华 章 数 学 译 丛

13

THOMSON

Differential Equations with Boundary-Value Problems

(Fifth Edition)

微分方程与边界值问题

(原书第5版)

(美) Dennis G. Zill
Michael R. Cullen 著

陈启宏 张凡 郭凯旋 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

13

Differential Equations with Boundary-Value Problems

(Fifth Edition)

微分方程与边界值问题

（原书第5版）

（美） Dennis G. Zill
Michael R. Cullen 著

陈启宏 张凡 郭凯旋 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍微分方程及其应用，内容丰富，分析透彻．前半部分重点介绍常微分方程和常微分方程组，后半部分重点讲述偏微分方程的初步理论，分别从定性分析、解析分析和数值分析三个角度由浅入深、徐徐展开．另外，本书的每一章都包含丰富的范例，安排了适量的习题，并且介绍了如何使用计算机来求解微分方程，兼顾了理论性和实用性．

本书可作为数学、工程技术、自然科学、计算机科学等专业本科生的教材和参考书，也可作为广大数学爱好者的自学教材．

Dennis G. Zill and Michael R. Cullen: Differential Equations with Boundary-Value Problems, Fifth Edition (ISBN 0-534-38002-6).

本书版权登记号：图字：01-2004-1646

图书在版编目(CIP)数据

微分方程与边界值问题(原书第5版)/(美)兹尔(Zill, D. G.)等著；陈启宏等译．－北京：机械工业出版社，2005.10

(华章数学译丛)

书名原文：Differential Equations with Boundary-Value Problems, Fifth Edition

ISBN 7-111-16874-7

Ⅰ.微… Ⅱ.①兹…②陈… Ⅲ.①微分方程－高等学校－教材②边值问题－高等学校－教材 Ⅳ.O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第075102号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：白红莉　迟振春

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005年10月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16・36.75印张

印数：0 001-4 000册

定价：68.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

我在读研究生时开始涉足微分方程的研究，至今已有 20 多年，微分方程以及相关的最优控制问题目前仍是我的主要研究领域之一. 之所以翻译这本书，是因为数月前我的一个研究生偶得此书，细细阅读之下发现这本书非常适于本科生和广大数学爱好者作为入门或自学的教材. 它没有采用过于理论化的方式，而是以直观、易读的方式表述，示例丰富、内容全面、条理清晰，不难看出这是作者多年教学经验的结晶.

微分方程是近代数学的一个十分重要的学科分支. 随着现代社会的发展，无论是在工程、宇航等自然科学领域，还是在经济、金融等社会科学领域，微分方程都有着十分广泛的应用. 尤其是在经济和金融研究领域，微分方程及其应用似乎已经是不可或缺. 关于金融衍生产品定价的 Black-Scholes 方程便是一个典型的例子，在金融界这个方程几乎人所皆知，耳熟能详. 另外，微分方程在保险领域的应用也在逐渐深入. 不难预见，微分方程理论及其应用今后仍将在自然科学和社会经济的各个领域中发挥重要的作用.

这本教材从微分方程的基本概念讲起，前半部分重点介绍了常微分方程和常微分方程组，而后半部分(从第 12 章开始)重点讲述了偏微分方程的初步理论，分别从定性分析、解析分析和数值分析三个角度由浅入深、徐徐展开. 书中在介绍完一阶和高阶常微分方程的理论后(第 2 章和第 4 章)，紧跟着开辟了新的章节(第 3 章和第 5 章)，使用大量具有不同学科背景的实例，着重讲述它们在数学建模中的应用. 针对如何求解常微分方程这一问题，本书特别把方程的级数解和拉普拉斯方法分别放在第 6 章和第 7 章单独讨论，以突出重点. 为了方便应用领域的读者，作者还在第 13 章专门介绍了微分方程在极坐标、柱面坐标和球面坐标下的一些特殊情形. 本书的每一章都使用了丰富的范例，安排了适量的习题，并且介绍了如何使用计算机来求解微分方程，兼顾了理论性和实用性，这在数学教材中是不可多得的. 此外，作者还别具匠心，安排了三个项目模型作为微分方程在实际应用中的例子，大大地丰富了本书的内容.

