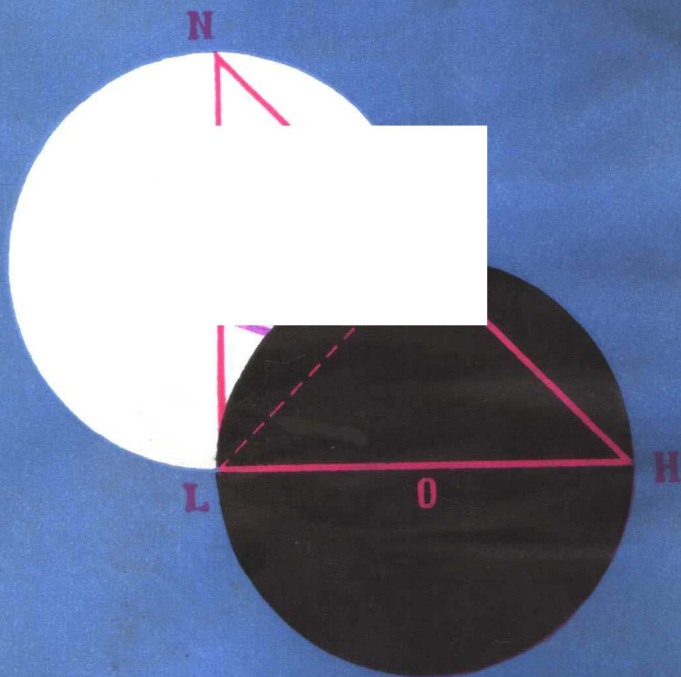


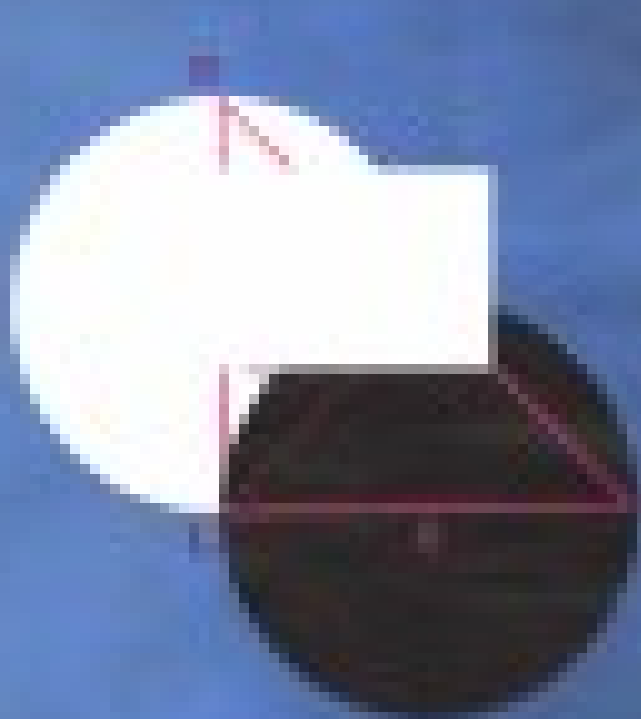
中学数学解题方法(上册)

ZHONGXUE SHUXUE JIETI FANGFA



中学数学解题方法(附)

ZHONGXUE SHUXUE JIETI FANGFA



中学数学解题方法

上册

何履端 编

河南人民出版社

中学数学解题方法

(上册)

何履端 编

责任编辑 温 光

河南人民出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 15.625印张 330千字

1982年1月第1版 1982年1月第1次印刷

印数,1—46,000册

统一书号7105·200 定价1.15元

序 言

数学问题是多种多样的，是千变万化的。就其形式来说，可分为问答题、计算题、作图题和证明题等。要解决数学问题，不仅要有计算能力，还需要逻辑思维能力和空间想象能力。解答数学问题的过程，也是培养和发展这些能力的过程。教会学生解答习题，既可以巩固所学的知识，又可以启发学生的智力。因此对于解题方法的研究，是一个值得重视的问题。

目前，我国关于解题方法的书，内容丰富新颖者，为数不多。本书作者，据长期教学经验，选集了国内外的新颖题目，分门别类，作了解答，不但有传统的一般解法，有的还提出了更新的方法，引导读者解放思想，广开思路。本书还在大部分章节后，配置了习题，既便于学生自学也可供教师选用。

