

数 字 滤 波 器

(专题译丛)

中国人民解放军京字一八三部队

一九七三年五月

数字滤波器

(专题译丛)

1973年5月出版

編輯者 天津第80号邮政信箱
中国人民解放军京字183部队

出版者 中国人民解放军京字183部队

前 言

近年来，国外对数字滤波器研究颇为重视，有关这方面的论文、报告和专輯資料日漸增多。并认为，数字滤波技术是有源网络理论的一种新发展，也是滤波器小型化的一种新途径。据称，数字滤波器已由研制阶段走向商品化和系列化。

所谓数字滤波器，是用数字运算方法完成滤波作用的一种器件，它以数字组件（如延迟器、加法器和乘法器等）作为基本部件。数字滤波器属于无电感的滤波器。

与模拟滤波器相比较，数字滤波器有许多独特的优点，如稳定性高、轉移函数可变、各回路間不存在阻抗匹配問題、体积小、灵活性大、易于多路复用和大規模集成，等等。因此，数字滤波器特别适用于通信、計算、測量、显示、记录、遙測遙控、卫星通信以及宇宙航行等方面。

为了配合我国电子事业迅速发展的需要，我們遵照毛主席“洋为中用”的教导，搜集、翻譯了美、英、日、西德等国关于数字滤波器的部分資料，現汇编成冊，供有关工作人員参考。

由于時間仓促，經驗不足，編譯工作中难免有不当之处，請同志們不吝批評指正。

編譯者

一九七三年五月

目 录

1. 数字滤波器导论.....	(1)
2. 数字滤波原理.....	(21)
3. 数字滤波器.....	(39)
4. 实现数字滤波器的一种方法.....	(43)
5. 数字滤波器综合技术.....	(54)
6. 具有良好信噪比的数字滤波器的实现方法.....	(62)
7. 关于数字滤波器特性的改进.....	(68)
8. 多功能程序控制数字滤波器.....	(78)
9. 数字滤波器替代了笨重的元件.....	(89)
10. 数字滤波器中减少加法器的方法.....	(90)
11. 正交 N 分路滤波器的网络函数.....	(94)
12. 取样数据滤波器在线路中的应用.....	(106)
13. 用于 N 分路滤波器的集成自激 $MOST$ 多路开关.....	(112)
14. 数字式时分复用的 N 分路滤波器.....	(114)
15. 模拟系统的复用法及其在 N 分路滤波器中的应用.....	(122)
16. 何谓数字滤波器.....	(128)

数字滤波器导论

本文的目的在于为数字滤波器的应用提供一个向导。文中讨论了数字滤波器的能力和限制,以及在实时情况下直接取代普通有源和无源滤波器的使用条件。文中描述了基本工作原理,示出了幅度和相位特性。数字滤波技术具有工作极精确无漂移、易于改变滤波器特性以及尺寸小等许多优点。此外,某些类型的数字滤波器还易于获得线性相位特性。文中给出了一个线性相位低通滤波器的设计实例。

一、引言

数字滤波技术应用于取样数据控制系统已有若干时候^[1-5]。自从Hurewicz于1947年发表了第一篇论文以来⁽⁷⁾,数字滤波技术的基础理论和设计程序已取得了很大发展。在取样数据控制系统中,由于采用了数字计算机,故才使用了数字滤波器。数字滤波技术向其他领域的推广,一直被局限于那些采用数字计算机是实际可行的地方。集成电路的最新成就,所谓的大规模集成电路(LSI),业已在实际意义上为以少量集成电路封装件来完成所需的数字滤波作用提供了可能。LSI的美好前景可能会使一完整的数字滤波器装入一个小小的封装件内。这类滤波器的造价可能很低,因为仅需少量标准型集成电路。数字滤波器的特征频率是外部数字式钟频的一个函数。因而,只需选取适当的钟频即可将这些标准滤波器调谐至所需频率范围。然而对于这些滤波器无需等待。现供应的电路已在许多应用场合提供了实用的滤波器^{(8)-(10), (32)}。

数字滤波器具有许多使之能以代替各种无源或有源滤波器的可取的优点。其最突出的优点是可能十分精确无漂移地工作,具备此优点就可能成为 Q 值很高、时间常数极长的稳定滤波器。随温度或时间而来的漂移可忽略不计,因为滤波器的特性像通常由晶控振荡器构成的数字式钟频发生器一样稳定。其稳定度在较大的时间与温度变化范围内优于 1×10^{-6} 。数字滤波器的另外一些优点在于其滤波特性易于加以改变,这对于具有自适应或频率跟踪要求的时变滤波器特别有利。采用某些类型的数字滤波器很易获得线性相位特性,从而改善了瞬变响应和取得恒定延迟特性。甚低频数字滤波器亦易于实现,其尺寸与普通无源滤波器相比大为缩小。数字滤波器无抗性元件。与抗性元件相伴的难以解决的精度和漂移问题的不复存在,将会受到设计人员的充分重视。

* David J. Nowak, Pierre E. Schmid, "Introduction to digital filters", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, VOL. EMC-10, NO. 2, June 1968, PP. 210~220