作为一名数学工作者，促进数学科学的教育乃是义不容辞的责任. 我和张凡、郭凯旋合作翻译了这本教材，希望能有更多的人读到这本非常优秀的教材，以为振兴祖国的数学教育略尽绵力.

在本书出版的过程中，我们得到了很多人的帮助，在此要特别感谢机械工业出版社华章分社的编辑，以及张凡和郭凯旋，他们为本书的翻译和录入付出了艰辛的劳动. 由于译者的水平有限，难免会有疏漏，欢迎广大读者批评指正.

陈启宏

于上海财经大学

前　言

在本书修订过程中，作者受到了多方面的影响．作者希望能够满足评审者和编辑的要求，通过添加以及改变内容，使这本书既能够跟上时代，又具有竞争力．同时，作者也不希望增加书的厚度(删除某些内容的要求是很少见的)并确实不愿做任何使前一版的读者感到为难的事．所以，我试图满足这些要求，或者至少权衡这些要求．但是事实上，我并没有背离我的原则(在我看来)：本科生的教科书应当使用学生能够理解的、浅显易懂的语言，以及对他们有帮助的方式写成，同时也要使书中的理论水平与“初级课程”的概念一致．

近几年，由于“微分方程”方法的改进以及在教学中越来越重要的地位，再加上微积分的改革，使得微分方程这门课发生了很多变化．教师对这门课中传统的教学方法和授课内容提出质疑．这种有益的反思非常重要，它不仅使这门课对学生来说显得更为有趣，而且使其更紧密地和他们所生活的世界相联系．

这一版有什么新内容

- 这一版对微分方程的三种主要方法进行了更清楚的描述，这三种方法是：解析法、定性分析法和数值分析法．在阐述一阶微分方程的解析解之前，第 2 章在开头加入了新的一节．在这一节中，用方向场和相线分析法对一阶微分方程解的定性描述进行了检验．我认为，一定量的定性分析应该是而且也将是有代表性的初级课程的重要组成部分．
- 因为这是第 5 版，所以我努力在练习[1]中加入一些新类型的问题．其中有些问题要求使用计算机代数系统，这是本版的新变化．我意识到有些学校缺少计算机资源，无法把这些问题包含进他们的课程中，因此把这些问题的很大一部分放在“计算机实验作业”中．这使这些问题不会成为障碍；也就是说，如果教师想跳过它们，或推迟对它们的教学的话，不必从标准习题之中清除它们．那些要求更简单的技术(比如说图形计算器或绘图软件等的问题，已经在旁边用图标进行了标注．最后，在大多数练习中加入了许多概念题和讨论题．在有些情况下，我略微减少了“训练题”的数量(这些题通常要求使用常规的解法)，以便为增加新的练习留出空间．和“计算机实验作业”一样，为方便起见，强调对概念的理解以及适合在班级或小组中讨论的问题放在练习的后面部分．
- 三种新的“项目模型”都是由 Gilbert N. Lewis 教授设计的，分别放在第 3、5、8 章后面．这些模型分别考察了可再生资源的利用、塔科马海峡吊桥的坍塌、多层建筑在地震中的震动的数学模型．这些模型不仅仅是论述，其中每一个都包含了一系列的问题，如果需要的话可以作为计算机实验作业．

---

[1] 奇数题号的练习答案见附录 D. ——编辑注

这一版有什么变化

虽然几乎每一章中都有变化，但是变化最大的还是第 2、6、7 章.

第 2 章：一阶微分方程

这一章的论题在某些方面进行了重新安排，并增加了新的一节.