这本《中学数学解题方法》是中学数学教师和学生的好读物。

魏庚人 1981年元月于陕西师大

前 言

中学数学各种解题方法，是数学的“双基”内容；熟悉和掌握各种解题方法，是提高解题能力的一种途径。因此，在加强“双基”教学之时，必须重视使学生掌握各种解题方法。长期以来我曾想：如能把数学解题方法汇编成册，给中学生一本寻找解题方法的工具，无疑对他们学好数学会起一定的促进作用。为此，十多年前我就动手积累资料，也曾几次准备编写，但总感到力不从心。

打倒了“四人帮”，全国掀起了向四个现代化进军的高潮，大好形势要求教育界为国家培养更多更好的人才。作为一个人民教师应该急国家之所急，想学生之所想。于是我大胆尝试，编写了这本“解题方法”，以求抛砖引玉。如果这本书还能对中学生学习数学起一点有益的作用的话，将使我感到极大欣慰。

1978年本书油印本内部非正式发行以来，得到广大师生热情鼓励，大家希望早日正式出版发行。在同志们的鼓励和鞭策下，承蒙河南人民出版社的指导和支持，“解题方法”终于修订出版，得以与广大读者见面，实现了我多年未酬心愿。但由于时间短促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，希望同志们给予批评指正，以使它逐步完善成为一本有益的工具书。

我的老师、陕西师大数学系系主任魏庚人教授，在百忙中为本书代写序言，在此，谨向魏教授深表感谢。

编写过程中，承蒙吴修民同志及我的朋友和学生协助选题、绘图和誊写，在此也一并致谢。

本书是“解题方法”汇编，书中有些方法和题目，是引用某些数学杂志和数学丛书的内容，在此谨向有关作者表示谢意。

全书分为上下两册，上册包括几何部分、代数部分、三角部分；下册拟编解析几何、概率、逻辑代数和微积分初步等部分内容。

何履端 写于福州师专

1980年12月

目 录

前言

第一章 几何部分	(1)
第一节 计算题的解法	(1)
一、直接计算法	(2)
二、相对计算法	(7)
三、割补法	(10)
练习一	(13)
第二节 证明的方法	(16)
一、叠合法(重合法)	(19)
二、合一法	(21)
三、综合法	(23)
四、分析法	(28)
五、反证法	(32)
六、同一法(伪设法)	(45)
七、演绎法(三段论法)	(47)
八、普通归纳法(不完全归纳法)	(50)
九、枚举归纳法(完全归纳法)	(52)
十、数学归纳法	(57)
十一、解析法(坐标法)	(62)
十二、矢量证法	(67)

十三、复数证法	(70)
十四、代数证法	(76)
十五、三角证法	(78)
十六、计积证法	(87)
练习二	(93)
第三节 尺规作图的方法	(98)
一、轨法	(100)
二、奠基法	(102)
三、代数法 (代数分析法)	(104)
四、位似法	(109)
五、等积变换法	(112)
六、平移法 (平行迁移法)	(113)
七、对称法 (翻折移位法)	(115)
八、逆求法 (逆序作图法)	(117)
九、换题法 (变更问题法)	(119)
十、定点法	(120)
练习三	(122)
第四节 求轨迹的方法	(123)
一、特殊点探迹法 (分析法)	(123)
二、变换法 (综合法)	(126)
三、解析法 (坐标法)	(129)
第二章 代数部分	(134)
第一节 数的问题	(134)
一、求最大公约数和最小公倍数	(134)
二、开平方	(143)
三、复数四则运算	(163)

练习四	(181)
第二节 式的运算	(182)
一、有理式的四则运算	(182)
二、根式的四则运算	(202)
三、多项式开平方	(204)
四、因式分解	(209)
五、求最高公因式和最低公倍式	(228)
六、恒等式的证明	(234)
练习五	(237)
第三节 解方程	(238)
一、一元一次方程解法	(238)
二、一元二次方程解法	(241)
三、高次方程解法	(247)
四、无理方程解法	(263)
五、指数方程解法	(275)
六、对数方程解法	(280)
七、方程组的解法	(283)
练习六	(304)
第四节 不等式	(308)
一、一元一次不等式解法	(308)
二、一元一次不等式组解法	(310)
三、一元二次不等式解法	(315)
四、绝对值不等式解法	(319)
五、不等式的证明方法	(323)
练习七	(346)
第五节 函数	(348)