二、数字滤波器的工作原理

目前使用的数字滤波器略有若干类型, 各种类型滤波器的基本工作原理是相同的。为了便于介绍, 现以图 1 所示的数字滤波器为例。这种数字滤波器由三个单元组成: 1 个模——数变换器, 1 个数字计算器和 1 个数——模变换器。数字滤波器的输入与输出信号均系窄调幅脉冲, 每个取样周期 T_s 有一个脉冲。在时间 $t = nT_s$ 时, 连续的输入信号立即被取样, 并于数字滤波器输入端出现脉冲 $X(nT_s)$ 。在模——数变换器中, 此脉冲幅度被变换成码字。该码字是二进制数字(码元)的代码序列, 而该序列则代表幅度 $X(nT_s)$ 。码字的长度, 亦即其所含的码元数, 决定了再现信号的精度。数字计算是通过这些码字完成的, 将计算器输出的码字插入数——模变换器, 以便产生数字滤波器的输出脉冲 $y(nT_s)$ 。保持电路接在数字滤波器之后, 用以将脉冲流变换为如图所示的连续输出信号。为了去掉由步进近似(保持电路造成的)造成的信号分量, 可能还要进一步加以模拟滤波。

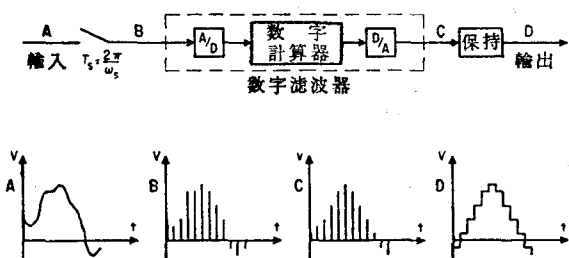


图 1 带有输入取样器和输出保持电路的数字滤波器。

图中还示出了 A—D 各点的典型电压波形图。

数字滤波器的作用由差分方程来定义。此方程将输出脉冲 $y(nT_s)$ 定义为现在的输入脉冲 $X(nT_s)$ 和过去任意数目的输入与输出脉冲的函数。这些运算是在数字计算器中执行的(代表所需的过去的输入脉冲和输出脉冲的码字是存储在数字移位寄存器中)。通常的做法是把符号简化为 $x(n)$ 、 $y(n)$, 就是以 n 表示时间 $t = nT_s$, 下文均照此处理。差分方程的一般式是:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^M b_i y(n-i) \quad (1)$$

如果 $y(n)$ 仅是现在和过去的输入脉冲的函数, 则称之为非递归滤波器。如果过去的输出脉冲也包含在内, 则该滤波器就是递归型的。数字滤波器的分析是用 Z 变换式来进行的。假如把取样运算看作一群单元脉冲与输入信号的倍乘, 那末, 在时间 $t = nT_s$ 时, 取样脉冲即为:

$$X(n) = X(t) \delta(t - nsT_s), \quad \text{时域}$$

$$X(n) = X(nT_s) \delta(t - nT_s), \quad \text{时域}$$

$$X(n) = X(nT_s) e^{-nsT_s}, \quad S\text{域}$$

$$X(n) = X(nT_s) Z^{-n}, \quad Z\text{域}。$$

在末式中, 利用变数 $Z = e^{sT_s}$ 的变化, 则 $X(t)$ 的 Z 变换可定义为:

$$x(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) Z^{-n}$$

$y(Z)$ 具有相同的形式, 而对应于式 (1) 的 Z 变换方程则是:

$$y(Z) = x(Z) \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} + y(Z) \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i} \quad (2)$$

这样一来, 此二方程十分相似; 一式易于从另一式推导出来。过去的数值仅乘以 Z^{-i} , 其中的 i 表示脉冲或码字受到延时的取样周期数。 Z 变换转移函数可依据式 (2) 定义为:

$$H(Z) = \frac{y(Z)}{x(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}} \quad (3)$$

该函数的极点和零点是在 Z 平面进行处理的, 如同在 S 平面处理 S 转移函数一样。

变数 $Z = e^{sT_s}$ 的变化构成了 S 平面的一部分映入 Z 平面内的映象 (见图 2)。由于 Z 是随取样周期 T_s 而变的循环变数, 故仅对位于 $\pm j\omega_s/2$ 之间的 S 平面的窄区 (Strip), 1 对 1 的 S 对 Z 平面映射才是有效的。在此窄区内, 左半平面映入单位 ($|Z|=1$) 圆内, 右半平面落在单位圆之外, 而单位圆本身与 $j\omega$ 轴是相符应的。为了确定数字滤波器的幅度和相位特性, 把 Z 转移函数的极点和零点画于 Z 平面上。图 2 内, 画了两个极点和一个零点作例。在 ω 的任意值 (ω_r) 上, 响应的大小是画至单位圆上 ω_r 点的各零点矢长的乘积除以各极点矢长的乘积。在此例中, 任一 ω_r 的响应大小是 L_1/L_2L_3 。看来在到达 $\omega_s, 2\omega_s$ 等等之后, 响应大小特性是反复重演的。还可看出, 响应量总是对称于 $\omega_s/2$ 。把极点和零点矢相对于正实轴的各个角度 (见图 2) 相加起来, 就可得出相位响应。特定频率 ω_r 下的总相角是零点的角度之和减去极点的角度之和。本例中的相角为 $\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3$ 。相位响应在到达 $\omega_s, 2\omega_s$ ……之后可能反复重演, 但往往也不是这样情况。下一节所述的幅度和相位响应图可按此方式取得。

