生活中的数理化丛书

数学

孙瑞清　主编

青岛出版社

生活中的数理化丛书

数　学

丛书主编　阎金铎　南国芬
本书主编　孙瑞清
编 写 者　孙瑞清　刘　坚
　　　　　李　应　杨妍梅

青岛出版社

鲁新登字 08 号

责任编辑：戚道浚
封面设计：董 伟

生活中的数理化丛书
数 学
孙瑞清 主编
*
青 岛 出 版 社 出 版
（青岛市徐州路 77 号）
新华书店北京发行所发行
青岛新华印刷厂照排
山东临朐县印刷厂印刷

1992 年 10 月第 1 版 1992 年 12 月第 1 次印刷
32 开（787×1092 毫米） 7.125 印张 150 千字
印数 1—5200
ISBN 7-5436-0832-4/G・406
定价：2.90 元

前　言

数学来源于实践。我们虽然在抽象的形式中对它加以研究，但它毕竟和我们的现实生活有着密切的联系。《生活中的数理化丛书——数学》正是本着理论联系实际，数学联系生活的原则编写的。我们希望阅读本书的同学们，在具备初中数学知识的基础上，看到数学在广阔的现实生活中所闪现的巨大价值。为此，我们选编了若干个生活中有趣的问题，通过分析与研讨，体现数学应用的广泛性，以及数学思想与数学方法在帮助我们分析问题与解决问题中的巨大创造精神。正是数学的这种精神、思想和方法，启发我们在数学学习中联系生活实际，有所发现，有所创造，激发我们的学习兴趣，提高我们的数学思考能力。这不仅可以更好地巩固、加深课内所学的数学基础知识，同时还可以开扩我们的视野，为学习更高层次的数学知识，起到开智、奠基和启蒙的作用。

限于我们的水平和中学生数学知识范围的局限性，只能说我们在上述思想指导下作了一点尝试，必然有某些缺点和不当之处，我们诚恳地希望读者能提出宝贵意见。

本书由孙瑞清主编，孙瑞清、刘坚、李应和杨妍梅编写。在编写中，我们参考了有关文章和资料，对我们有不少启迪和帮助，在此表示感谢。

编　者

1992 年 10 月

目　录

前　言

§1 地板革上的数学

随着人们生活水平的提高，很多家庭都铺上了地板革。当你看到地板革上规则而美丽的图案时，你是否想到地板革图案中的数学原理呢？如果你注意到的话，你可能对下面的简单分析发生兴趣。

地板革上的图形一般都是用几种全等的平面图形展铺开来的，有时用由直线构成的多边形组成图案，有时用曲线组成图案，千变万化。但是作为基础还是用平面多边形展铺构图。有时虽然有曲线，却常常是由多边形和圆作适当变化而得到的。例如一个由正方形展铺的平面图案（图 1—1）；又如用圆弧对正方形作一些变化，如图（1—2）；这两个图形结合就可由比较单调的正方形图案，变成有变化感的曲线形花纹了（图 1—3）。

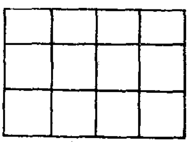


图 1—1

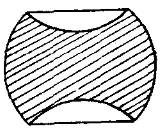


图 1—2

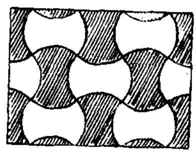
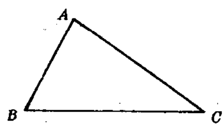


