等速流、變速流及變量流三大類。

在等速流中，水深及平均流速不因時間及地點而有變化。苟河槽斷面一致，坡度及流量不變，則天然水道中極長一段均爲等速流。

在變速流中，水深及平均流速對時間而言並無變化；但對地點而言，則隨地而異。壩之迴水區域、連接高程不等之蓄水庫之運河以及過渡段之水流，均係變速流之實例也。

在變量流中，水深及流速隨時間及地點而俱變。重力波（gravity waves）及界面波（capillary waves）均屬之。自應用科學之觀點言之，其中以重力波爲最重要。重力波可分兩大類——表面波（surface waves）及移動波（translation waves）。表面波發生於深水中，水分子之運動自水面向下急劇減弱。波動呈正弦曲線形。各分子循封閉曲線作週期性之運行，垂直方向之加速度頗爲顯著。移動波則不然，在任何時間，一斷面中所有各質點之運動大略相同。當移動波經過後，液體各質點卽向前移動一定距離，其數值與波體積成正比。此種波型常見於水槽及河流中。海洋中之潮水波（tidal waves），亦其例也。

移動波之最簡單分類法，或可由考慮支配運動之物理條件求得之。其中有兩種極端情形最爲明顯：第一類情形爲摩擦力之影響可以不計者。此種波浪之體積及波長均甚小；後者正說明何以摩擦力之影響可以不計，而支配運動之因素，在於重力及慣性力。如果波面曲率甚微，則波高傳播速度 ω_0，可由拉葛雷奇（Lagrange）速度定律 $\omega_0=\sqrt{gH}$ 得之，其中 g 爲重力加速度，H 爲河槽水深。如果自由面之最大波面曲率及其在原來水位以上之波高甚爲顯著，則波高傳播速度 ω_1 等於 ω_0 乘以與 1 微有差異之一因素，該因素之確實數值爲波高及波面微分式之函數。吾人命此種波動爲「潛勢單波」（potential intumescence）或「無渦移動波」（irrotational translation waves），可將固體物質驟浸於液體中或突然增加少量液體以產生之。如浸於液體中之物質，突然發生運動，亦可形成此種波動。在此種情形下，擾動後之波面位置全在原來水面以上，卽波之高程爲正向的。孤立波（solitary wave）乃吾人熟悉之一例。又若在渠道中猝然取出少許水量或將原在渠道中之物體驟行取出，亦能產生波浪。此種波浪之高程爲負向的。水槽兩端流量有急遽變化時所產生之湧波，亦屬於本類型。

與上述情形相反之另一極端，爲河流之「準常態」流率，一般名之曰洪水波（flood waves）。洪水波亦爲移動波，唯其中摩擦力爲最重要因素，重力及慣性力之影響可以不計。洪水波之波長甚

大，可作爲說明摩擦力影響所以佔優勢之理由。如在波浪傳播速度之基礎上，比較洪水波及潛勢單波，可使吾人獲得啓示。在討論洪水波時，以應用流量傳播速度 ω_q 之概念爲便。根據克萊茲一薩同定律（Kleitz-Seddon law）[1][1]，流量傳播速度等於水位流量曲線之坡度 $\frac{dq}{dH}$，其中 q 爲在常水位 H 時單位河寬之流量。在矩形河槽中，如應用哲塞氏（Chezy）阻力公式，則 $\omega_q=\frac{3U}{2}$［參閱附錄一］。比較以上兩種波速，可得 $\omega_o{}^2/\omega_q{}^2=\frac{4}{9}\frac{gH}{U^2}$。$\frac{gH}{U^2}$ 之比值在河流中既屬甚大，可知 ω_o 較 ω_q 超過倍數甚多。此種速度之差異頗爲重要。