以式 (4) 代入转移函数式 (3) 也可直接获得相位和幅度响应。

$$Z^{-i} = e^{-ji\omega T_s} = \cos i\omega T_s - j \sin i\omega T_s \quad (4)$$

这样, 就可无需参照 Z 平面来确定响应特性; 不过, Z 平面中的极点和零点图线会提供总转移函数中每一效应的清晰图像。

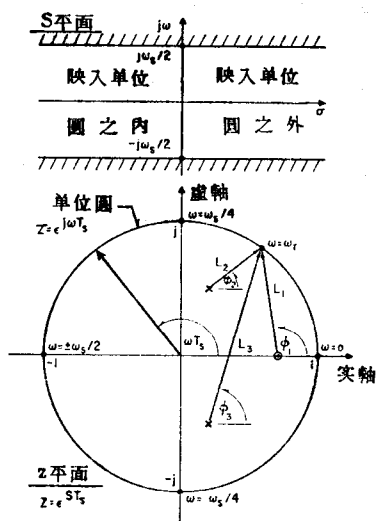


图 2 S 平面和 Z 平面的关系

三、幅度和相位特性

本节介绍零点或极点的一些基本构形的典型幅度和相位特性。极点的响应大小当然只是相应的零点响应大小的倒数。为了解释得清楚，在本节的各幅插图中，零点响应座标位于左侧，而极点响应座标位于右侧。响应曲线仅画到 $\omega = \omega_s$ ，而在 ω_s 的每一倍乘点上，幅度特性均重演。

具有单一实数零点或极点（位于 Z 平面中， $Z = 1, 0.5, 0, -0.5$ 以及 -1 处）的 Z 转移函数的频率响应如图3所示。由于位于 $Z = 0$ 的极点或零点在所有频率上都具有一致的增益，所以当转移函数除位于 $Z = K$ 之零点外还含有任一阶次 m 的一个极点时，所示的零点响应也是适用的。同样，当 $Z = K$ 处的极点和阶次 m 的零点组合在一起时，极点响应仍然保持不变。为了获得位于 $Z = K$ 之零点所示的响应，转移函数 $H(z)$ 也必须含有一个位于 $Z = 0$ 处和零点同阶的极点。为了说明这点，现就 $Z = K$ 处的一阶零点来看，则

$$H(z) = (Z - K) \quad (5)$$

而相应的差分方程为：

$$y(n) = X(n+1) - Kx(n) \quad (6)$$

由于计算 $y(n)$ 时， $X(n+1)$ 项在时间 $t = nT_s$ 时是个不可知项，故此式实际上不可实现。但是，如果把 $Z = 0$ 处的一阶极点加到转移函数上去，则转移函数即为

$$H(z) = (1 - Kz^{-1}) \quad (7)$$

其相应的差分方程为

$$y(n) = X(n) - Kx(n-1) \quad (8)$$

此式现可实现。一般来说，方程式的可实现性的条件是：转移函数的分子中 Z 的次数应小于或等于分母中 Z 的次数。

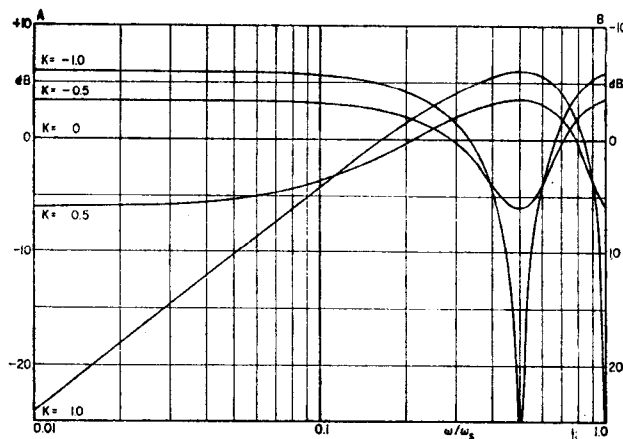


图3 座标A： $Z=K$ 时零点的幅度响应。一般是 $H(z)=(Z-K)/Z^m$ 。
座标B： $Z=K$ 时极点的幅度响应。一般是 $H(z)=Z^m/(Z-K)$ 。

极点在 $Z=K$ 处时, 不存在不可实现性的问题。但是现在证明, 在此情况下存在着过量相位条件, 宜于加上一个同 $Z=K$ 处极点同阶的 $Z=0$ 处的零点。内含单极点的转移函数为:

$$H(Z) = \frac{1}{Z-K} = \frac{Z^{-1}}{1-KZ^{-1}} \quad (9)$$

相应的差分方程为:

$$y(n) = X(n-1) + Ky(n-1) \quad (10)$$

但是, 式(9)分子中的 Z^{-1} 项是一延迟项, 该延迟项仅增大相移, 可借助将 $Z=0$ 处的零点加到转移函数上去的方法予以消除。因而得出的转移函数为:

$$H(Z) = \frac{1}{1-KZ^{-1}} \quad (11)$$

其相应的差分方程为:

$$y(n) = X(n) + Ky(n-1) \quad (12)$$

相应于式(7)、(8)、(11)以及(12)的相位响应特性如图4所示。从图中可以看出, 线性相位特性属于处在单位圆上的极点或零点。利用这一条件以获得线性相位滤波器。位于单位圆上的极点会引致一些振荡问题, 但采用刚好位于单位圆内的极点, 可获得相当线性的相位响应。处于单位圆上的零点没有这种限制, 因而更适于这种应用场合。在实现线性相位低通滤波器中, 节六中的例子包含了处在单位圆上的一些零点。