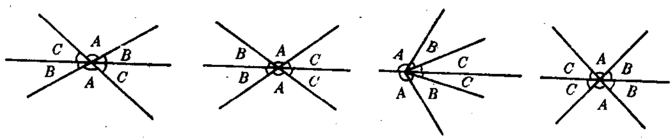
图 1—3

由于多边形是构成地板革复杂图案的基础。因此，下面我们对利用多边形展铺平面图形作简要说明。

1. 以三角形为基础的图案展铺

三角形是多边形中最简单的图形，如果用三角形为基本图形来展铺平面图案，那么就要考虑三角形的特点。由于三角形的三个内角和为 180°，所以要把三角形的三个角集中到一起，就组成了一个平角。如果要在平面上一个点的周围集中三角形的角，那么必须使这些角的和为两个平角。因此，若把三角形的三个内角集中在一起，并进行轴对称变换或中心对称变换的话，就可以得到集中于一点的六个角，它们的和为 360°，刚好覆盖上这一点周围的平面。变换的方法见图 1—4。





中心对称　　轴对称　　轴对称　　轴对称

图 1—4

在中心对称的情况下，三角形不翻折，在轴对称的情况下，三角形要翻折。如果把三角形纸片按正、反两面涂上颜色，那么通过对称变换，正、反面就会明显的反映出来了。

用三角形为基本图形展铺平面图案，共有以下四种情况，如图 1—5。

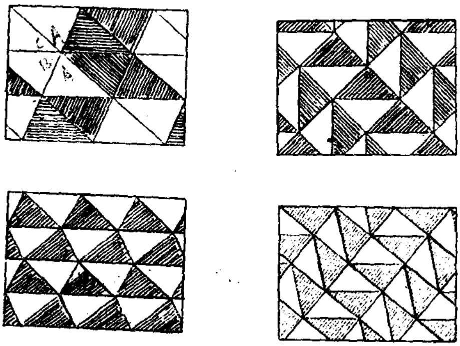
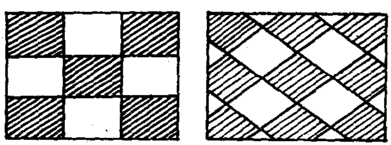


图 1—5

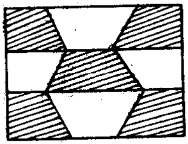
2. 以四边形为基础的图案展铺

由于四边形内角和为 360°，所以，任何四边形都可以作为基本图形来展铺平面图案。图 1—6 中的(1)、(2)、(3)、(4)分别是以矩形、菱形、梯形、一般四边形为基本图形的平面展铺图案。

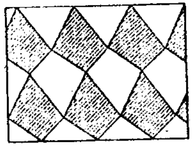


(1)　　　　(2)

图 1—6



(3)



(4)

图 1—6

3. 以正多边形为基础的图案展铺

用正多边形为基本图形，展铺平面图案，集中于一点的周围的正多边形的角的和应是 360°。但是这个条件只是必要条件而不充分。例如，正五边形的一个内角是$(5-2)\times180°\div5=108°$，正十边形的一个内角为$(10-2)\times180°\div10=144°$。两个正五边形的内角和一个正十边形的内角之和为：$2\times108°+144°=360°$，但是并不能用来展铺成平面图案。

如果用同种的正 n 边形来展铺平面图案，在一个顶点周围集中了 m 个正 n 边形的角。由于这些角的和应为 360°，所以以下等式成立：

$$m\cdot\frac{(n-2)\times180°}{n}=360°$$

即

$$m\cdot\frac{(n-2)\times2\times90°}{n}=4\times90°$$

即

$$m\cdot\left(2-\frac{4}{n}\right)=4$$

因为 m、n 是正整数，并且 $m>2$，$n>2$，所以 $m-2$，$n-2$ 也都必定是正整数。

当 $n-2=1$，$m-2=4$ 时，则 $n=3$，$m=6$；

当　$n-2=2, m-2=2$ 时，则 $n=4, m=4$；

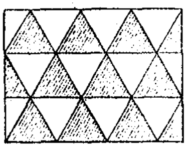
当　$n-2=4, m-2=1$ 时，则 $n=6, m=3$；

这就证明了：只用一种正多边形来展铺平面图案，只存在三种情况：

(1)由 6 个正三角形拼展，我们用符号(3,3,3,3,3,3)来表示(见图 1—7)

