线性代数

——理论、方法及应用

XIAN XING DAI SHU

郭时光 编著

SWJUP 西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

线 性 代 数

——理论、方法及应用

郭时光 编 著

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数：理论、方法及应用 / 郭时光编著. —成都：西南交通大学出版社，2005.7
ISBN 7-81104-053-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 线性代数—教材
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 026122 号

线 性 代 数

——理论、方法及应用

郭时光 **编著**

责任编辑 张宝华
责任校对 韩松云
封面设计 杨 钧
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
成都新千年印制有限公司印刷
*
成品尺寸：140 mm×204 mm 印张：8
字数：208 千字 印数：1—7 050 册
2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7-81104-053-0 / O・007
定价：15.00 元

内 容 简 介

本书分为十章：矩阵及其基本运算、行列式、逆方阵、线性方程组与向量组、二次型与方阵的相合、多项式与方阵的相似、内积空间、线性变换及方阵的约当标准形、矩阵分析、以及习题部分．书中既较全面地阐述了本门课程的基本理论和基本方法，又着力介绍了其应用．

本书适合用作理工科院校本、专科各专业的教材，也可供科技工作者和数学爱好者参考．

前　言

编写本书的目的，是为了提供一本内容较为完善而又理论联系实际的线性代数教科书，使之能较好地满足文、理、工等学科各专业对本门课程的需要.

编写时尽力做到逻辑连贯、布局合理、重点突出，同时十分注意用语简明，用例典型、简单，分析精当，使之便于自学.

本书具有下述特点：

（一）编法上有新意. 全书突出矩阵运算的基础作用和线性方程组问题的中心地位；给出了用矩阵运算做工具的行列式定义；在内积空间中讨论了单形的测度及病态线性方程组的最小二乘解等问题；在证明了谱半径-范数不等式之后，只用一种矩阵范数即推导出了矩阵分析的主要结果.

（二）理论体系较完整. 把一些概念明确化，如行首元、自由未知量、同解变形、对称式等均予定义. 重要定理，如相抵化简定理、单形测度定理、微元测度定理、正定性判定定理、正交对角化定理、约当标准形定理等，均给出了证明.

（三）归纳出一些常用方法. 如同解变形解法、化行最简形法、析异重因式分解法、待定系数法、特征多项式 — 余式法、相合对角化及求约当标准形的初等变换法等.

（四）介绍了一些重要应用. 如求单形的测度、耶可比矩阵的应用、最小二乘解、常系数二阶偏导数线性式的化简、极值点的判定以及二次曲面的保形化简等.

书中加有“*”号的各章节条目的内容，有的是理论完善的需要，有的是提供解决问题的手段，有的是介绍线性代数的应用. 这些内容均不在工科教学基本要求之列，写出是为了提供足够的信

息以满足读者进一步的需要，略过均不影响其它内容的学习.

本书第二章至第六章中的某些习题是曾光菊女士与陈德勤先生采集的，在此致谢.

由于编者水平有限，书中疏漏与谬误之处，敬请读者指正！

郭时光

2004年11月于四川自贡

目　录

第一章　矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象之一．本章介绍矩阵的概念以及矩阵的线性运算、矩阵的乘法、矩阵的转置与矩阵的初等运算．这些运算是线性代数中的基本运算，贯穿于整个线性代数之中，因此，有必要首先加以了解．

第一节　矩阵的概念

一、一个引入矩阵的例

例 1.1　设有四种商品 F_1、F_2、F_3、F_4，它们在三个不同超市 S_1、S_2、S_3 上的价格如表（1-1）所示．比如商品 F_3 在超市 S_3

表 1-1

商品 / 超市	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	15	7	13	21
S_2	16	9	15	22
S_3	18	8	11	19

的价格是 11，等等．这些价格组成的矩形数表叫做矩阵，它有三行四列．为了表明矩阵是一个整体，常把它加一个括号，并用一个字母表示．比如表（1-1）的价格矩阵记作 $\boldsymbol{A}$，即有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}15 & 7 & 13 & 21\\ 16 & 9 & 15 & 22\\ 18 & 8 & 11 & 19\end{bmatrix}$$

一般地，当存在两个有限集合（如例 1.1 的商品和超市），并且其元素之间彼此被一组数（如例 1.1 的价格）相联系，便会得到一个矩阵.

二、矩阵的定义

定义 1.1 由若干个数排成的矩形数表称作**矩阵**.

矩阵常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，… 等表示. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 m 行 n 列，则称 $\boldsymbol{A}$ 是 **$m\times n$ 维矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵. 组成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数称作 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**（或元），位于第 i 行第 j 列处的元素称作 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元. 用 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元，则 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$(a_{ij})$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

矩阵的元素除了数之外还可以是别的事物，这样的矩阵以后会遇到. 完全以实数（或取实数值的算式）为元素的矩阵称作实矩阵，完全以复数（或取复数值的算式）为元素的矩阵称作复矩阵，我们主要讨论实矩阵与复矩阵.

三、一些特殊形式的矩阵

按定义，数是1×1矩阵（书写时不加括号），常用小写字母表示.

定义 1.2 元素全是零的 $m\times n$ 矩阵称作 **$m\times n$ 零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，简记作 $\boldsymbol{O}$.

定义 1.3 行数和列数都是 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称作 **n 阶方阵**（或 **n 阶矩阵**），习惯记作 $\boldsymbol{A}_n$.

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵.

（1）$\boldsymbol{A}$ 中连接 a_{11} 与 a_{nn} 的直线段称作 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**.