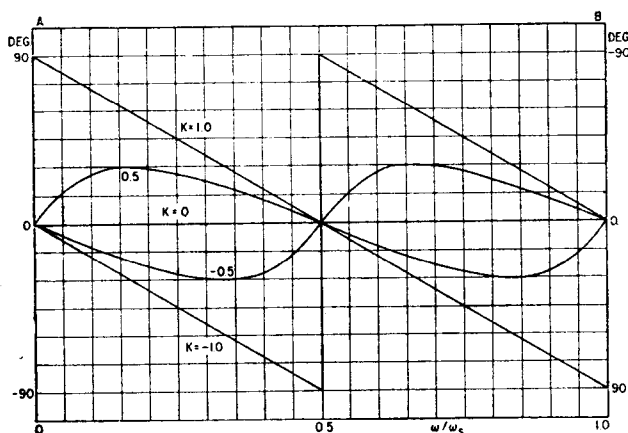


图4 座标A: 零点处于 $Z=K$ 和极点处于 $Z=0$ 时的相位响应。 $G(z)=1-Kz^{-1}$, $y(n)=x(n)-kx(n-1)$ 。座标B: 极点处于 $Z=K$ 和零点处于 $Z=0$ 时的相位响应。 $G(z)=1/(1-Kz^{-1})$, $y(n)=x(n)+Ky(n-1)$ 。

如再参照图3将可看到, 相应于 $K=1$ 的曲线, 自 $\omega=0$ 至 $\omega=\omega_s/4$, 具有很相近的线性20分贝/十进斜率, 它表明位于 $Z=1$ 的零点或极点在这一频率范围内将可分别由 S 或 $1/S$ 来代替。但从图4可以看出, 相应于 $K=1$ 的相位, 不恒为 90° , 而替换时则需 90° 的相位。

为了获得正确的相位特性,对 S 的取代,除了 $Z=1$ 处的零点外还包含一个处在 $Z=-1$ 的极点。即低频部分保持20分贝/十进斜率,而相角仍为所需的 90° 。这种对 S 的取代称为双线性 Z 形式: (11)(12)

$$S = \frac{(1-Z^{-1})}{(1+Z^{-1})} \quad (13)$$

借助此式, S 平面中的转移函数可变换为 Z 平面的转移函数。采用此法的数字滤波器设计业已提供了取代大多数普通模拟滤波器的数字滤波器。这一方法是许多可用数字滤波器设计方法之一。详细的设计资料超出本文的范围与目的, 故不加细述。许多设计技术的最新评述见参考资料[12]。

其次考虑极点或零点的复数对偶。一般来说, 这种对偶可能出现于 Z 平面的任意处, 但作为典型示例, 所选的对偶具有相等的实部和虚部。在单位圆 $|Z|=1$ 上时, 此对偶落在 $Z = (1/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 处, 相当于 $\omega T_s = \pi/4$ 或 $\omega = \omega_s/8$ 。对于 $Z = (K/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 处的零点或极点 ($K = 1, 0.9, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ 以 0), 其幅度响应如图 5 所示。图中还给出了一般的转移函数, 如同采用实数零点或极点那样, 处于 $Z=0$ 的任一阶极点或零点都可能被加至转移函数上去而不致改变频率响应的幅度。在各零点的复数对偶情况下, 转移函数必须包括 $Z=0$ 处的一对极点, 使函数可以实现。这是由于前述可实现性条件的关系, 即分子的阶序应小于或等于分母的阶序。并且, 如同已讨论过的单一实数极点那样, 复数对偶的极点必须与在 $Z=0$ 处的一对零点相组合, 否则就会存在不适当的相位条件。所得出的相位特性连同相应的转移函数和差分方程示于图 6。应值得注意的是, 当极点或零点都落在单位圆上时, 即可获得线性相位特性。

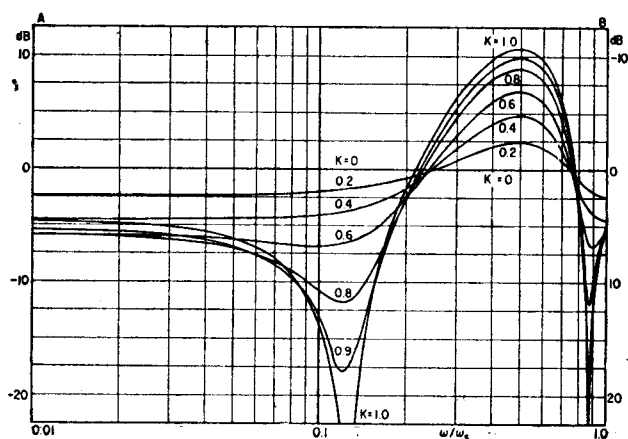


图 5 座标A: $Z = (K/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 时零点复数对偶的幅度响应。一般是,

$$H(z) = (Z^2 - \sqrt{2} K z + K^2) / Z^m.$$

座标B: $Z = (K/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 时极点复数对偶的幅度响应。一般是,

$$H(z) = Z^m / (Z^2 - \sqrt{2} K z + K^2).$$

有助于数字滤波器设计的另一对零点或极点对偶是互为倒量的对偶。这时，对偶之一的幅度可和另一个的幅度互为倒量，这样，对偶之一方就落在单位圆外。采用诸零点 是可能

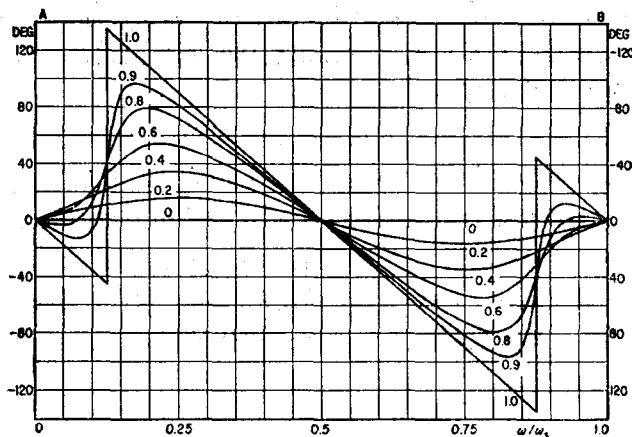


图 6 座标A: K 值如前所示时,处于 $Z=(K/\sqrt{2})(1\pm j)$ 的零点复数对偶和 $Z=0$ 处的第 2 阶极点的相位特性。 $G(z) = 1 - \sqrt{2}Kz^{-1} + K^2z^{-2}$, $y(n) = x(n) - \sqrt{2}Kx(n-1) + K^2x(n-2)$ 。
座标B: 处于 $Z=(K/\sqrt{2})(1\pm j)$ 的极点复数对偶及 $Z=0$ 处的第 2 阶零点的相位特性。 $H(z) = 1/(1 - \sqrt{2}Kz^{-1} + K^2z^{-2})$, $Y(n) = X(n) + \sqrt{2}Ky(n-1) - K^2Y(n-2)$ 。

