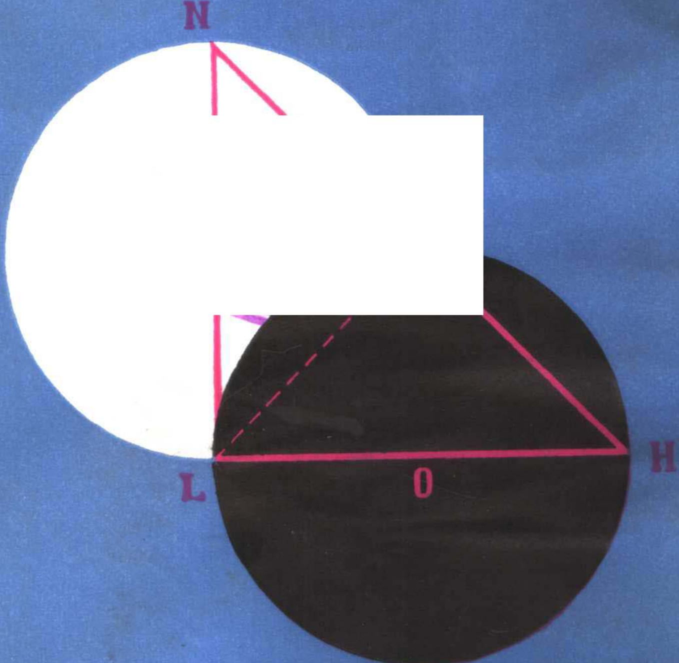
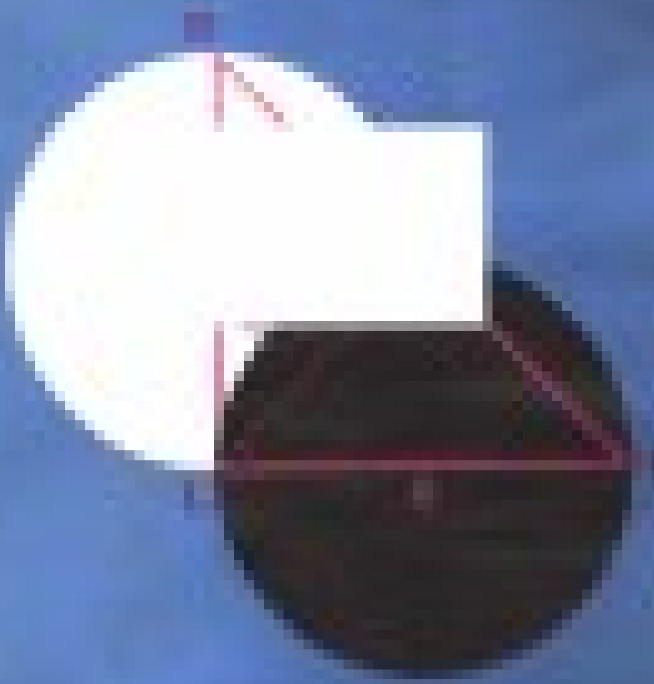
中学数学解题方法(上册)

ZHONGXUE SHUXUE JIETI FANGFA



中学数学解题方法

ZHONGXUE SHUXUE JIETI FANGFA



中学数学解题方法

上册

何履端　编

河南人民出版社

中学数学解题方法

（上册）

何履端　编

责任编辑　温　光

河南人民出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 15.625印张 330千字

1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷

印数：1—46,000册

统一书号7105·200　　定价 1.15元

序　言

数学问题是多种多样的，是千变万化的．就其形式来说，可分为问答题、计算题、作图题和证明题等．要解决数学问题，不仅要有计算能力，还需要逻辑思维能力和空间想象能力．解答数学问题的过程，也是培养和发展这些能力的过程．教会学生解答习题，既可以巩固所学的知识，又可以启发学生的智力．因此对于解题方法的研究，是一个值得重视的问题．

目前，我国关于解题方法的书，内容丰富新颖者，为数不多．本书作者，据长期教学经验，选集了国内外的新颖题目，分门别类，作了解答，不但有传统的一般解法，有的还提出了更新的方法，引导读者解放思想，广开思路．本书还在大部分章节后，配置了习题，既便于学生自学也可供教师选用．

这本《中学数学解题方法》是中学数学教师和学生的良好读物．

魏庚人　1981年元月于陕西师大

前　言

中学数学各种解题方法，是数学的“双基”内容；熟悉和掌握各种解题方法，是提高解题能力的一种途径。因此，在加强“双基”教学之时，必须重视使学生掌握各种解题方法。长期以来我曾想：如能把数学解题方法汇编成册，给中学生一本寻找解题方法的工具，无疑对他们学好数学会起一定的促进作用。为此，十多年前我就动手积累资料，也曾几次准备编写，但总感到力不从心。