- 在解一阶微分方程之前，2.1 节中进行了一些定性分析，题目是“不求解情况下的解曲线”. 在这一节中利用方向场和相线分析法讨论了如何了解曲线的形态和曲线的形状问题，大约一半的资料是新加入的；方向场的有关资料在第 4 版的第 9 章中使用过. 在我的授课中，使用了另外一本教材《Differential Equations with Computer Lab Experiments》，我发现学生实际上比较喜欢对自治一阶微分方程定性方面的简短介绍，因为它并没有涉及复杂的过程，而仅仅是建立在对导数概念解释的基础上，这个概念对他们来说在微分计算的学习过程中已经非常熟悉. 这里简短地介绍了临界点、均衡解，以及吸引子、排斥子和半稳定的临界点的稳定性，这种简短的介绍不是从纯理论的角度进行的，也不是以非常复杂的方式来介绍的.
- 在本版中，我把关于线性方程的讨论(2.3 节)移到了对恰当方程的讨论(2.4 节)之前. 在 2.3 节中，我保留了“性质、过程和常数变易法”的格式，尽管这种介绍线性一阶微分方程的方法在第 4 版中并没有得到读者的一致赞同. 有些教科书在处理线性一阶运算(比如说，求积分因子的一般形式)时似乎说明线性一阶方程在某些方面不同于线性高阶方程. 请记住，本书第 4 章中试图阐述求解线性高阶方程的过程也适用于线性一阶方程.
- 在第 4 版对恰当方程的讨论中，积分因子的概念在练习中占据了次要的地位. 求解某些类型的非恰当方程的积分因子现在已经加入到了 2.4 节中.
- 直观的欧拉方法已经从第 4 版的第 9 章中移到了本版的 2.6 节. 这样做有两个原因：一是在微分方程的解析法、定性法和数值法之间达到一个更好的平衡，二是为了更好地说明计算机软件(一般为数值求解程序)图形方面的问题. 另外，在第 2 章中对欧拉方法的描述与大多数现行微积分教材中对这个问题的考虑保持一致.

第 6 章：线性方程的级数解

- 关于利用弗罗贝尼乌斯方法(6.2 节)解各种情况下的变系数线性微分方程的冗长讨论被大大地压缩了，本书只介绍了核心部分.

第 7 章：拉普拉斯变换

第 7 章的结构是全新的，比以前的各版更快地进入主题，即拉普拉斯变换是解一些特定方程的有效工具.

- 导数的拉普拉斯变换以及如何把这个结果用于简单的线性初值问题，将在本版 7.2 节中介绍.
- 在这一章的随后几节中，关于不断增加难度的初值问题和其他类型微分方程的解的讨

论，将随着变换的各种运算性质的介绍而展开. 在以前的版本中，所有这些方法都包括在一节中，使得该节过于庞杂.

第 8 章：线性一阶微分方程组

- 在第 8 章中加入了更多的数字和图表. 平面方程组解的图像在 tx 平面、ty 平面和 xy 平面上绘出. 在本书中，尽管引入了“相平面”这个词，但是没有对自治二阶微分方程或自治平面方程组进行定性分析.
- 在 8.4 节中，加入了关于如何将拉普拉斯变换用于确定矩阵指数的讨论.

哪些仍保持不变

按照主题和逻辑排列的章节与以前的版本一样. 和前面几版相同，这一版提供了大量的例子、练习和实际应用. 不同的章节中，在介绍微分方程的实际应用方面仍存在微小的差别. 一些评审者建议将对微分方程解的讨论放入实际应用中，另外一些评审者则认为应该将二者分开. 我同意后者的观点. 我认为，将一阶常微分方程和高阶常微分方程的应用放在不同的章节中不仅可以给教科书带来更大的灵活性，而且在开始时只强调少量的概念不会使读者感到突然. 从学生的观点来看，求解方法与应用混在一起会令人感到压力太大，从教师的观点来看，尽管这些实际应用不是教学大纲的一部分，也很难跳过. 不过这些并不是一成不变的，现在我已经将实际应用编入第 7 章关于拉普拉斯变换的不同节中. 我想这样做有两个理由：通常到第 7 章学完后，学生已经能够比较轻松地解决实际应用了，并且就像前面所说的，另一种编排方法(即将所有的实际应用都放在一节里)并不讨人喜欢. 总之，我反对那种将线性二阶微分方程的解和高阶微分方程的解放在不同章节的观点.