的，但落在单位圆外的各极点则会产生不稳定性问题。为此，数字滤波器设计中的倒量对偶都取零点对偶。倒量对偶的优点是对偶的相位特性呈线性，而相应的幅度特性可以由对偶在 Z 平面上的位置予以调整。例如，处于 $Z_1 = K$ 、 $Z_2 = 1/K$ 的一对实数零点倒量对偶所产生的幅度响应如图 7 所示。图中 K 的数值为 1、0.5、0.2、-0.2、-0.5 以及 -1。相应的相角在频率

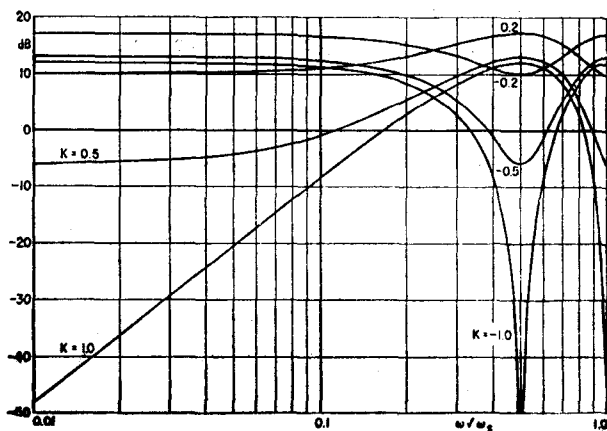


图 7 处于 $Z_1=K$ 、 $Z_2=1/K$ 的实数零点倒量对偶的幅度响应。一般为 $H(z) = (Z^2 - (K+1/K)Z + 1)/Z^m$ 。

为 ω 时为 $2\pi (\omega/\omega_s)$ 弧度, 若 K 为正值, 则加上 π 弧度, 并与 K 的大小无关。为了得以实现, 含有这些零点的转移函数也应有两个处于 $Z = 0$ 的极点。该两个极点给出 $-4\pi(\omega/\omega_s)$ 弧度的相角, 故在 K 为正值时, 总相角是 $-2\pi (\omega/\omega_s)$ 弧度再加 π 弧度; 此相角呈线性而不致跳跃 180° , 零点或极点落在单位圆上时会出现 180° 的相位跳跃。节六中的示例包括在实现线性相位低通滤波器中的实数零点的倒量对偶。

当落在单位圆内的复数对偶的每一零点有一处在单位圆外的倒量点时, 相位特性仍呈线性, 而幅度特性可以加以调节。例如, 前述位于 $Z = (K/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 的复数对偶将可以与倒量 $Z = (1/K\sqrt{2})(1 \pm j)$ 相结合。具有此 4 个零点的转移函数的幅度响应如图 8 所示。此 4 个零点的相角为 $4\pi(\omega/\omega_s)$ 弧度并与 K 的数值无关。为了得以实现, 转移函数应有 4 个处于 $Z = 0$ 的极点, 这些极点给出 $-8\pi(\omega/\omega_s)$ 弧度的相角。这样, 实现转移函数的总相角是 $-4\pi(\omega/\omega_s)$ 弧度。同样, 其响应特性呈线性而无相位跳跃。

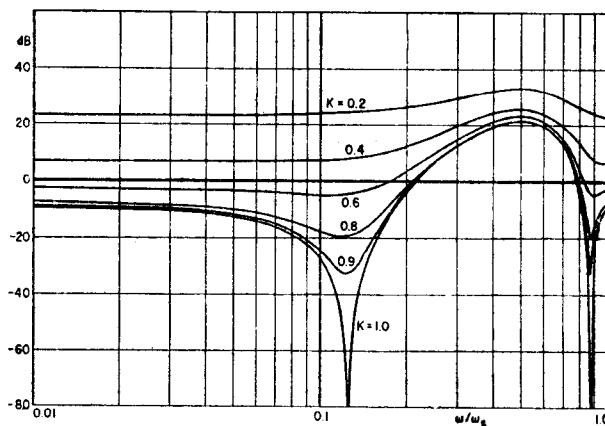


图 8 处于 $Z = (K/\sqrt{2})(1 \pm j)$ 并与 $Z = (1/K\sqrt{2})(1 \pm j)$ 互为倒量零点的复数对偶的幅度响应。一般为 $H(z) = [Z^4 - \sqrt{2}(K+1/K)Z^3 + (K^2 + 2 + 1/K^2)Z^2 - \sqrt{2}(K+1/K)Z + 1]/Z^m$ 。

另一种饶有兴趣的组态是全通滤波器。这时, 一个位于单位圆内、幅度为 K 的极点具有一个位于单位圆外 $Z = 1/K$ 的倒量零点。当 K 为实数值时, 这一对偶落在实轴上, 而其转移函数为:

$$G(\omega) = \left[\frac{1}{K^2} \right] < \tan^{-1} \left[\frac{(1-K^2)\sin\omega T_s}{2K - (1+K^2)\cos\omega T_s} \right]$$