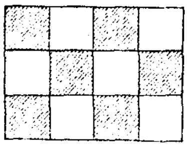
(2)由 4 个正方形来拼展，我们用符号(4,4,4,4)来表示(见图 1—8)。

(3)由 3 个正六边形来拼展，我们用符号(6,6,6)来表示(见图 1—9)。



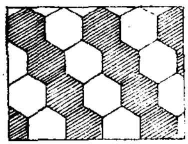
(3,3,3,3,3,3)

图 1—7



(4,4,4,4)

图 1—8



(6,6,6)

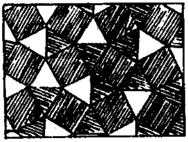
图 1—9

如果用两种正多边形来拼展平面图案，那么就有以下五种情况：

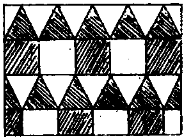
(3,3,3,4,4)、(3,3,3,3,6)、(3,3,6,6)、(3,12,12)以及(4,8,8)。

这五种情况的图形见图 1—10～图 1—15。

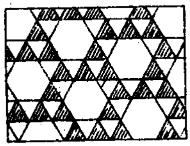
$m=\frac{4}{(2-\frac{4}{n})}$



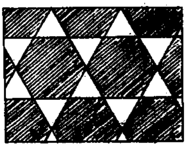
(3,3,3,4,4)
图 1—10



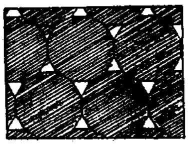
(3,3,3,4,4)
图 1—11



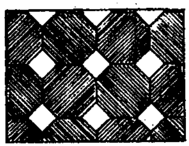
(3,3,3,3,6)
图 1—12



(3,3,6,6)
图 1—13



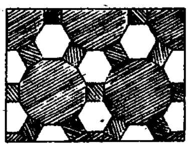
(3,12,12)
图 1—14



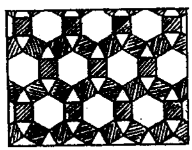
(4,8,8)
图 1—15

用三种正多边形拼展平面图案，就比较难考虑了，例如有：(3,4,4,6)及(4,6,12)。

见图 1—16～1—17。



(4,6,12)
图 1—16



(3,4,4,6)
图 1—17

用三种以上的正多边形拼展平面图案，就更复杂了，有兴

趣的同学，请自己构思出一、二个例。

§2　信件的旅行

俗话说："好事不出门，坏事传千里"。这里除了说人们爱传丑闻外，还指人们传话的速度非常快。我们提倡同学间团结友爱，反对那种专爱说别人坏话的作法。我们可以把好事传千里。

科学技术发展到今天，电台、电视台可以在一瞬间把某地发生的事件传到全球各地。这种新闻媒介的速度之快我们就不说了。在这里，我们只谈谈人们互相之间的传话。可以毫不夸张地说，这种方法的速度也是惊人的。我们可以用数学知识来实际地算一算。

假设有一则消息从一个人那里传出，他用 10 分钟告诉了他周围的 3 个人。这 3 个人又分别用 10 分钟告诉了每人碰到的 3 个人。那么，这则消息 20 分钟以后就有 $1+3+(3\times3)=13$ 个人知道了。刚听到这则消息的 9 个人，又分别去告诉他们碰到的 3 个人，于是，30 分钟后就已经有 $13+(3\times9)=40$ 人知道这则消息了。

如果继续这样传播下去，则会有如下情形：

40 分钟后知道这则消息的人为 $40+(3\times27)=121$ 人

50 分钟后知道这则消息的人为 $121+(3\times81)=361$ 人

1 小时后知道这则消息的人为 $364+(3\times243)=1093$ 人

再过 20 分钟就将有 9841 人知道这则消息。大家看，一则消息在一个多小时里能从 1 个人那儿传到将近 1 万人，速

度够惊人的吧。如果一个人不是传给 3 个人，而是传给更多的人，那么传播的速度就会更快。

我们有没有什么方法，能很快计算出知道消息的人数呢？大家可以看出，我们实际上是要计算下面的和：

$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^n$

将其记为 S_n，则 S_n 表示 $(10\times n)$ 分钟后知道消息的人数。

$\because S_n=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^n \qquad (1)$