吾人必須明瞭在實際情形中，於上述兩極端波型之間，有連續不斷之過渡形態。介於其間者有某種波動現象，其中慣性力、重力、摩擦力佔有同等數量，不分軒輊。此種現象在工程上亦有探討價值，尤以其與水電廠之關係爲最大。當水輪機驟行關閉時，給水渠中即發生正單波向上游推進，波長逐漸增加。同時，排水渠中發生負單波向下游傳播，波長亦逐漸增加。此種單波之波高可能甚大（1米左右），但因摩擦力關係，逐漸減弱。由於波浪經行距離甚長，故摩擦力不能略而不計。同理，當水輪機驟行開動時，有相同現象發生，唯單波之正負號與前述情形相反。如果因此種波動所引起之壓力及速度變化甚大，則在設計渠壁、渠底、及堤防時，對於其影響必須加以考慮。船閘附近之運河河段，當船閘啓閉時，在靜水中亦有與上述情形相同之波浪傳播。由此產生之正負波波長均甚大，所經行之距離亦甚長，雖由於摩擦力關係，波形發生變化，但波長始終不變［2］。在山谷地帶，又有少數特殊洪水波，其中慣性力之影響甚爲重要。馬叟（Massé）［3］氏曾將前述現象命名爲「平均單波」（average intumescences）。

本書專討論潛勢單波。在此種波動中，摩擦力既可略而不計，且因其發生於靜水或等速運動之水流中，故由拉葛雷奇一苛許定理（Lagrange-Cauchy theorem）（參閱附錄二），水分子所作運動係無渦運動。此項事實，證明本書所採用之數學方法係屬正確者。

在第二章中，對無渦理論之要素有一簡短介紹，主要在著重說明基本動力及運動原理。第三章將基本微分方程式立出。此等方程式之解答，即波浪問題之解答也。

第四章及第五章中應用一般原理，求得方程式之第一次及第二次近似解答。在第一次近似法中，假定波高及波面曲率可以略而不計，由此求得方程式之完全解答。此種波形在傳播過程中並無改變。第二次近似法爲本書之主要部份，所採取之假定更爲廣泛，且所導出之微分方程式極爲複雜，祇有在特殊情形下始易獲得解答。在介紹由鮑心內斯克(Boussinesq)所提出之體積傳播速度之概念後，即討論波形在傳播過程中之變化以及單波重心之運動。此二點在本分析中，佔其重要成份。有顯著波面曲率之單波，具有三個不隨時間改變之積分式一體積、能量及不穩力矩一其性質亦均有詳細之討論。

波形在傳播期間並不改變之單波，爲本書主要著重點之所在。對於此種情形，吾人已求得方程式之特殊解答。如果無窮遠處之液體係靜止的，則所得者爲曾經實驗研究且極著名之孤立波。如果無窮遠處之液體在作不定運動，則所得者爲比較不熟悉之振幅餘弦波（cnoidal waves）。鮑心內斯克氏曾發現一項有趣原理，即在所有能量相等之單波中，孤立波之不穩力矩爲最小。此一定理之重要意義，在於說明孤立波之所以能經常發生且易於形成之理由。

在討論湧波之傳播速度時，對於河槽流速分佈之影響，曾作研討。湧波之先頭波之特性，亦有討論興趣。討論時利用理論與實驗二者，交互說明。

末節涉及波高極限及破波問題。

在本書編輯中，曾廣泛應用來姆氏（Lamb）巨著［4］及鮑心內斯克氏論文［5］。遇有可以採用之實驗資料時，作者即試圖討論理論與實驗之一致。資料之主要來源爲巴森［6］（Bazin）羅塞爾［7,8］（Russell）兩氏之著名研究及法佛利［2］氏（Favre）最近之論著。

---

1 括號內數字表示本書所附參考書目目次。

第二章 無渦運動

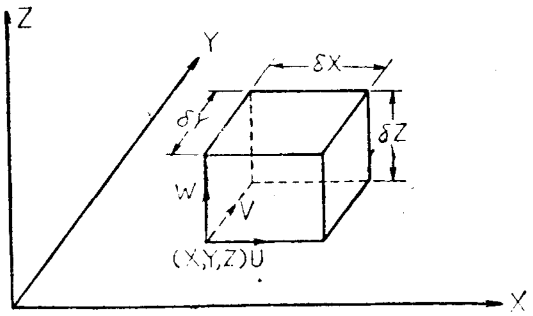
第一節 動力運動方程式

取一小塊長方體 $\delta x\delta y\delta z$ 而研究之。離座標軸原點最近一頂點之座標爲 (x,y,z)。令 (x,y,z) 點之分流速爲 u, v, w；液體之密度爲 ρ；則此長方體在 x 方向之動力反力 (kinetic reaction) 爲