打倒了“四人帮”，全国掀起了向四个现代化进军的高潮，大好形势要求教育界为国家培养更多更好的人才。作为一个人民教师应该急国家之所急，想学生之所想。于是我大胆尝试，编写了这本“解题方法”，以求抛砖引玉。如果这本书还能对中学生学习数学起一点有益的作用的话，将使我感到极大欣慰。

1978年本书油印本内部非正式发行以来，得到广大师生热情鼓励，大家希望早日正式出版发行。在同志们的鼓励和鞭策下，承蒙河南人民出版社的指导和支持，“解题方法”终于修订出版，得以与广大读者见面，实现了我多年未酬心愿。但由于时间短促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，希望同志们给予批评指正，以使它逐步完善成为一本有益的工具书。

我的老师、陕西师大数学系系主任魏庚人教授，在百忙中为本书代写序言，在此，谨向魏教授深表感谢。

编写过程中，承蒙吴修民同志及我的朋友和学生协助选题、绘图和誊写，在此也一并致谢。

本书是"解题方法"汇编，书中有些方法和题目，是引用某些数学杂志和数学丛书的内容，在此谨向有关作者表示谢意。

全书分为上下两册，上册包括几何部分、代数部分、三角部分；下册拟编解析几何、概率、逻辑代数和微积分初步等部分内容。

何履端　写于福州师专

1980年12月

目　　录

第一章　几 何 部 分

欧几里得几何学内容，可以概括为四大类型问题：1.计算题；2.证明题；3.轨迹题；4.作图题．现行十年制中学数学课本里，有关轨迹问题的教材，虽已十分简化，配备的题目，也廖廖无已，但因轨迹问题是几何学中的重要内容之一，因此本书对求轨迹的方法亦作简单介绍．

解各类型的几何命题，几乎都涉及几何的证明．因此，证明的方法，是本章的重点，本册子给予比较详尽的介绍．

第一节　计算题的解法

最简单的几何图形是点，最基础的几何图形是角、弧和线段．初等几何里所研究的其他图形，如封闭的多边形和曲线形，都可以看作由弧和线段所组成的；至于立体几何里所研究的立体图形，也可看作由多边形和曲线形运动而形成的．

几何计算，就是度量角、弧和线段的大小，以及由它们所组成的平面图形的面积、立体图形的表面积和体积的大小．

计算的办法，总的来说，是根据已知条件和几何图形的度量性定理进行推算．

计算的步骤，应先通过论证，写出计算的式子，然后把式子化简、代入数据，最后着手计算．解应用计算题，还必须画图，写明单位和答案．

解题步骤和解题的完整性，可以概括成如下口诀：

写公式，代数据，然后计算（解题步骤）；

画图形，写单位，不忘答案（解题完整性）．

几何计算的具体方法，根据解题的不同途径，可分为直接计算法、相对计算法和割补法三种．

一、直 接 计 算 法

【定义】 根据已知条件，选用有关的几何定理、公式，直接写出数量关系式，代入已知数量而解之，这种方法，叫做直接计算法．

【举例】

例 1 如图 1，在平面上，把$\angle A$是直角的直角三角形ABC的斜边BC放在定直线l上，按照箭头的方向，把这个

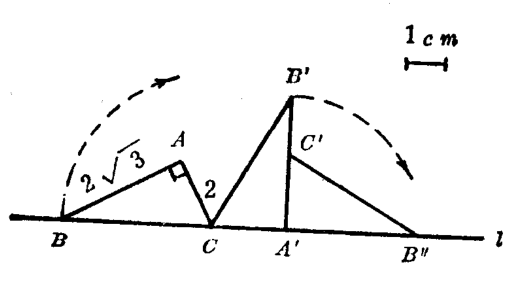


图 1

三角形在 l 上转动两次，使它移动到 $\triangle A'B''C'$ 的位置。如果$AB=2\sqrt{3}$cm，$AC=2$cm，试求：

(1) 顶点B运动到B''所画出的曲线的长度；

(2) 顶点B运动到B''所画出的曲线和直线 l 围成的图形的面积。

解 (1) 顶点B运动到B''所画出的曲线是两段弧：$\overset{\frown}{BB'}$和$\overset{\frown}{B'B''}$. $\overset{\frown}{BB'}$所在圆的圆心为C，半径为CB，$\overset{\frown}{BB'}$所对圆心角是$\angle BCB'$。因为