在极点的复数对偶处在单位圆内而倒量零点处于单位圆外的情况下获得了相似的转移函数。由于幅度响应不是频率的函数, 故全通滤波器常作相位校正用。在一个给定的数字滤波器中, 可能内含一对或多对这类极点——零点对偶, 以便调整相位特性, 而幅度特性可保持不变。

处于 Z 平面单位圆外的零点和处于 S 平面右半圆内的零点相当; 因此, 包含零点倒量对偶的函数是一个非最小相位函数。采用倒量对偶具有上述优点, 但付出的代价是增大相移

和延时。在很多滤波应用中，这些增大是可容许的。在那些诸如反馈控制系统或锁相环路的闭环应用中，相移与延时的增大则可能不容许。一般来说，内含 m 个零点倒量对偶和 $2m$ 个在 $Z=0$ 处具有实现性的极点的转移函数，在 $-2m\pi(\omega/\omega_s)$ 弧度的频率 ω 时，具有相当于 mT_s 秒时延的相位角。

四、应用问题

由于数字滤波器的输入和输出是脉冲波形的信号，故要有间置电路才能把该滤波器作实时滤波应用。图9示出了带有数字滤波器的典型的输入—输出间置电路。图10所示是图9中各



图9 数字滤波器及作为一连续实时滤波器所需的间置电路。由A至G各点的振幅频谱示于图10。

标注点的幅度频谱。输入频谱 A 指出了任何频率的信号都可能出现。因为取样操作事实上是一种调制处理，故取样频率 ω_s 至少应为最高输入频率的两倍，否则，会出现频谱搭叠的现象。最小取样率是奈阔斯特率，如这一要求得不到满足，则由此产生的误差都称为频谱迭现误差 (*aliasing errors*)。如果在连续的输入信号中出现高于 $\omega_s/2$ 的信号，则必须加用普通模拟型低通滤波器。依据所需的相位特性，在此模拟型低通滤波器之后还可能要用相位校正器件 (普通的全通滤波器) 来补偿由低通滤波器引入的相位失真。取样器对信号的调制作用 (在取样频率的各个整倍数上) 见图10D。图中假设数字滤波器在 $\omega = \omega_s/10$ 至 $\omega = \omega_s/5$ 的通带间具有理想带通特性。数字滤波器的输出频谱看来好像输入基带频谱受到取样频率各个整倍数的调制。因此，基带频谱如同图10E所示。通常采用的保持电路是零阶保持电路，也叫取样与保持电路。这一电路只不过是如图1所示的下一脉冲到达之前保持前一脉冲之数值。零阶保持电路的转移函数为：

$$H_0(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} \quad (14)$$

此函数的幅度响应的绝对值如图10F的虚线所示。从该图中可明显看出高阶谐波的滤除；也很易于看出采用高取样率的好处。但根据应用的不同，还可能要有普通的低通滤波

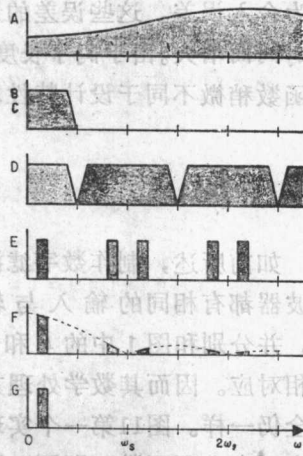


图10 相应与图9 A至G各点的振幅频谱

器。所获得的单带通频谱如图 10G 所示。

总相移是数字滤波器相移、按式 (14) 表示的保持电路的相移、由普通滤波器引入的相移以及由信号通路引入的时延的总和。由时延 t_d 引入的相角随频率线性地增加, 并具有 $-\omega t_d$ 弧度之值。在两处产生的时延都源于数字滤波器本身。模-数变换不是及时发生的。虽然变换时间可能很短, 但都是所有模-数变换方法的函数, 并可能是产生显著延迟的来源。数字计算时间则是产生延迟的另一来源。数字计算时间如同由每一数字式码字的码元数所决定那样, 是用以实现计算器的方法及所需精度的函数。计算时间随价格和复杂性的增加而下降, 而随所需精度的提高而上升。此外, 由于计算必须在取样周期内完成, 数计算时间决定了取样频率的上限。这里有若干个设计折衷方案, 不过大体上可认为, 现今实用的数字式计算器在高于 75 千赫的取样频率上能提供 10 个码元的码字精度, 而在较低的取样频率上提供较长的码字。增加数字电路的工作速度和采用先进的大规模集成电路将对未来的数字滤波器应用提供更短的计算时间^[10]。

以码元数有限的数字式码字表示每一脉冲会导致幅度误差。其最大值为正或负的最低位码元值的一半。在模-数变换器中, 将此误差叫做量化误差。事实上, 这些误差是以加至数字滤波器输入端的噪声形式出现的。那些由于码字长度有限而出现在数字计算中的误差都称之为舍入误差。这些误差的影响是使噪声引入输出信号, 在递归型滤波器中, 这种误差可能随时间而增大。由于码字长度有限而引起的误差还出现在转移函数的系数中, 这些误差会使转移函数稍微不同于设计特性。关于有限码字长度的影响的专题资料参见参考资料^(12~16, 33)。

五、数字滤波器的实现

如前所述, 制作数字滤波器的方法可以有若干种, 图 11 示出了其中的五种方案。该五种滤波器都有相同的输入与输出, 并分别和图 1 中的 B 和 D 点相对应。因而其数学处理方法全仍一样。图 11 第一个实现方案 (自上而下数) 即图 1 所示的方块图。图 1 中数字计算器内包括数字存贮, 而现在则分开单独表示以供实现比较。第二个方案没有保持电路。其中, 数字计算器输出的数字式码字, 在下一个码字到达之前存贮于存贮寄存器中。数-模变换器不断地监视此寄存器的贮量, 并产生阶进波