$$\rho\frac{du}{dt}\delta x\delta y\delta z \qquad (1)$$

此反力等於作用於此長方體上所有外力在 x 方向之分力。設 (x, y, z) 點之壓力爲 p，則由壓力而產生之 x 方向分力爲

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \qquad (2)$$



第 1 圖 長方液塊圖解

令 (x,y,z) 點之重力勢[2] (potential of gravity) 爲 Ω，則由於液體重量而產生之 x 方向分力爲

$$-\rho\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \qquad (3)$$

令 (1) 式等於 (2) 式加 (3) 式並通除以 $\rho\delta x\delta y\delta z$，且應用同樣推理方法於其他兩方向，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\\ \frac{dv}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}\\ \frac{dw}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

爲計及分流速因時間而發生之變化計，吾人將 u,v,w 視作 x,y,z 及 t 之函數。明乎此，則得下列恆等式

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (5)$$

其中 $\frac{dx}{dt}$ 表示長方液塊之x位置對於時間之變化，亦即爲分流速 u，而 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 則表示在固定點(x,y,z)，u 對於時間之變化。$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$ 等之意義與之相似。準此，自第 (4) 及第 (5) 式可得

---

[2] 力勢之定義爲『凡一數量，其對於任何一方向偏微分之負值，等於作用於該方向每單位質量上之分力者，謂之力勢。』重力勢卽重力之力勢也。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial \Omega}{\partial x}\\
\frac{dv}{dt}&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial \Omega}{\partial y}\\
\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial \Omega}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

所須注意者，$\frac{du}{dt}$係表示流體中某一特定液塊在對 x, y, z 軸作相對運動時之加速度。$\frac{d}{dt}$符號之一般意義做此。

第二節　液體質點之位移及變形

考慮同一長方體 $\delta x\delta y\delta z$，其與原點最接近之頂點為（x,y,z）。令（x,y,z）點在某瞬間之分流速為 u,v,w，則由太勒爾定理（Taylor's theorem）在同時間（$x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$）點對於（x,y,z）點之相對速度為

$$\left.\begin{aligned}
\delta u&=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z\\
\delta v&=\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\\
\delta w&=\frac{\partial w}{\partial x}\delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\delta z
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

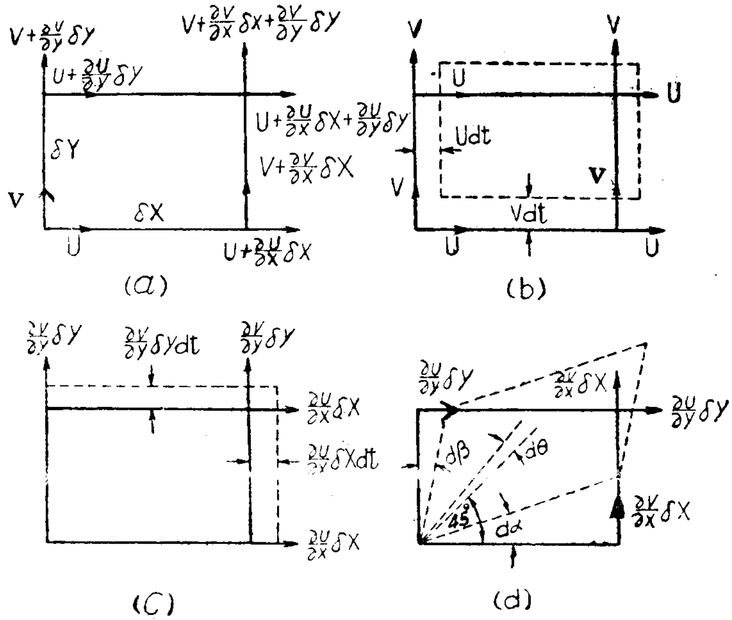
令

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_3=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_1=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_2=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_3=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\\
&\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