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4,$$

$$\left.\begin{array}{l}BC=4\\AC=2\end{array}\right\}\Rightarrow\angle ACB=60°\Rightarrow\angle A'CB'=60°$$

$$\Rightarrow\angle BCB'=120°,$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{BB'}\text{长}=\frac{2\pi R_1n_1}{360}=\frac{2\pi\times4\times120}{360}=\frac{8}{3}\pi(\text{cm}).$$

又因为$\overset{\frown}{B'B''}$所在圆的圆心为A'，半径为$A'B'$，$\overset{\frown}{B'B''}$所对圆心角是$\angle B'A'B''=90°$，所以

$$\overset{\frown}{B'B''}\text{长}=\frac{2\pi R_2n_2}{360}=\frac{2\pi\times2\sqrt{3}\times90}{360}=\sqrt{3}\pi(\text{cm}).$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{BB'}\text{长}+\overset{\frown}{B'B''}\text{长}=\left(\frac{8}{3}+\sqrt{3}\right)\pi(\text{cm}).$$

(2) 顶点B运动到B''所画出的曲线和直线 l 围成的图形的面积是

$$S_{\text{扇形}CBB'}+S_{\triangle CB'A'}+S_{\text{扇形}A'B'B''}$$

$$=\frac{\pi R_1^2n_1}{360}+\frac{1}{2}CA'\times A'B'+\frac{\pi R_2^2n_2}{360}$$

$$=\frac{\pi\times4^2\times120}{360}+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}+\frac{\pi\times(2\sqrt{3})^2\times90}{360}$$

$$=\left(2\sqrt{3}+\frac{25}{3}\pi\right)(\mathrm{cm}^2).$$

答：(1) B点所画曲线的长是$\left(\frac{8}{3}+\sqrt{3}\right)\pi\mathrm{cm}$；

(2) 所围成的图形面积是$\left(2\sqrt{3}+\frac{25}{3}\pi\right)\mathrm{cm}^2$。

例 2 图2中长方形$ABCD$的长 $BC=10\mathrm{cm}$，宽 $AB=7\mathrm{cm}$。设以经过顶点A的直线AE为折痕，折转过来，使顶点D和在BC边上的某点F相重合。这时，试求BF和DE的长。

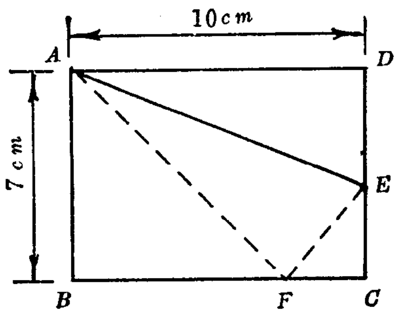


图 2

解 在直角△ABF中，因为

$$AF=AD=10\mathrm{cm},\quad AB=7\mathrm{cm},$$

$$\therefore\quad BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}(\mathrm{cm}).$$

在直角△EFC中，设$EF=x\mathrm{cm}$，则

$$CE = CD - ED = CD - EF = 7 - x.$$

$$\therefore \quad FC^2 + CE^2 = EF^2,$$

$$(10 - \sqrt{51})^2 + (7 - x)^2 = x^2,$$

$$x = \frac{10}{7}(10 - \sqrt{51})(\text{cm}).$$

答： $BF = \sqrt{51}$ cm，$DE = \frac{10}{7}(10 - \sqrt{51})$cm.

例 3 一个凸五边形，以每相邻三个顶点为顶点的三角形的面积都等于1，求这个五边形的面积.

解 设凸五边形为 $ABCDE$（如图3）.

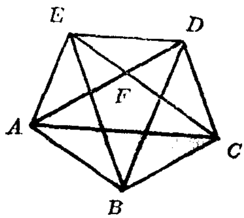


图 3

$\because \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE}$,（已知）

$\therefore \quad EC \parallel AB$.（同底等积必等高）

同理 $AD \parallel BC$，$AC \parallel ED$，则 $ABCF$ 为平行四边形. 所以

$$\triangle ACF \cong \triangle ABC, \quad S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ABC} = 1.$$

设 $S_{\triangle AEF} = x$，则

$$S_{\triangle EFD} = 1 - x, \quad S_{\triangle FCD} = S_{\triangle AEF} = x,$$

$$\therefore \quad \frac{x}{1-x} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle EFD}} = \frac{AF}{FD}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{x} = \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle FCD}} = \frac{AF}{FD}. \qquad ②$$

由②代入①，得