根据教育部新大纲及最新教材编写

金牌笔记

双色

名师指路
色彩提示
启迪认知
折桂夺金

本册主编 张世强

初二数学

北京师范大学出版社

金牌笔记

初二数学

主　编　张世强

编　写　李念成　李辉　沈蓉
　　　　于春明　李欣

北京师范大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

金牌笔记.初二数学/刘振山编.—北京：北京师范大学出版社，2001.6
ISBN 7-303-05837-0

Ⅰ.金… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第042428号

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街19号 邮政编码：100875）
出版人：常汝吉
北京联华印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：850mm×1168mm 1/32 印张：10 字数：210千字
2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷
印数：1～31 000 定价：13.50元

《金牌笔记》初中系列编委会

双色教辅，中学生的朋友

——写在《金牌笔记》初中系列出版之前

初中阶段的学生，其年龄大体在十一二岁至十四五岁之间。心理学上把这个阶段叫作“少年期”或“学龄中期”。它是由童年期向青年期过渡，个体心理发展历程中的一个非常重要的转折期。幼稚与成熟、独立与依赖；感知的发展，求知欲的强烈；抽象思维能力的构建，思维的独立性和批判性显著增强等等，是这个阶段学生身心发展和认知能力的特点。了解这些特点，从学生自身的特点和规律出发，是我们编好教辅书的前提和依据。

近几年来，不少出版社一直在探索如何编写“高品味、高质量”的“新一代教辅书”。关于“高品味、高质量”的标准，人们尽管可以提出许多条，诸如：要体现新的教育观念、教育思想；要遵循教学规律；要满足不同教学环节功能的需要；要符合学生的认知特点等等，但我们认为，归根结底还是要从不同年龄段学生的身心发展实际和认知特点出发。因为新的教育思想也好，教学规律也好，作为观念性的东西，它也只能是对青少年身心发展特点的正确抽象。

正是从这一认识出发，我们在设计《金牌笔记》（初中系列）丛书时，注意并遵循了下述几个原则：

第一，鉴于初中生感知的发展，求知欲的强烈，我们在书中既加大了知识量的供给，但

又要难易适中，体现少而精，使学生在“轻松”中学习。

第二，鉴于初中生思维方式由形象思维占主导向抽象思维占主导的过渡，我们在讲解知识的同时，注意解题思路、方法的渗透和培养，注意学习能力的养成。

第三，鉴于初中生独立探究事物意向的萌发，他们已不再像小学生那样，易于满足教科书的结论或权威解释。我们在书中设置了“误点矫正”，在有些例题解析中设计了不同情景，比较了不同解法，以便启迪异向思维，培养初步的创新能力。

第四，鉴于初中生感观区分能力的增强，我们在正文中使用了双色。“双色”主要不是为了装饰，为了好看；而是通过色彩的不同，把知识与方法；一般知识与重点知识；解析讲述与总结归纳相区别。通过区别、比较、鉴别，强化感观认知度，以增强学习效果。

在上述思想指导下，为方便学生使用，在具体编写过程中，我们力求使本从书体现如下特点：

1. 依据大纲，同步教材。本从书各册均按照教育部新大纲和2001年最新教材编写。理科同步到节，文科同步到单元或课。作为课堂笔记、学习指导类教辅书，学生可随教学进度即时参阅。

2. 讲练结合，学考兼济。本从书将教材的内容进行了系统梳理。“重点分析”、“误点矫正”部分突出训练过程，注重总结归纳；“中考挂钩”部分对近年部分重点省、市中考试题进行了评点；“自检自测”、“综合自测”部分则精心设计了知识检验、能力训练、开放思维等不同类型的试题。既有助于平时学习，又有助于中考总

复习。

3. 言简意赅，深入浅出。从减轻学生负担的角度出发，书中对教材中的重点、难点、疑点都做了深入浅出的解析，语言简洁准确，务求实用。

4. 彩色提示，版面新颖。用色彩突出重点、难点、疑点；用色彩凸显公式、规律、原理；让色彩告诉你哪些应作为课堂笔记牢记于心。根据内容需要，行文中还不时插入栩栩如生的卡通画，以增加学习兴趣。