一、函数关系表示法	(348)
二、函数定义域表示法	(353)
三、函数定义域的求法	(356)
四、函数值域的求法	(361)
五、求函数的极值(极大值和极小值)	(363)
六、求函数关系的解析式	(389)
练习八	(392)
第六节 排列和组合	(394)
一、直接分步法	(395)
二、直接分类法	(396)
三、间接分步法	(397)
四、间接分类法	(400)
练习九	(401)
第七节 数列	(402)
一、求数列的通项	(403)
二、求数列的前 n 项之和	(408)
三、化循环小数为分数	(419)
练习十	(421)
第三章 三角部分	(424)
第一节 三角函数式的恒等变换	(424)
一、坐标代换法	(424)
二、因式分解法	(427)
三、求差法	(430)
四、化为两弦法	(433)
五、“1”的代换法	(434)
六、交叉相消法	(436)

七、数学归纳法	(439)
八、代入法	(442)
九、代值法	(446)
十、根据复数相等法	(450)
十一、反三角运算法	(452)
十二、降幂法(降次法)	(455)
第二节 三角函数图象的作法	(456)
一、描点法(代数法)	(456)
二、几何法	(458)
三、变换法	(459)
第三节 三角方程的解法	(464)
一、引用辅助未知数法	(464)
二、因式分解法	(466)
三、引用辅助角法	(468)
四、万能置换法	(470)
第四节 求三角函数周期	(473)
一、基本法	(473)
二、图象观察法	(476)
三、最小公倍数法	(477)
练习十一	(479)

第一章 几何部分

欧几里得几何学内容，可以概括为四大类型问题：1. 计算题；2. 证明题；3. 轨迹题；4. 作图题。现行十年制中学数学课本里，有关轨迹问题的教材，虽已十分简化，配备的题目，也寥寥无已，但因轨迹问题是几何学中的重要内容之一，因此本书对求轨迹的方法亦作简单介绍。

解各类型的几何命题，几乎都涉及几何的证明。因此，证明的方法，是本章的重点，本册子给予比较详尽的介绍。

第一节 计算题的解法

最简单的几何图形是点，最基础的几何图形是角、弧和线段。初等几何里所研究的其他图形，如封闭的多边形和曲线形，都可以看作由弧和线段所组成的；至于立体几何里所研究的立体图形，也可看作由多边形和曲线形运动而形成的。

几何计算，就是度量角、弧和线段的大小，以及由它们所组成的平面图形的面积、立体图形的表面积和体积的大小。

计算的办法，总的来说，是根据已知条件和几何图形的度量性定理进行推算。

计算的步骤，应先通过论证，写出计算的式子，然后把式子化简、代入数据，最后着手计算。解应用计算题，还必须画图，写明单位和答案。

解题步骤和解题的完整性，可以概括成如下口诀：

写公式，代数据，然后计算（解题步骤）；

画图形，写单位，不忘答案（解题完整性）。

几何计算的具体方法，根据解题的不同途径，可分为直接计算法、相对计算法和割补法三种。

一、直接计算法

【定义】 根据已知条件，选用有关的几何定理、公式，直接写出数量关系式，代入已知数量而解之，这种方法，叫做直接计算法。

【举例】

例 1 如图 1，在平面上，把 $\angle A$ 是直角的直角三角形 ABC 的斜边 BC 放在定直线 l 上，按照箭头的方向，把这个

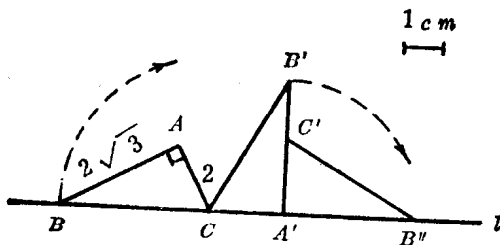


图 1

三角形在 l 上转动两次, 使它移动到 $\triangle A'B''C'$ 的位置. 如果 $AB=2\sqrt{3}\text{ cm}$, $AC=2\text{ cm}$, 试求:

(1) 顶点 B 运动到 B'' 所画出的曲线的长度;

(2) 顶点 B 运动到 B'' 所画出的曲线和直线 l 围成的图形的面积.