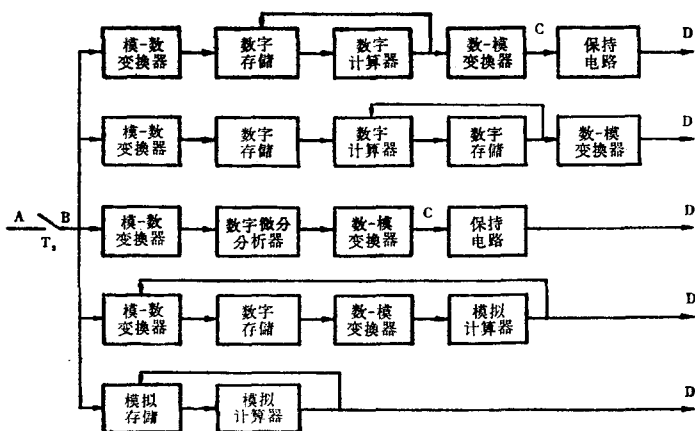


图 11 数字滤波器的实现方案

A~D 各点上的信号与图 1 所示的相对应

形。虽然此方案未用保持电路，但其结果实际上一样。图11中的第三个方案是利用数字微分分析器(DDA)执行数字计算^[17, 18, 19]。第四个方案兼备了数字存贮的精度与模拟计算的速度。在某种情况下，计算器可以是数—模变换器的一部分，依据差分方程的系数调整权重^[21]。如同第2种方法的那样，数字存贮可使码字保持一次周期，而计算器的输出将如同采用了保持电路那样具有相同的阶进波形。图11中的第五个方案是数字滤波器的模拟实现，其存贮只不过是取样的电压幅值的直接存贮（其取样采用了和前述用于数字滤波器输出相同的一阶保持电路），而不是将数字码字存贮于移位寄存器中。模拟计算器可以是受到权重的加法器运算放大电路^[29]。这一实现方案提示了这样一个问题，即可将数字滤波器更恰当地定名为取样数字滤波器，因为所有实现方案的基本特征是已调幅的脉冲序列信号形状。但因为为绝大多数实现方案都采用数字技术，故一般都接受了数字滤波器这一定名。

六、举例：线性相位低通滤波器的设计

所选之例表明，实际设计必须涉及包括间置电路在内的完整滤波器。着眼于以经济的构件来解决特定滤波器问题的设计人员，将希望通过各个部分（图9所示）单另制作使它们的功能互补来降低滤波器任一部分的复杂程度。第一个典型折衷涉及末级滤波器的阶序、数字滤波器本身的复杂程度以及滤波器截止频率与取样频率间的比值。另一个是在预取样滤波器（加上相位均衡器）的阶次和数字滤波器的阶次之间的折衷，这种折衷反过来又会影响到取样——截止频率比的选取。因为这两者具有类似性，故本例仅讨论第一个折衷办法。但是决定量化和舍入噪声量的每一码字的码元数的选择，这里将不予讨论。

每当需要一个模拟波形作为滤波器的最后输出时，例如为取得一个图解显示、一个可听信号、一个表头偏转，或为容许信号通过一连续的限（止频）带通路进一步传输时，由滤波器产生的信号幅度和相位失真必须减至最小限度。

数字和（或）模拟数据传输线路上的频谱成形和（或）噪声抑制特别重要。在这些脉冲传输应用中，常常采用具有陡峭的提升余弦形衰减的线性相位低通滤波器^[22]。其幅度响应特性由下式确定：

$$A(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < 1 - \gamma \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{u-1}{\gamma} \right], & 1 - \gamma \leq u < 1 + \gamma \\ 0, & 1 + \gamma \leq u < \frac{1}{2}k \end{cases}$$

式中：

$u = \omega/\omega_c$ ，归一化频率

ω_c = 截止频率（-6分贝点）

$r = \Delta\omega/\omega_c$ ，归一化倾斜因数， $0 \leq r \leq 1$

$1/K = \omega_s/\omega_c$ ，归一化取样频率。

其相位响应特性不仅在通带内必须具有恒定的斜率，而且在通带与阻带之间的边缘部份

也必须具有恒定的斜率。

在有关文献（例如有关递归滤波器的〔30〕、〔12〕和有关非递归滤波器的〔6〕、〔21〕、〔22〕、〔31〕）提供的许多设计程序当中，我们选用了文献〔21〕报导的傅里叶综合技术，它导致了与横向滤波器“等效”的数字滤波器〔23〕。由于在一个复数总转移函数

$$H(\omega) = e^{-j\omega T_0} \cdot \bar{G}(\omega) = e^{-j\omega T_0} \sum_{\gamma=-N^1}^{N^1} C_{\gamma} e^{-j\gamma\omega T}$$

中容许足够的恒定时延 T_0 ①，因而就可能用傅里叶综合方法②去近似计算给定频率响应

$$G(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

的实部与虚部。因为恒定时延项 $e^{-j\omega T_0}$ （具有一致的幅度）已呈现了很好的线性相位响应 $(-T_0\omega)$ ，故两个引人入胜的总转移函数的特殊类型即成为实际上可以实现的了。