則各相對速度可寫為

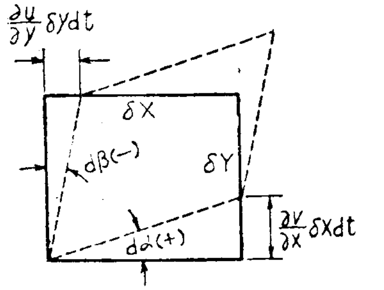
$$\left.\begin{aligned}
\delta u&=\varepsilon_1\delta x+\frac{1}{2}(\gamma_3\delta y+\gamma_2\delta z)+\frac{1}{2}(\eta\delta z-\zeta\delta y)\\
\delta v&=\varepsilon_2\delta y+\frac{1}{2}(\gamma_1\delta z+\gamma_3\delta x)+\frac{1}{2}(\zeta\delta x-\xi\delta z)\\
\delta w&=\varepsilon_3\delta z+\frac{1}{2}(\gamma_2\delta x+\gamma_1\delta y)+\frac{1}{2}(\xi\delta y-\eta\delta x)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ε_1，γ_1，ξ等之物理意義可解釋之如次：



第 2 圖　xy 平面中流速分解圖

（a）圖表示在 xy 平面中各頂點之流速，經過 dt 時間後其運動情形可分解爲 (b),(c),(d)三圖。(b) 圖表示移動（translation）；(c) 圖表示直線變形；(d) 圖表示角變形及轉動。移動之速度爲 u,v；直線變形之速率爲 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 或 ε_1，ε_2；故 ε_1，ε_2 表示質點 $\delta x\,\delta y$ 各邊邊長在運動中之增加率，名曰直線膨脹率（linear dilatation）；角變形之速率可以運動前後夾角對於時間之變化測度之，如以逆時鐘之轉動爲正向，則



第 3 圖　角變形說明圖

$$d\alpha=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x dt}{\delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}dt$$

$$-d\beta=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\,\delta y dt}{\delta y}=\frac{\partial u}{\partial y}dt$$

$$\text{角度總變化}=d\alpha-d\beta=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dt$$

$$\text{角度變化率}=\frac{d\alpha-d\beta}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

故 $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$ 或 γ_3 乃角變形之速率，名曰角膨脹率（angular dilatation）；轉動之速率可以運動前後對邊中線之平均方向對於時間之變化測度之。在正方體中，中線平均方向之變化即等於對角線間之夾角，而在長方體中，則等於頂角平分線間之夾角。

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x dt}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

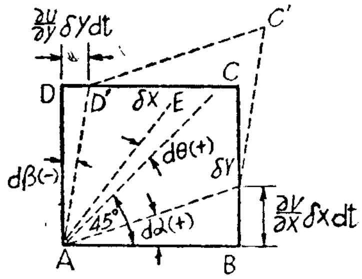
$$-d\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\delta y dt}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$\because \quad \angle B'AE = \angle D'AE$

$\therefore \quad 45^\circ - d\alpha + d\theta = 45^\circ + d\beta - d\theta$

$\therefore \quad d\theta = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] dt$

$\therefore \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]$



第 4 圖　轉動說明圖

故 $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]$ 或 $\frac{1}{2}\zeta$ 乃轉動時之角速度。

綜上所述，下列物理性之解釋甚爲明顯。任一長方體質點之運動，可認爲係由三部份組成：第一部份表示整個質點以分速度 u,v,w 移動；第二部份表示長方體內各分子之相對運動，因而發生變形。直線膨脹率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 表示質點各邊邊長 $\delta x, \delta y, \delta z$ 在運動中之增加率；角膨脹率 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 表示長方體每兩邊夾角之變化率；第三部份表示整個質點以分角速度 $\frac{1}{2}\xi$，$\frac{1}{2}\eta$，$\frac{1}{2}\zeta$ 繞瞬時軸所作之轉動。向量（ξ, η, ζ）名曰液體在（x, y, z）點之渦度 (vorticity)。