《金牌笔记》（初中系列）丛书是我们在探索“新一代教辅书”的过程中诞生的，无论是内容还是形式，都作了某些创新尝试，不敢妄言其好，但确是我们用心用力去做的一套高档次的教辅书。诚愿得到广大初中朋友们的喜欢，同时也就教于同行们的指点。

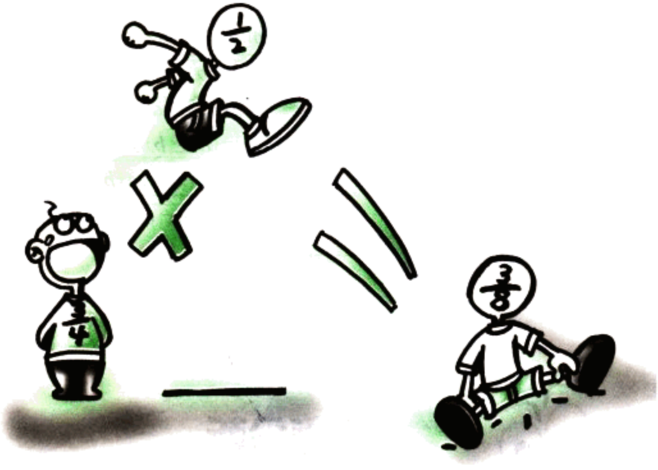
北京师范大学出版社综合编辑室

《金牌笔记》编委会

目录

代数

第八章　因式分解



知识网络

知识要点

因式分解	提公因式法	$ma+mb=m(a+b)$
	运用公式法	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
	分组求解法	$ma+mb+na+nb=(a+b)(m+n)$
	十字相乘法	$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$ 其中 $a=a_1a_2$ ，$c=c_1c_2$ $b=a_1c_2+a_2c_1$

重点分析

一、因式分解的定义

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

二、因式分解的方法

（一）提公因式法

如果一个多项式的各项含有一个公共的因式，我们就把这个公共的因式叫做这个多项式各项的公因式.

比如 m 是多项式 $ma-mb+mc$ 的各项的公因式.

又如 $2ab$ 是多项式 $2a^2b-2ab^2+4abc$ 的各项的公因式.

另外，请同学们注意：一个多项式的公因式也可以是多项式.

例如 $x-y$ 是多项式 $(x-y)-(x+y)(x-y)$ 的各项的公因式.

再如 $5(a-b)^2$ 是多项式 $5(a-b)^2+10(a-b)^3$ 的各项的公因式. 那么，何为提公因式法呢?

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

采用“提公因式法”分解因式，应先找出所给多项式的公因式.

而要找出所给出的多项式的各项的公因式，应注意以下几个方面：

1. 给出的多项式的各项的系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数.
2. 字母取各项相同的字母，而且各字母的指数取次数最低的;
3. 如果多项式的第一项的系数是负的，一般要提出“-”号，使括号内的第一项的系数是正的. 在提出“-”号时，多项式的各项都要变号.

例 1. 把 $16a^4b^3-8ab^2c$ 分解因式.

解：$16a^4b^3-8ab^2c$

$=8ab^2\cdot 2a^3b-8ab^2\cdot c$

$=8ab^2\cdot(2a^3b-c)$.

例 2. 把 $(b-c)^2-(b-c)$ 分解因式.

解：$(b-c)^2-(b-c)$

$=(b-c)[(b-c)-1]$

$=(b-c)(b-c-1)$.

例 3. 把多项式 $2a(x+y)^2-4a(x+y)$ 分解因式.

解：$2a(x+y)^2-4a(x+y)$

$=2a(x+y)[(x+y)-2]$

$=2a(x+y)(x+y-2)$.

例 4. 把 $x^m-x^{m+1}+3x^{m+2}$ 分解因式（m 是正整数）.

解：$x^m-x^{m+1}+3x^{m+2}$（注意：$x^{m+1}=x^m\cdot x$, $x^{m+2}=x^m\cdot x^2$）

$=x^m-x^m\cdot x+x^m\cdot 3x^2$

$=x^m(1-x+3x^2)$.

例 5. 把 $-2a^2b^mc+4a^3b^{m+1}-8a^4b^{m+2}$（$m$ 是正整数）.