解 (1) 顶点 B 运动到 B'' 所画出的曲线是两段弧: $\widehat{BB'}$ 和 $\widehat{B'B''}$. $\widehat{BB'}$ 所在圆的圆心为 C , 半径为 CB , $\widehat{BB'}$ 所对圆心角是 $\angle BCB'$. 因为

$$\left. \begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \\ BC &= 4 \\ AC &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ \Rightarrow \angle A'CB' = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCB' = 120^\circ,$$

$$\therefore \widehat{BB'} \text{ 长} = \frac{2\pi R_1 n_1}{360} = \frac{2\pi \times 4 \times 120}{360} = \frac{8}{3}\pi (\text{cm}).$$

又因为 $\widehat{B'B''}$ 所在圆的圆心为 A' , 半径为 $A'B'$, $\widehat{B'B''}$ 所对圆心角是 $\angle B'A'B'' = 90^\circ$, 所以

$$\widehat{B'B''} \text{ 长} = \frac{2\pi R_2 n_2}{360} = \frac{2\pi \times 2\sqrt{3} \times 90}{360} = \sqrt{3}\pi (\text{cm}).$$

$$\therefore \widehat{BB'} \text{ 长} + \widehat{B'B''} \text{ 长} = \left(\frac{8}{3} + \sqrt{3} \right) \pi (\text{cm}).$$

(2) 顶点 B 运动到 B'' 所画出的曲线和直线 l 围成的图形的面积是

$$\begin{aligned} & S_{\text{扇形} CBB'} + S_{\triangle CB'A'} + S_{\text{扇形} A'B'B''} \\ &= \frac{\pi R_1^2 n_1}{360} + \frac{1}{2} CA' \times A'B' + \frac{\pi R_2^2 n_2}{360} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi \times 4^2 \times 120}{360} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} + \frac{\pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 90}{360} \\
 &= \left(2\sqrt{3} + \frac{25}{3}\pi \right) (\text{cm}^2).
 \end{aligned}$$

答: (1) B 点所画曲线的长是 $\left(\frac{8}{3} + \sqrt{3} \right) \pi \text{cm}$;

(2) 所围成的图形面积是 $\left(2\sqrt{3} + \frac{25}{3}\pi \right) \text{cm}^2$.

例 2 图 2 中长方形 $ABCD$ 的长 $BC=10\text{cm}$, 宽 $AB=7\text{cm}$. 设以经过顶点 A 的直线 AE 为折痕, 折转过来, 使顶点 D 和在 BC 边上的某点 F 相重合. 这时, 试求 BF 和 DE 的长.

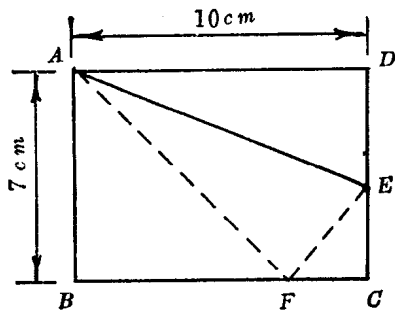


图 2

解 在直角 $\triangle ABF$ 中, 因为

$$AF = AD = 10\text{cm}, \quad AB = 7\text{cm},$$

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51} (\text{cm}).$$

在直角 $\triangle EFC$ 中, 设 $EF = x\text{cm}$, 则

$$CF = CD - ED = CD - EF = 7 - x,$$

$$\therefore FC^2 + CE^2 = EF^2,$$

$$(10 - \sqrt{51})^2 + (7 - x)^2 = x^2,$$

$$x = \frac{10}{7}(10 - \sqrt{51})(\text{cm}).$$

答: $BF = \sqrt{51} \text{ cm}$, $DE = \frac{10}{7}(10 - \sqrt{51}) \text{ cm}$.

例 3 一个凸五边形, 以每相邻三个顶点为顶点的三角形的面积都等于 1, 求这个五边形的面积.

解 设凸五边形为 $ABCDE$ (如图 3).

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE},$$

(已知)

$$\therefore EC \parallel AB. \quad (\text{同底等积必等高})$$

同理 $AD \parallel BC$, $AC \parallel ED$, 则 $ABCF$ 为平行四边形.
所以

$$\triangle ACF \cong \triangle ABC, \quad S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ABC} = 1.$$

设 $S_{\triangle AEF} = x$, 则

$$S_{\triangle EFD} = 1 - x, \quad S_{\triangle FCD} = S_{\triangle AEF} = x,$$

$$\therefore \frac{x}{1-x} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle EFD}} = \frac{AF}{FD}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle FCD}} = \frac{AF}{FD}. \quad (2)$$

由②代入①, 得

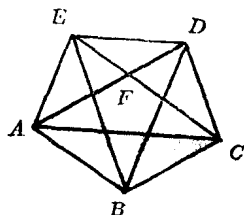


图 3