致谢

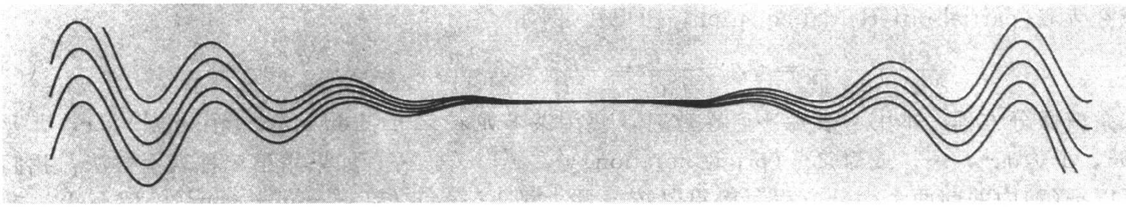
非常感谢下列各位，他们在修订过程中给予了大量的帮助、建议和批评：Zaven Margosian，劳伦斯科技大学；Brian M. O'Connor，田纳西科技大学；Mohsen Razzaghi，密西西比州立大学.

对密歇根科技大学的 Gilbert Lewis 给予特别的感谢，他在百忙之中抽出时间设计了本书的三个项目模型. 同时要感谢 Barbara Lovenvirth 在这些建模中的合作. 最后，我要对才华横溢的同事 Michael Berg 表示真诚的感谢，他提供了图 1.22 中的卡通图片.

完成这样一部教科书是费时而且困难重重的. 毫无疑问，数百页的手稿经过许多人的手，错误是在所难免的. 我在这里为可能出现的一些错误道歉.

这本书献给我 27 年的合作者、同事以及朋友——Michael R. Cullen(1943—1999)，他也是一位获奖教师，在本书出版的过程中去世了.

目　录



微分方程的一个解族；见图 1.3

第 1 章　微分方程引论

微分方程这个词明确地表示了一类包含导数的方程. 与在代数和几何课程中学过的从诸如 $x^2+5x+4=0$ 的方程中解出未知变量 x 类似，本书中我们的任务是从诸如 $y''+2y'+y=0$ 的微分方程中解出未知函数 $y=\phi(x)$.

第一段只是描述了这门课程中的一些基本内容，并不包括我们要学习的全部内容. 随着课程的展开，读者将看到更多的对微分方程的研究，而不仅仅是一些已经成熟的解法. 但是首先，为了阅读、学习并且熟悉这个课程，我们应该先学习一下它的专用术语.

1.1　定义与术语

在微积分课程中，我们已熟知函数 $y=\phi(x)$ 的导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 记为 $\phi'(x)$. 函数 $y=\mathrm{e}^{0.1x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是可微的，它的导数是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0.2x\mathrm{e}^{0.1x^2}$. 如果我们用符号 y 替换导数右边的 $\mathrm{e}^{0.1x^2}$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.2xy. \tag{1}$$

现给出方程(1)，而不知道它是如何构成的，问：y 表示的函数是什么？那么我们现在就遇到了这门课程中的基本问题之一：怎样从这样的方程中解出未知函数 $y=\phi(x)$？这个问题有点类似于微分学中一个类似的反问题：给出一个导数，求出它的原函数.

微分方程　我们构造的方程(1)被称为微分方程(differential equation). 在进一步讨论之前，让我们来看一下这个概念的精确定义.

定义 1.1　微分方程

含有因变量对一个或多个自变量导数的方程称为微分方程(DE).