解：$-2a^2b^mc+4a^3b^{m+1}-8a^4b^{m+2}$

$=-2a^2b^m(c-2ab+4a^2b^2)$.

例 6. 把 $(x-y)^2-(y-x)$ 分解因式.

分析：我们注意到 $(x-y)^2=(y-x)^2$，同时 $y-x=-(x-y)$ 于是，就有两种不同的解法.

解法一：$(x-y)^2-(y-x)$

$=(x-y)^2+(x-y)$

$=(x-y)[(x-y)+1]$

$=(x-y)(x-y+1)$.

解法二：$(x-y)^2-(y-x)$

$=(y-x)^2-(y-x)$

$=(y-x)[(y-x)-1]$

$=(y-x)(y-x-1)$.

(二)运用公式法

如果把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做运用公式法.

比如：$(a+b)(a-b)\ \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{乘法公式}}{\rightleftharpoons}}\ a^2-b^2$.

1. 平方差公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

这就是说，两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积. 这个公式就是平方差公式.

注意：能够运用平方差公式分解因式的多项式的特点是：多项式共两项，两项分别是某个数的平方且两项异号. 如果一个多项式同时满足上述三个条件，就可以采用平方差公式分解因式.

比如：$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

例1. $-(3x+2y)(3x-2y)$是下列哪个多项式分解因式的结果？

A. $9x^2+4y^2$　　B. $-9x^2-4y^2$

C. $9x^2-4y^2$　　D. $-9x^2+4y^2$

分析：显然，以上四个备选答案均为二项式，而选项A和B的两项均同号，不能分解因式，可采用淘汰法把A和B排除. 而C和D均可以用平方差公式解因式，不难得出，正确的答案选D.

下面，我们换一个角度思考问题，本题不是分解因式，而是给出了分解因式的结果，让我们找出它是由哪个多项式分解因式得到的. 因此，我们可以通过计算，求出原来的多项式.

$-(3x+2y)(3x-2y)=-(9x^2-4y^2)=-9x^2+4y^2$.

所以，选 D.

例 2. 把 $36a^2-25$ 分解因式.

解：$36a^2-25=(6a)^2-5^2=(6a+5)(6a-5)$.

例 3. 把 $144x^2-1$ 分解因式.

解：$144x^2-1=(12x)^2-1^2=(12x+1)(12x-1)$.

例 4. 把 $0.09x^4-\frac{1}{49}y^6$ 分解因式.

解：$0.09x^4-\frac{1}{49}y^6=(0.3x^2)^2-(\frac{1}{7}y^3)^2$

$=(0.3x^2+\frac{1}{7}y^3)(0.3x^2-\frac{1}{7}y^3)$.

例 5. 把 $-169a^2b^4+81x^4y^2$ 分解因式.

解：$-169a^2b^4+81x^4y^2$

$=-(169a^2b^4-81x^4y^2)$

$=-[(13ab^2)^2-(9x^2y)^2]$

$=-(13ab^2+9x^2y)(13ab^2-9x^2y)$.

此题，我们也可以利用加法交换作，把多项式转化为 $81x^4y^2-169a^2b^4$，再分解因式，请同学们自己完成.

例 6. 把 $4(a+2b)^2-25(a-b)^2$ 分解因式.

解：$4(a+2b)^2-25(a-b)^2$

$=[2(a+2b)]^2-[5(a-b)]^2$

$=[2(a+2b)+5(a-b)][2(a+2b)-5(a-b)]$

$=(2a+4b+5a-5b)(2a+4b-5a+5b)$

$=(7a-b)(9b-3a)$（注意：$9b-3a$ 能继续分解）

$=3(7a-b)(3b-a)$.

注意：分解到每一个多项式因式，再也不能分解为止.

2. 完全平方公式

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

能够运用完全平方公式分解因式的多项式的特点是多项式是三项式，其中的两项分别是两个数的平方，而且另一项是这两个数的乘积的2倍. 若这另一项的符号为“+”号，则因式分解的结果为$(a+b)^2$; 若这另一项的符号为“-”号，则因式分解的结果为$(a-b)^2$.