将(1)式两边同乘以 3，

则左边 $=3S_n$

右边 $=3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n+1}$

即 $3S_n=3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n+1} \qquad (2)$

(2)式减(1)式，得

$2S_n=3^{n+1}-1$

$\therefore S_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

有了这个公式，我们就可以算出 $10\times n$ 分钟(n 为自然数)后，消息所传播到的人数。

例如，我们想知道 2 小时后，消息传播到的人数，就可令 $n=12$，计算 S_{12}：

$$S_{12}=\frac{3^{12+1}-1}{2}=797161(\text{人})$$

一般地，如果第一个人不是只传给 3 个人，而是传给了 q 个人($1<q$，q 为自然数)，那么，$10\times n$ 分钟后，消息传到的人数为：

$$S_n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n$$

用上述方法可以得到：

$$S_n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

比如，$q=4$，则 2 小时后，消息传到的人数为：

$$S_{12}=\frac{4^{13}-1}{3}=22369621(\text{人})$$

前些年，一些人可能玩过一种通信游戏，内容大致是说，这种通信游戏的第一封信来自美国，已在很多国家内传递，现在传到我国，请不要断了信的锁链。为此，请收信人将此信内容抄写 20 份，寄给 20 个人。我们姑且不管这个游戏是从哪里发起的，我们只是算一算这种游戏所产生的后果是什么。

假设收信人均按信中要求去做了，在第 7 天发出了 20 封信，这些信在 5 天以内能够到收信人手中，也就是说，信的传递周期为 12 天，那么情况是这样的，从第一个人发出信开始，

5 天后，接到信的有 20 人，

$5+12$ 天后，又有 $20\times20=400$ 人(次)接到信，

$5+12\times2$ 天后，又有 $400\times20=8000$ 人(次)接到信。

……

$5+12\times n$ 天后，又有 20^{n+1}人次接到信。

也就是说，$5+12\times n$ 天后，将有 $20+20^2+\cdots+20^{n+1}$ 人(次)卷入通信游戏，也就有 $20+20^2+\cdots+20^{n+1}$多封信进入邮递工作中。仅以 $n=4$ 为例，我们可以算出

$$20+20^2+20^3+20^4+20^5=3368420(\text{封})$$

也就是说，65 天后有 336 万多封毫无意义的信进入邮政业务中。我国的邮政业务本来就很紧张，拿运输来说，由于我国铁路运输能力有限，光客、货运就非常紧张，因此，我国未单设邮政列车，一般是在客车上加挂邮政车箱，有的地方不得不用货车运输，甚至也有水运的。这么有限的运输能力如果混杂了很

多没有价值的信件，那就势必影响正常的信息传递。所以，从这个角度来说，通信游戏玩不得。

我们还可以算一算，浪费的信封，信纸有多少。我们知道，发这些信用的信封至少也是336万个，信纸336万张。如果1分钱1个信封，336万个信封需33600元。信纸按5厘/张计算，336万张需16800元。邮资为每封0.20元，336万封需邮资67.2万元。这样，仅信封、信纸、邮资就浪费了。

$$3.36+1.68+67.2=72.24(\text{万元})$$

如果一个分检员1分钟分信100封，则336万封信需560小时（按每天工作8小时算，相当于70天）才能分检完。各个邮局的邮递员还要辛辛苦苦地一封一封地送到每个收信人手中。这种浪费多么巨大啊！

以上这些具体数字该让我们醒悟了吧，这种通信游戏玩不得。