为了讨论微分方程，我们应该从方程的类型(type)、阶(order)和线性性(linearity)等几个角度对其分类.

按类型分类　如果一个方程只含有因变量对一个自变量的导数，那么就称之为常微分方程(ordinary differential equation, ODE). 例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=\mathrm{e}^x,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x+y \tag{2}$$

都是常微分方程. 如果一个方程含有因变量对两个或更多个自变量的偏导数，我们就称之为偏

微分方程(partial differential equation，PDE). 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{以及} \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

都是偏微分方程. 本书中表示普通导数时，使用莱布尼茨记号(Leibniz notation)dy/dx，d^2y/dx^2，d^3y/dx^3，…，或撇记号(prime notation)y'，y''，y'''，…，如果用第二种表示方法，我们可以把(2)中的前两个微分方程写得更紧凑一些：$y'+5y=e^x$ 和 $y''-y'+6y=0$. 实际上，撇记号只用来表示三阶以下(包括三阶)的导数，四阶导数用 $y^{(4)}$ 来代替 y''''. 通常地，n 阶导数用 d^ny/dx^n 或 $y^{(n)}$ 来表示. 尽管有书写和录入的不便之处，但是莱布尼茨记号还是比撇记号更优越，因为它清楚地表示出了自变量和因变量. 例如，方程 $d^2x/dt^2+16x=0$ 直观地表示出了 x 是因变量而自变量是 t. 另外，读者还应该了解物理科学和工程学中的牛顿点记号(Newton's dot notation)(有些教科书中称之为点记号)有时候用来表示关于时间的导数. 因此微分方程 $d^2s/dt^2=-32$ 就可以写成 $\ddot{s}=-32$. 偏导数经常用表示自变量的下标(subscript notation)来标记，例如用下标表示(3)中第二个方程为 $u_{xx}=u_{tt}-2u_t$.

按阶分类 微分方程的阶(常微分方程或偏微分方程)是方程中最高阶导数的阶. 例如方程

$$\overset{\text{二阶}\downarrow}{\frac{d^2y}{dx^2}}+5\Big(\overset{\text{一阶}\downarrow}{\frac{dy}{dx}}\Big)^3-4y=e^x$$

是一个二阶的常微分方程. 一阶常微分方程有时可以写成微分形式 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 例如，如果我们假设用 y 表示方程 $(y-x)dx+4xdy=0$ 中的因变量，那么 $y'=\frac{dy}{dx}$，然后用微分 dx 去除方程两边，我们得到方程的另外一个形式 $4xy'+y=x$. 请见本节末的"注".

我们还可以用符号表示出含有一个因变量 n 阶导数的常微分方程的一般形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{4}$$

这里 F 是包含 $n+2$ 个变量 x，y，y'，…，$y^{(n)}$ 的实值函数，$y^{(n)}=d^ny/dx^n$. 出于实践和理论两方面需要，今后约定，化简形如(4)的常微分方程也就是用其余 $n+1$ 个变量表示的最高阶导数 $y^{(n)}$. 微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{5}$$

这里 f 是一个实值函数，称为(4)的正规型(normal form). 这种形式是我们所需要的，我们将用正规型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ 和 } \frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$$

表示一般的一阶和二阶常微分方程. 例如，一阶方程 $4xy'+y=x$ 的正规型是 $y'=(x-y)/4x$. 请见"注".

按线性分类 一个 n 阶常微分方程(4)被称为是线性(linear)的，如果 F 对 y，y'，…，$y^{(n)}$ 都是线性的. 这意味着当(4)为

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y-g(x)=0$$

或

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{6}$$

时，n 阶常微分方程是线性的.