比如：$x^2+10x+25=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=(x+5)^2$

$$a^2+2\quad a\quad b+\quad b^2=(a+b)^2$$

例1. 把$4a^2-12ab+9b^2$分解因式.

解：$4a^2-12ab+9b^2$

$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=(2a-3b)^2$.

例2. 把$\frac{a^2}{4}+a+1$分解因式.

解：$\frac{a^2}{4}+a+1$

$=(\frac{a}{2})^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot 1+1^2=(\frac{a}{2}+1)^2$.

例3. 把$2x^3y-4x^2y^2+2xy^3$分解因式.

解：$2x^3y-4x^2y^2+2xy^3$

$=2xy(x^2-2xy+y^2)$（注意：如果多项式的各项有公因式，先提公因式）

$=2xy(x-y)^2$.

例4. 把$16(a-b)^2+8(a-b)+1$分解因式.

解：$16(a-b)^2+8(a-b)+1$

$=[4(a-b)]^2+2\cdot4(a-b)\cdot1+1^2$

$=[4(a-b)+1]^2$

$=[4a-4b+1]^2$.

例 5. 把 $4a^2+12(b-a)+9(a-b)^2$ 分解因式.

解：$4a^2+12(b-a)+9(a-b)^2$

$=4a^2-12a(a-b)+9(a-b)^2$

$=(2a)^2-2\cdot2a\cdot3(a-b)+[3(a-b)]^2$

$=[2a-3(a-b)]^2$

$=(2a-3a+3b)^2$

$=(-a+3b)^2$

$=(a-3b)^2$.

例 6. 选择题

如果 $9x^2+mxy+25y^2$ 是一个完全平方式，则 m 的值(　　).

A. 只能是 30　　　　B. 只能是 −30

C. 是 30 或 −30　　　　D. 是 15 或 −15

解：方法一，因为上述备选答案中，涉及到 ±30 和 ±15，所以，我们可以分别用 30，−30，15，−15 代替 m，得到四个多项式，不难发现当 m 为 30 或 −30 时，它是一个完全平方式，故选 C.

方法二，由 $9x^2+mxy+25y^2$

$=(3x)^2+2\cdot3x\cdot5y+(5y)^2$

$=(3x)^2+30xy+(5y)^2$.

于是，可得 $|m|=30$，　$\therefore m=\pm30$，

故选 C.

例 7. 把 $16x^4-72x^2y^2+81y^4$ 分解因式.

解：$16x^4-72x^2y^2+81y^4$

$=(4x^2)-2\cdot 4x^2\cdot 9y^2+(9y^2)^2$

$=(4x^2-9y^2)^2$

（注意：分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止）

$=[(2x+3y)(2x-3y)]^2$

$=(2x+3y)^2(2x-3y)^2.$

例 8. 把 $a^2(a+2b)^2-9a^2(3a+b)^2$ 分解因式.

解：$a^2(a+2b)^2-9a^2(3a+b)^2$

$=a^2[(a+2b)^2-9(3a+b)^2]$

（如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式）

$=a^2[(a+2b)^2-(9a+3b)^2]$

$=a^2[(a+2b)+(9a+3b)][(a+2b)-(9a+3b)]$

$=a^2(10a+5b)(-8a-b)$

（注意 $10a+5b$ 还能继续分解因式；而 $-8a-b$ 的第一项的系数是负数，要提出"-"号，使括号内的第一项的系数是正的.）

$=-5a^2(2a+b)(8a+b).$

例 9. 把 $a^{n+2}-9a^n$ 分解因式.

解：$a^{n+2}-9a^n$

$=a^n(a^2-9)=a^n(a+3)(a-3).$

例 10. 把 $2a^2(a^2-25b^2)+50b^2(25b^2-a^2)$ 分解因式.

解：$2a^2(a^2-25b^2)+50b^2(25b^2-a^2)$

$=2a^2(a^2-25b^2)-50b^2(a^2-25b^2)$（公因式为 $2(a^2-25b^2)$）

$=2(a^2-25b^2)(a^2-25b^2)$

$=2(a+5b)(a-5b)\cdot(a+5b)(a-5b)$

$=2(a+5b)^2(a-5b)^2$.（相同的因式，写成乘方的形式）