當液體中一定部份之整體內，分渦度 ξ, η, ζ 均等於零時，吾人名該部份之運動爲無渦運動。

第三節　運動關係式

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 既爲長方體質點各邊邊長之增長率，吾人極易證明由於各分子位移所引起之液體體積 $V = \delta x \delta y \delta z$ 之變化 dV 爲

$$\frac{dV}{dt} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) V \qquad (10)$$

又由質量不滅定理，可得

$$\rho_\circ V = (\rho_\circ + \Delta\rho)(V + dV) \qquad (11)$$

$\rho_\circ$ 爲液體原來密度，$\Delta\rho$ 爲質點運動時密度之變化。如果液體係不可壓縮者，$\Delta\rho = 0$，自第（11）式可知 $dV = 0$，故自第（10）式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (12)$$

此式卽爲不可壓縮之液體所在區域之運動關係式也，通常名之曰不可壓縮液體之連續方程式 (equation of continuity)。

在液體邊界上，連續方程式爲另一關係所代替。吾人將考慮此一關係之一般形式。令 $F(x, y, z, t) = 0$ 爲分界面之方程式。又令 u, v, w 爲邊界上（x, y, z）點一液體質點在 t 時間之分流速。在時間 $t + dt$ 時，該質點之位置爲

$$(x+udt,\ y+vdt,\ z+wdt)$$

由於液體不能穿越分界面發生流動，故分界面上液體質點對於分界面之相對速度必須爲切線的，亦即該質點不能與分界面相脫離［4,第7頁］。於是由分界面方程式，吾人可得

$$F(x+udt,\ y+vdt,\ z+wdt,\ t+dt)=0$$

將上式用太勒爾定理展開後，可得下列關係

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{13}$$

此式即爲一般邊界條件式。

注意兩種特別形式：在固定邊界上，由於F與時間不發生關係，故 $\frac{\partial F}{\partial t}=0$。又如令 l,m,n 表分界面法線之方向餘弦，則 $l:m:n=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}$

故

$$lu+mv+nw=0 \tag{14}$$

(14)式又可解釋之如次：$lu+mv+nw$ 表示分界面上質點在分界面法線方向之分流速。既然分界面爲固定的，則質點在法線方向之分流速必須爲零，即 $lu+mv+nw=0$ 也。

在不連續面上，即在該面兩旁 u,v,w 有急遽變化時，

$$l(u_1-u_2)+m(v_1-v_2)+n(w_1-w_2)=0 \tag{15}$$

右下方數字1，2乃用以區別該面兩旁之流速者。此式同樣適用於流體與在其中運動之固體間之共同面上。

第四節　無渦運動

有一類水動力現象，其中渦度 ξ,η,ζ 並不存在，即

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\\ \eta&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0\\ \zeta&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

此類現象範圍廣泛且甚重要。

由於此項限制之結果，分流速 u,v,w 之表示式簡化甚多。

茲考慮函數 ϕ，其定義由下列微分方程式表示之：

$$-d\phi=udx+vdy+wdz \tag{17}$$

按諸微分方程定理，欲令 $d\phi$ 爲恰當微分（exact differential）

即

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \tag{18}$$

其必需及充份條件，即係第(16)式所示之關係。比較(17)(18)兩式，吾人可將渦度等於零之

液體質點之分流速寫爲：

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\
w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (19)
$$

函數 ϕ 名曰流速勢（velocity potential），蓋以其與物理學中其他各種「勢」，例如重力勢等相似也。由於無渦流動時必有流速勢，且流速勢亦僅能於流動爲無渦時始克存在，故吾人又名無渦流動爲潛勢流（potential flow）。

設作無渦運動之液體，又係不可壓縮者，則流速勢適合於拉泊雷斯方程式（Laplace's equation）

$$
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (20)
$$

此式可由將（19）式代入（12）式——連續方程式——中得之。因此，在目前所假定之流動條件下（不可壓縮液體之無渦運動），欲求各點流速之完全解答，乃變爲選擇一適合邊界條件之簡諧函數（harmonic function）之問題矣。