从(6)中我们可以看到线性微分方程的两个性质. 第一，因变量和它所有的导数都是一次的，也就是涉及 y 的每一项的幂指数都是 1. 第二，每一项的系数最多和自变量 x 有关. 方程

$$(y-x)\mathrm{d}x+4x\mathrm{d}y=0,\quad y''-2y'+y=0 \text{ 和} \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5y=\mathrm{e}^x$$

依次为一阶、二阶和三阶线性常微分方程. 我们已经通过把第一个方程写成 $4xy'+y=x$ 的形式证明了它关于 y 是线性的. 非线性(nonlinear)常微分方程是指那些不是线性方程的方程. 因变量或其导数的非线性函数，如 $\sin y$ 或 $\mathrm{e}^{y'}$，不能出现在线性方程中. 因此，

$$\underset{\substack{\text{非线性项:系数与 } y \text{ 有关}\\ \downarrow}}{(1-y)}y'+2y=\mathrm{e}^x,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\underset{\substack{\text{非线性项:} y \text{ 的非线性函数}\\ \downarrow}}{\sin y}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+\underset{\substack{\text{非线性项:指数不是 1}\\ \downarrow}}{y^2}=0$$

分别是非线性一阶、二阶、四阶常微分方程的例子.

解 如前所述，本课程的目标之一是求解微分方程. 下一个定义是关于常微分方程的解的概念.

定义 1.2 常微分方程(ODE)的解

任给一个定义在区间 I 上的函数 ϕ，它至少有 n 阶定义在 I 上的连续导数，把 ϕ 代入一个 n 阶常微分方程两端，若使得方程两端相等，就称 ϕ 为方程在区间 I 上的解，我们也说 ϕ 在区间 I 上满足微分方程.

换言之，n 阶常微分方程(4)的一个解是一个 n 次可导的函数 ϕ，且

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0 \text{ 对 } I \text{ 中所有 } x \text{ 均成立.}$$

我们就说 ϕ 在区间 I 上满足微分方程. 本书只讨论 ϕ 是一个实值函数的情况. 根据前面初步的讨论，我们说 $y=\mathrm{e}^{0.1x^2}$ 是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0.2xy$ 在$(-\infty,+\infty)$上的解.

有时为了方便，我们也把解记为 $y(x)$.

定义区间 提到常微分方程的解就不能不提到区间. 定义 1.2 中的区间 I 可以根据需要称为*定义区间*(interval of definition)、*存在区间*(interval of existence)、*有效区间*(interval of validity)或*解存在的域*(domain). I 可以是一个开区间(a,b)、闭区间$[a,b]$、无限区间$(a,+\infty)$，等等.

例 1 解的验证

验证下列函数是所给微分方程在$(-\infty,+\infty)$上的解.

(a) $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=xy^{1/2}$；$y=\frac{1}{16}x^4$.　　(b) $y''-2y'+y=0$；$y=x\mathrm{e}^x$.

解 验证所给函数是方程解的一个方法是把它代入方程后，看方程两边是否对区间上所有 x 都相等.

(a)从

$$\text{左边:}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{16}(4\cdot x^3)=\frac{1}{4}x^3$$

$$\text{右边:}xy^{1/2}=x\cdot\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2}=x\cdot\left(\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{4}x^3$$

中我们可以看出方程两边对任何实数 x 都相等. 注意根据定义，$y^{1/2}=\frac{1}{4}x^2$ 是 $\frac{1}{16}x^4$ 的非负平方根.

(b)由导数 $y'=xe^x+e^x$ 和 $y''=xe^x+2e^x$ 我们可知，对每一个实数 x，

$$\text{左边}: y''-2y'+y=(xe^x+2e^x)-2(xe^x+e^x)+xe^x=0$$

$$\text{右边}: 0. \qquad \blacksquare$$

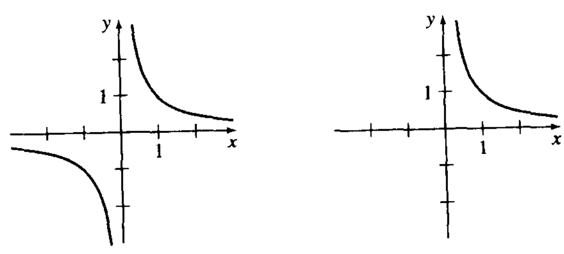
同样也要注意，例 1 中的每个微分方程都有常数解 $y=0$，$-\infty<x<+\infty$. 如果一个微分方程在区间 I 上有一个恒为零的解，则称这个解为平凡解(trivial solution).

