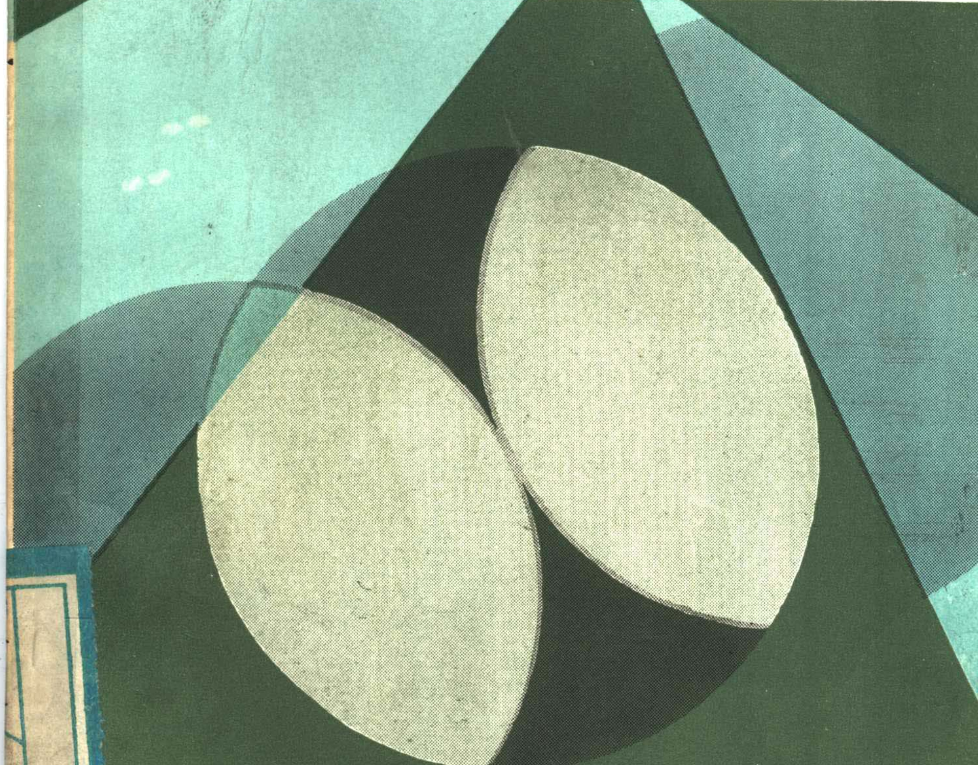
ZhXShX

中学数学丛书

黄传文 李淑琼

集合



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

中学数学丛书

集 合

黄传文 李淑琼

湖 北 教 育 出 版 社

内 容 提 要

全书共分三章。第一章介绍了集合的基本概念以及集合的运算；第二章讨论了集合的映射；第三章介绍了对等和基数以及可数集合和不可数集合。

本书叙述简明，深入浅出，通俗易懂。适合中学生课外阅读，亦可供中学数学教师教学时参考。

中学数学丛书

集 合

黄传文 李淑琼

*

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

黄冈县新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32 开本 3.25 印张 1 插页 72,000字

1983年12月第 1 版 1983年12月第 1 次印刷

印数：1—23,600

统一书号：7306·43 定价：0.31元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》．本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版．

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教

材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析和归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学数学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　　录

第一章　集合及其运算

§1. 集合的概念

(一) 什么叫集合

当你走进一个拥有上百万册藏书的图书馆去借书时，只要你填上要借书的分类号码，管理员很快地就会把你所要的书送到你的手上．人们不禁要问，这位管理员为什么有这么大的神通，一下子就可以从上百万册书中找出那本书呢？其实这也没有什么奇怪，因为管理员事先已经把所有的图书分门别类井井有条地放在书架上了，因此，按照书的分类号码很快地就可以从书架上取得你所需要的书．如果不把图书分类放在书架上，要想从杂乱的上百万册书中找出你所需的书，那就非常困难了，管理员花几十天的时间也未必能找到那本书．从这里可以看出把同类事物进行汇集的重要意义．象这样分门别类的把一些事物汇集在一起的例子到处可见，例如百货商店把服装、鞋子、帽子、文具……分别设立专柜，便于顾客选购；仓库里各种货物分类堆放，便于提存；在数学中把所有相同的研究对象(数、形、方程…)汇集在一起，便于研究等等。**把一些确定的事物汇集在一起就构成一个“集合”**，简称为集，集合里的每个事物称为这个集合的**元素**，通常用大写的拉丁字母 A、B、C…表示集合，用小写的拉丁字母 a，b，c…表示集合中的元素．

下面举几个集合的例子：

例 1　(1) 所有大于 1 小于 100 的整数构成一个集合.