第五節　運動線圈中循環量之不變

下述有關無渦運動之定理異常重要：

『設在任何時刻，理想流體中某部份之運動係無渦的，則在外力具有力勢且流體密度或爲常數或僅係壓力之函數之條件下，該部份流體將永遠作無渦運動』。

證明上述定理之一法，爲循流體質點所組成之封閉曲線，考慮其循環量（circulation），並研究當曲線上各質點運動至新位置時循環量之變化。所謂環繞線圈 C 之循環量，其意義爲在任何時間 t，循液體中質點所組成之封閉曲線 C，取其流速向量之線積分。如以公式表示則爲

$$
\Gamma = \oint_c (udx + vdy + wdz) \qquad (21)
$$

在時間 t+dt 時，由相同質點所組成之線圈之循環量爲

$$
\Gamma + \frac{d\Gamma}{dt} dt
$$

其中

$$
\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c \frac{d}{dt}(udx + vdy + wdz) \qquad (22)
$$

爲計算 $\frac{d\Gamma}{dt}$ 計，吾人在線圈 C 上取長度爲 ds 之一小段線分，研究當該線分上各質點運動至新位置時，udx 對於時間之變化率。微分 udx，可得

$$
\frac{d}{dt}(udx) = \frac{du}{dt} dx + u \frac{d}{dt}(dx) \qquad (23)
$$

上式右首第一項包含 ds 上一質點在 x 方向之分加速度，該分加速度可由下列動力運動方程式之第一式得之：

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\\ \frac{dv}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}\\ \frac{dw}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

其中 p 爲壓力，ρ 爲液體密度，Ω 爲在該點外力之力勢。(23)式中右首第二項可立卽化爲

$$u\frac{d}{dt}(dx)=ud\left(\frac{dx}{dt}\right)=udu\tag{25}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(udx)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx-\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+udu\\ \frac{d}{dt}(vdy)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy-\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy+vdv\\ \frac{d}{dt}(wdz)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz-\frac{\partial\Omega}{\partial z}dz+wdw\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

將(26)式代入(22)式，可得

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint_c\frac{dp}{\rho}-\oint_c d\Omega+\frac{1}{2}\oint_c dq^2\tag{27}$$

其中 $q^2=u^2+v^2+w^2$。旣然 Ω 與 q^2 係 x,y,z 之單值連續函數 (single-valued, continuous functions)，(27)式右邊最後兩積分式之值當爲零。設 ρ 係不等於零且僅爲 p 之單值連續函數，或爲一常數，則第一積分式亦等於零。因此，在此種情況下，

$$\frac{d\Gamma}{dt}=0\tag{28}$$

卽環繞與液體俱進之線圈之循環量始終不變。

應用斯托克氏定理 (Stokes' theorem)，環繞線圈 C 之循環量 Γ，可與由 C 圍繞而成之 S 面中液體質點之渦度發生關係。斯托克氏定理說明任何向量環繞一封閉曲線之線積分，等於該向量經過由該封閉曲線包圍而成之表面之旋流量 (flux of the curl)。應用此項定理，可得下式

$$\Gamma=\iint_s(l\xi+m\eta+n\zeta)dS\tag{29}$$

其中 l,m,n 爲自該表面向內所作法線之方向餘弦（參閱附錄三）。

自第(28)及(29)式，可知流體某部份之無渦性，實隨該流體而俱存。蓋若起始時流體中某部份之 ξ,η,ζ 等於零，則在此區域中，任何線圈上之循環量均等於零。自第(28)式，在以後各個時間中，由該部份液體質點所組成之區域內，循環量將繼續等於零而不變。因此渦度亦必保持等於零也。

在證明此主要定理卽第(28)式時所作之種種限制，必須記取勿忘。吾人假定外力具有力勢，且密度或爲常數，或僅爲壓力之函數。舉例言之，由溫度差異而產生之對流，卽違反第二項假定。又因證明時曾應用第(24)式——動力運動方程式——其中並無粘滯係數，故另一限制爲粘滯力之影響與慣性力相比，可以略而不計。

第六節　因衝擊而產生之運動

當液體邊界情形驟然改變時，或液體受有衝力時，運動情況可能發生突變。舉例言之，當浸於