（2）主对角线下方（上方）元素全是零的方阵称作**上（下）三角方阵**.

（3）主对角线以外元素全是零的 n 阶方阵称作**对角方阵**，记作 Λ 或者 diag. 例如

$$\Lambda=\operatorname{diag}(a_{11},\ a_{22},\cdots,\ a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（4）主对角线上元素全是 1 的对角方阵称作**单位方阵**或**幺阵**，记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}=(\delta_{ij})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 δ_{ij} 是克朗里克（Kronicker）符号，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & (i\neq j) \\ 1 & (i=j) \end{cases}$$

四、矩阵的相等

定义 1.5 如果两矩阵行数相等，列数也相等，则称它们**同型**.

定义 1.6 设两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 如果它们的元素对应相等，即有

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注意：不同型的矩阵不能相等.

使矩阵具有重要意义的是矩阵的运算，其中一些重要运算将在下面几节学习.

第二节　矩阵的线性运算

数乘矩阵与矩阵的加法统称作矩阵的线性运算，它们的定义和运算性质分述如下.

一、数乘矩阵

定义 1.7　数 b 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积记作 bA 或 Ab，规定

$$bA=Ab=(ba_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} ba_{11} & ba_{12} & \cdots & ba_{1n} \\ ba_{21} & ba_{22} & \cdots & ba_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ba_{m1} & ba_{m2} & \cdots & ba_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

称 $-A$ 是 A 的负矩阵，规定

$$-A=(-1)A$$

注意：本书中所说的“数”指实数或复数，可用取实数或复数值的算式来代替，并用小写字母表示.

例 1.2　设两个产地与三个销地之间的里程（单位：公里）矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 22 & 23 \\ 11 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

货物运费单价是 2 元/吨公里，求各产地到各销地货物的运费（单位：元/吨）矩阵 B.

解

$$B=2A=\begin{bmatrix} 2\times 10 & 2\times 22 & 2\times 23 \\ 2\times 11 & 2\times 14 & 2\times 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 44 & 46 \\ 22 & 28 & 40 \end{bmatrix}$$

二、矩阵的加法

定义 1.8 二同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 之和用 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示，规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之差用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 表示，规定

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

注意：不同型的矩阵不能相加.

例 1.3 设经更精确测量后，发现例 1.2 中里程矩阵有误差矩阵

$$\Delta A=\begin{bmatrix} 0 & \pm 0.2 & 0 \\ \pm 0.1 & 0 & \pm 0.5 \end{bmatrix}$$

则里程矩阵应修正为

$$\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 10 & 22\pm 0.2 & 23 \\ 11\pm 0.1 & 14 & 20\pm 0.5 \end{bmatrix}$$

三、线性运算的性质

矩阵的线性运算具有下列运算规律（c、d 是数，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵）：

（1） $1\cdot \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

（2） $(cd)\boldsymbol{A}=c(d\boldsymbol{A})$.

（3） $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$.

（4） $(c+d)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}$.

（5） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

（6） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

（7） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

（8） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例 1.4 求解含有未知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的方程 $2\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&6&2\\4&8&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&8&2\\4&2&6\end{bmatrix}$$

解 方程两边同时减去 $3\boldsymbol{A}$，再化简，得

$$2\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}$$

$$2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}$$

$$2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}$$

上式两边同时乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}-\frac{3}{2}\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&8&2\\4&2&6\end{bmatrix}-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}6&8&2\\4&2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5&-2\\-4&-11&0\end{bmatrix}$$

第三节 矩阵的乘法

本节先学习矩阵乘法的概念，然后再考察其意义.

一、矩阵乘法的定义

定义 1.9 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $l\times n$ 矩阵. $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{B}$ 的积记作 $\boldsymbol{AB}$，规定

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})$$

是 $m\times n$ 矩阵，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \qquad (1.4)$$

$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行为$(a_{i1}, a_{i2},\cdots, a_{il})$，$\boldsymbol{B}$ 的第 j 列为$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{bmatrix}$. 按矩阵乘法的定义，有

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{il})\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{lj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} = c_{ij}$$

所以，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i, j) 元等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列.

例 1.5 求矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$，设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times4+0\times(-1)+3\times2 & 1\times1+0\times1+3\times0 & 1\times3+0\times1+3\times1 \\ 2\times4+1\times(-1)+0\times2 & 2\times1+1\times1+0\times0 & 2\times3+1\times1+0\times1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 1.6 求矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$，设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解

$$AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{O}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

二、矩阵乘法与数乘法的相异处

由矩阵乘法的定义和例 1.5、例 1.6 表明，矩阵乘法与数的乘法有不同的运算规律，不同处主要表现在下列四点：

（1）两个矩阵不总可乘．按定义，只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义．当矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，乘积 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义．

例如，在例 1.5 中，$\boldsymbol{AB}$ 有意义，但是 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义，因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数．

（2）矩阵乘法不满足交换律．即使乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与乘积 $\boldsymbol{BA}$ 均有意义，也能有

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

因此，矩阵乘法必须讲究次序．当乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与乘积 $\boldsymbol{BA}$ 均有意义时，$\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$）的乘积，$\boldsymbol{BA}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$）的乘积，两者不可混淆．

如果两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **乘法可交换**．

（3）由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$（由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$）．

（4）消去律不成立．即由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 不能得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$（因为从 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 不能得 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{O}$）．

矩阵的乘法与数的乘法的这些不同之处，应加以特别注意．