(2) 所有自然数构成一个集合.

(3) 介于 0.5 和 2.5 之间的整数构成一个集合.

(4) 方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的所有解构成一个集合.

(5) 某校高一年级有 1、2、3 三个班，各班都有 30 个学生，高一年级全体学生构成一个集合.

(6) (5) 中的 1、2、3 三个班构成一个集合.

(7) 方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解构成一个集合.

请想一想：

a. (1)、(2) 中集合各有多少个元素?

b. (3)、(4) 中集合之间有什么关系?

c. (5) 中集合有多少个元素?

d. (6) 中集合有多少个元素?

e. (7) 中集合有多少个元素?

把前面所举的例子仔细观察一下，就可以得到如下的解答.

a. (1) 中集合有 98 个元素，(2) 中集合有无穷多个元素.

b. (3)，(4) 中集合的元素完全一样(都是 1，2 两个数).

c. (5) 中集合有 90 个元素.

d. (6) 中集合有 3 个元素.

e. (7) 中集合没有任何元素.

前面三个解答是容易理解的，对于后面两个解答，也许有人会产生这样的疑问：(5)，(6) 两个集合都包含着 1，2，3 三个班，为什么 (5) 有 90 个元素，而 (6) 却只有三个元素? 不含任何元素的集合有什么意义? 针对这两个问题，我们作进一步的说明：

(1) 集合 (5) 是以高一年级的全体“学生”为成员而组成的，

高一年级的每一个学生就是这个集合中的一个元素，因此，(5)有90个元素，而集合(6)是以高一年级的1，2，3三个“班”为成员而组成的．每一个班就是这个集合的一个元素，因此(6)中集合有三个元素．

(2) 为了说明第二个问题，先谈谈“0”这个数的意义，在小学算术里就遇到“0”，它表示“没有任何东西”．看起来似乎“0”没有什么意义，但是它却是数学中不可缺少的一个数，没有它在数的范围内许多运算就无法进行，例如对于极为简单的问题 $1-1=?$ 就无法回答．在集合论中，不含任何元素的集合也是很重要的，正象数“0”一样，没有它，集合的许多运算就无法进行，这一点在以后的学习中可以逐步体会，今后我们把不含**任何元素的集合叫做空集记为 ϕ.**

例 2 常用的一些数的集合，为方便起见，有它的惯用记号：

N 表示所有自然数构成的集合．

Z 表示所有整数构成的集合．

Q 表示所有有理数构成的集合．

R 表示所有实数构成的集合．

C 表示所有复数构成的集合．

前面我们介绍了一些集合的例子．为了帮助读者全面地理解集合的概念，下面再举一些不能构成集合的反例：

例 3 (1) 一班所有视力较好的学生．

(2) 武汉市气温较高的日子．

现在我们来说明上面所举的例子不能构成集合的理由：

(1) 中“较好”的概念是不明确的，究竟视力达到什么程度才算“较好”呢？是达到“1.0”算“较好”呢？ 还是达到“1.2”算较好？…不给“较好”规定一个具体的衡量标准，就无法判断一班

的每个学生是否属于“较好”的范围，因此(1)不能构成一个集合.

(2) 中有两处不明确：一是“较高”的概念不明确，究竟是平均气温超过38℃算“较高”？还是超过39℃算“较高”？…没有具体的标准无法统计气温较高的日子；一是所考虑问题的时间不明确，是考虑某一年内的日子？还是某一月内的日子？…没有确定的时间也无法统计气温较高的日子，因此(2)不能构成一个集合.

如果对上述内容作如下的修改：

(1) 一班视力超过1.2的学生.

(2) 1981年武汉市气温超过38℃的日子. 那么它们就可以构成集合了.

通过上面所举的一些正、反例题，可以看出，集合必须具有确定的内容，换句话说，对于给定的集合来说，可以判定任何一个事物是否属于这个集合，要末属于它，要末不属于它，没有第三种可能. 通常用“$\in$”表示“属于”，用“$\notin$”表示“不属于”，这样上面一句话的意思就是：对于给定的集合A，任何事物a，或

$$a\in A \text{ 或 } a\notin A.$$

(二) 集合的表示法

表示集合的方法通常有下面两种：

1. 列举法：这种方法是把集合中的所有元素列举出来写在一个大括号内，并且用逗点“，”把所有元素一一分开.

例 4 (1) a，b，c，d四个字母所构成的集合A，可记为：

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\};$$

(2) 所有小于12的素数所构成的集合B，可记为：

$B=\{2,3,5,7,11\}$；

（3）a，b，c 三个字母中任取两个的所有排列构成的集合 D，可记为：

$D=\{ab, ba, ac, ca, bc, cb\}$.