情况之一

$$\bar{B}(\omega) \equiv 0, \quad H(\omega) = e^{-j\omega T_0} \cdot \bar{A}(\omega)$$

$$\bar{G}(\omega) = \text{实数}, \quad \text{线性相位滤波器}$$

情况之二

$$\bar{A}(\omega) \equiv 0, \quad H(\omega) = e^{-j\omega T_0} \cdot j\bar{B}(\omega)$$

$$\bar{G}(\omega) = \text{虚数}, \quad \text{具有恒定} 90^\circ \text{附加相移的线性相位滤波器。}$$

除了在阻带内的相位跳动外（这种跳动出现在傅里叶近似 $\bar{A}(\omega)$ 或 $\bar{B}(\omega)$ 的零点上），这两种情况都构成线性相位滤波器。这一点，后文将再予阐明。在回到特定的实例以前，值得指出的是，恒定相位斜率或情况1及情况2间恰为 90° 的相移都不取决于傅里叶近似的阶序〔24〕。因此，它仅是所需幅度响应 $A(\omega)$ 或 $B(\omega)$ 连同所需近似度的类型，这就决定了傅里叶展开式所需系数的数目。由于傅里叶系数直接变成差分方程的系数，故上述特征可明显地简化数字线性相位滤波器的复杂性（或阶序），在本例中这个事实将变得更为明显。

设计线性相位、提升余弦形衰减的低通滤波器时，我们令 $B(u) \equiv 0$ 并用逆对称傅里叶展开式来近似上述给出的幅度响应③：

$$\bar{A}(u) = 2 \sum_{\gamma=1}^{N^1} ar \cos 2\pi(\gamma - \frac{1}{2})Ku \quad (15)$$

$$\text{式中} \quad ar = 2KSi \left[2\pi(\gamma - \frac{1}{2})K \right] \frac{\cos 2\pi(\gamma - \frac{1}{2})Kr}{1 - [4(\gamma - \frac{1}{2})K\gamma]^2} \quad (16)$$

$$a_0 = 0$$

故其固定的滤波器时延为：

$$T_0 = (N^1 - 1/2)2\pi/\omega_s \quad (17)$$

①即容许采用非最小相位网络。

② $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 在 $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ 间应分别为偶函数和奇函数，两者都应是有限数，并在规定的频率范围内仅能具有有限数目的极值或不连续点。

③这一幅度响应近似式在 $Ku=1/2$ 附近（ $0 < Ku < 1$ ）具有奇对称。这个级数颇为合用，因为 a_0 为零，故在差分方程中少一项〔21〕。

下一步骤是确定数字滤波器(不包括保持电路和末级滤波器电路)的所需近似度如下^④：
阻带衰减：最小为40分贝

$$1 + r < u < 1/2K。$$

借助于在五倍于截止频率 ($K=1/5$) 处选取取样频率, 按式 (16) 所得的下列各组系数可满足上述阻带的要求。

(1) $r=0.8$ 并取 $N^1=4$ 时,

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0.3653 & a_3 = 0 \\ a_2 = 0.1616 & a_4 = -0.0200 \end{array}$$

(2) $r=0.2$ 并取 $N^1=16$ 时,

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0.3736 & a_9 = -0.0225 \\ a_2 = 0.1991 & a_{10} = -0.0110 \\ a_3 = 0 & a_{11} = 0.0086 \\ a_4 = -0.0803 & a_{12} = 0.0107 \\ a_5 = -0.0368 & a_{13} = 0 \\ a_6 = 0.0283 & a_{14} = -0.0059 \\ a_7 = 0.0358 & a_{15} = -0.0026 \\ a_8 = 0 & a_{16} = 0.0017。 \end{array}$$

两种得自式 (15) 的振幅响应示于图12。可以看出, 这两种滤波器能分别满足频率在

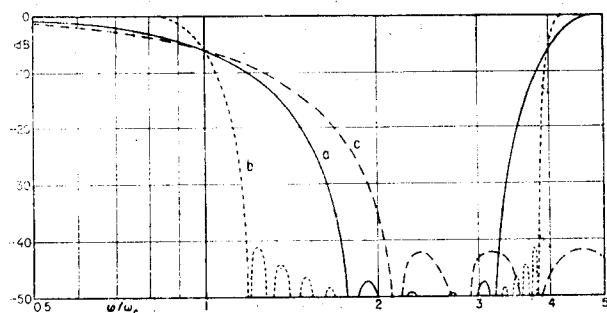


图12 两个恒定延迟特性的数字式非递归低通滤波器与集总LC梯形低通滤波器的振幅响应特性的比较。

1.8 ω_c 和1.2 ω_c 以上时阻带衰减至少40分贝的指标, 直到频率为2.5 $\omega_c = \omega_s/2$ 之外, 在那点上, 滤波器开始复演它的(逆)对称的振幅响应。为比较计, 我们还描绘出了第10阶集总LC梯形低通滤波器的振幅响应, 此滤波器系按参考资料(25)给出的表格中的L10 42^⑤设计出来的。此滤波器(最佳阻带衰减的最小值为42分贝)也在阻带内产生精确的线性相位

响应特性(线性相位偏离在 $\omega/\omega_c=2.3$ 处小于 0.5°)。

在这一点上, 回想起这样的事实也许是有价值的。因为梯型滤波器是最小相位网络, 其振幅的衰减不能做得很陡峭。例如: 可以借助于增高阶序来获得, 但除非是愿意使滤波器的边缘部份更多地偏离线性相位。如若用提升阶序的办法来获得振幅响应的陡峭衰减, 则会带

④在一般情况下, 也应列出容许的通带波动(吉布斯现象), 但本文所设之例, 阻带波动仍然低于0.01, 而就大多数技术应用而言, 通带波动则可忽略不计。

⑤由5个线圈和9个电容器组成。