当一个集合有很多元素，并且只要写出几个具有代表性的元素就可以看出后面元素的规律时，可以用省略号“……”简记集合中未写出的元素．

例 5 （1）大于 0 小于 100 的所有整数构成的集合 E 可记为：

$E=\{1, 2, 3, \cdots, 99\}$

（2）全体自然数所构成的集合 N，可记为：

$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

（3）全体偶数构成的集合 M，可记为：

$M=\{\cdots-4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$

在一个集合中，若有相同的元素，我们约定相同的元素只算一个，例如，组成 book 一字的字母的集合 A，记为 $A=\{b, o, k\}$.

2．描述法：这种方法是把集合的一个代表性元素写在大括号｛ ｝内，在这个元素后面写符号“|”（或“:”）并在“|”之后写出这个元素所具有的特性．

例 6 设 a，b 为两个实数，且 $a<b$，则闭区间 $[a, b]$；开区间 (a, b)；半开区间 $(a, b]$ 及 $[a, b)$；无限区间 $(-\infty, a]$ 及 $(b, \infty]$ 分别可表示为：

$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；

$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$；

$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$；

$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leqslant a\}$;

$(b, \infty) = \{x \mid b < x < \infty\}$.

例 7 (1) 圆心在原点的单位圆上所有点所构成的集合 L，可表示为：

$$L = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$$

(2) 方程 $x^3 - 1 = 0$ 的实数解所构成的集合 S，可表示为：

$$S = \{x \mid x^3 - 1 = 0, x \in R\}$$

一般地我们把方程在某个数集上的解所构成的集合，叫做在这个数集上方程的“**解集**”，这里需要指出的是：对于同一个方程，如果所考虑的数集不同，那么它们的解集也可能不同．因此解方程或方程组(不等式或不等式组)的问题，实际上就是求出它在某个数集上的解集的问题．

例 8 (1) $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\} = \phi$

(2) $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in C\} = \{+i, -i\}$.

例 9 在实数集 R 上，函数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 的定义域(记为 D_f)与值域(记为 R_f)可分别表示为：

$$D_f = \{x \mid x \in R \text{ 且使} \sqrt{x-1} \in R\}$$

$$R_f = \{\sqrt{x-1} \mid x \in D_f\}$$

或

$$D_f = \{x \mid 1 \leqslant x < \infty\} = [1, \infty)$$

$$R_f = \{\sqrt{x-1} \mid 1 \leqslant x < \infty\} = [0, \infty)$$

例 10 在实数范围内，不等式组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25 \\ x^2 + y^2 \geqslant 9 \end{cases}$$

的解集 p 可表示为：

$p = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25 \text{ 且 } x^2 + y^2 \geqslant 9, x, y \in R\}$，

图 1.1 中阴影画出的圆环就是集合 p 的图形．

由上面的例子可以看出，集合中元素的个数可以是有限个(称此集合为有限集)，也可以是无限多个（称此集合为无限集)，也可以是不含任何元素的空集.

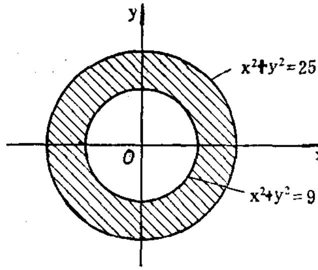


图 1.1

关于集合的表示方法，作下面几点说明：

(1) 用列举法表示集合时，括号中元素的排列顺序是无关紧要的，例如$\{a, b, c\}$，$\{b, c, a\}\{c, a, b\}$都表示同一个集合；$\{\cdots-2, -1, 0, 1, 2\cdots\}$与$\{0, 1, -1, 2, -2\cdots\}$也表示同一个集合.

(2) 在一个集合中，相同的元素只写一个，例如方程$(x-1)^2(x-2)=0$的解为1，1，2，它的解集应写为$\{1, 2\}$，而不写为$\{1, 1, 2\}$.

(3) 当集合 A 为集合 B 的元素时，在列举表示法中，不能把 A 的大括号拆去，例如 B 是由 a，$\{b, c\}$，d 为元素所构成的集合，则 B 可表示为：

$$B=\{a, \{b, c\}, d\}$$

不能表示为 $B=\{a, b, c, d\}$，因为$\{b, c\}$是 B 的元素，而 b，c 都不是 B 的元素.

(4) 要注意0，$\{0\}$，ϕ，$\{\phi\}$四个记号的区别：

0：表示数“0”；

$\{0\}$：表示仅含一个数0的集合；

ϕ：表示不含任何元素的空集；

$\{\phi\}$：表示仅含一个空集的集合.

练　习　1.1

1．鉴别下列各题，对的在括号内打"√"，错的打"×"．

(1) 一个数不能构成一个集合……………………（　）

(2) $\{d, e, b, d, e\}$可记为$\{b, d, e\}$…………（　）

(3) $\{a, b, \{c, d\}\}$中所含元素为a, b, c, d四个……（　）

(4) $\{0\}=0$ ……………………………………（　）

(5) 设$A=\{0, 5, 10, 15\cdots\}$则A含有四个元素……（　）

(6) 设$A=\{a, \{b, c\}\}$则$a\in A$，$\{b, c\}\in A$……（　）

2．下列各题中，哪些结论正确就将题号填在括号内．

(1) 若$A=\{3, 7, 5\}$则①$3\in A$，②$\{3\}\in A$
③ $\phi\in A$，④ $\{3.7\}\in A$ …………………（　）

(2) 能构成集合的是：①世界上活着的青年人，
② 世界上活着的人，　③ 最美丽的动物，
④ 很热的水 ………………………………（　）

(3) 空集合是：① 0，② $\{\phi\}$，③ $\{x\mid x=0\}$
④ $\{x\mid x\in R$ 且 $x^2+x+1=0\}$…………（　）

(4) 设$A=\{x\mid x=4$ 且 $x=5\}$．则① $A=4$． ② $A=5$
③ $A=9$． ④ $A=\phi$ ……………………（　）

3．填写下面______的空白．

(1) $\{\phi\}$的元素是______；

(2) 若$A=\{a, b, c\}$；则 a___A，$\{a\}$___A；

(3) $\{a, b\{c, d\}\}$中共有___个元素；

(4) $\{1, 2, 1, 3, 2, 3, 4\}$中有___个元素；

(5) ______ $\in\{\{a\}\}$，

4．用列举法表示下列集合．

(1) 介于 2 与 19 之间且能被 3 整除的整数构成的集;

(2) 小于 20 的素数构成的集;

(3) 105 的素因数构成的集;

(4) 绝对值小于 5 的整数构成的集;

(5) $y^2-5x+4=0$ 在实数范围内的解集.

5. 用描述法表示下列集合.

(1) 20 的因数构成的集;

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 内的点构成的集;

(3) 被 5 除余 1 的整数构成的集;

(4) $x^2-5x+6=0$ 的解集;

(5) $\begin{cases}2x-3y=-7\\x+2y=0\end{cases}$ 的解集.

6. 下列集合哪些是有限集,哪些是无限集.

(1) $A=\{x\mid x$ 为大于 5 的自然数$\}$;

(2) $B=\{x\mid x$ 为小于 50,000 的自然数$\}$;

(3) $C=\{x\mid x$ 为生活在地球上的人$\}$;

(4) $D=\{x\mid 0<x<1,\ x\in R\}$;

(5) $E=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 10000,\ x\in Z\}$.

§2. 集合的包含关系

先考察下面的实例:

设某个学校全体学生组成集合 B,该校的全体男学生组成另一个集合 A,如果王小明是该校的一个男学生,当然是该校的学生,即集合 A 中的每个元素必是集合 B 的元素,对这种关系,我们给出以下定义:

定义 1 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的每个元素

都是集合 B 的元素，集合 A 就叫做集合 B 的**子集**，而 B 叫做 A 的**包集**，记为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

读作“**A 包含于 B**”或“**B 包含 A**”

我们规定**空集是任何集合的子集**，也就是说，对于任何集合 A，恒有：

$$\phi \subseteq A$$

若 A 不是 B 的子集，记为 $A \nsubseteq B$ 或 $B \nsupseteq A$ 读作 “**A 不包含于 B**”或“**B 不包含 A**”.

例 1 设 $A=\{a, b, c\}$，问：集合 ϕ，$\{a\}$，$\{b, c\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a, d\}$ 与 A 有何关系？

解：由定义 1 知，ϕ，$\{a\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$ 都是 A 的子集，但 $\{a, d\} \nsubseteq A$.

例 2 自然数集，整数集，有理数集，实数集，复数集它们之间的关系为：

$\{$自然数$\} \subseteq \{$整数$\} \subseteq \{$有理数$\} \subseteq \{$实数$\} \subseteq \{$复数$\}$

即 $$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$$

例 3 (1) 设 $A=\{a+bi \mid a, b \in Z, i^2=-1\}$

$$B=\{a+bi \mid a, b \in Q, i^2=-1\}$$

$$C=\{a+bi \mid a, b \in R, i^2=-1\}$$

它们之间的关系为：

$$A \subseteq B \subseteq C$$

(2) 所有整式，有理式，代数式之间的关系是：

$\{$整式$\} \subseteq \{$有理式$\} \subseteq \{$代数式$\}$.

定义 2 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，就叫集合 A 是集合 B 的**真子集**，B 是 A 的**真包集**，记为：