解曲线 常微分方程的解 ϕ 的图形称为解曲线(solution curve). 因为 ϕ 是可微函数，所以在定义区间 I 上是连续的. 因此，作为函数 ϕ 的图形和作为解 ϕ 的图形可能是不同的. 换句话说，函数 ϕ 的定义域和解 ϕ 的定义区间 I 可能不相同. 例 2 说明了这种区别所在.

例 2 定义域与定义区间 I

考虑函数 $y=1/x$ 的定义域，它是除了 0 之外的所有实数 x. 当我们描绘 $y=1/x$ 的图形时，从它的定义域中抽出一些点，画在 xy 平面对应的位置上. 有理函数 $y=1/x$ 在(0, 0)点是不连续的，并且在原点附近的图形如图 1.1(a)所示. 函数在 $x=0$ 处是不可微的，因为 y 轴(方程是 $x=0$)是其图形的垂直渐近线.

现在 $y=1/x$ 也是线性一阶微分方程 $xy'+y=0$ 的一个解(请读者验证). 当我们说 $y=1/x$ 是微分方程的一个解时，意味着它是定义在区间 I 上并在其上可微，同时也满足方程. 换句话说，$y=1/x$ 是在任何不包括 0 的区间上的微分方程的解，如$(-3, -1)$，$\left(\frac{1}{2}, 10\right)$，$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$. 因为 $y=1/x$ 在 $-3<x<-1$ 和 $\frac{1}{2}<x<10$ 上的曲线分别是 $y=1/x$ 在 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 上的一部分，所以把区间 I 拓展得尽可能大是有意义的. 因此我们把区间定义为$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$，在$(0, +\infty)$上的解曲线如图 1.1(b)所示.



a) 函数 $y=1/x$, $x\neq 0$　　b) 解 $y=1/x$, $(0, \infty)$

图 1.1 $\blacksquare$

显式解和隐式解 在微积分的课程中，读者应该熟悉显函数和隐函数这两个术语. 解中的因变量只通过自变量和常数来表示的称为显式解(explicit solution). 把显式解看成是一个显函数 $y=\phi(x)$，我们可以用标准的规则对它进行变形、运算和微分. 我们来看看前两个例子，$y=\frac{1}{16}x^4$，$y=xe^x$ 和 $y=1/x$ 依次是 $dy/dx=xy^{1/2}$，$y''-2y'+y=0$ 和 $xy'+y=0$ 的显式解.

而平凡解 $y=0$ 是三个方程的显式解. 随着继续深入学习如何解常微分方程，读者将会看到解的形式不总是形如 $y=\phi(x)$ 的显式解，尤其是在我们解非线性一阶微分方程时，情况更是如此. 今后我们必须熟悉如 $G(x, y)=0$ 的形式所定义的隐式解 ϕ.

定义 1.3 常微分方程的隐式解

函数关系 $G(x, y)=0$ 称为常微分方程(4)在区间 I 上的隐式解(implicit solution)，假定至少存在一个函数 ϕ 满足这个函数关系以及定义在区间 I 上的微分方程.

讨论在什么条件下函数关系 $G(x, y)=0$ 定义了一个可微函数 ϕ 超出了本课程的范围. 因此我们将假设如果通过常规解法可以得到 $G(x, y)=0$，那么至少存在一个函数 ϕ 满足函数关系(即 $G(x, \phi(x))=0$)和定义在区间 I 上的微分方程. 如果隐式解 $G(x, y)=0$ 相当简单，我们也许可以把 y 用 x 解出来，得到一个或多个显式解. 请见注释.

例 3 隐式解的验证

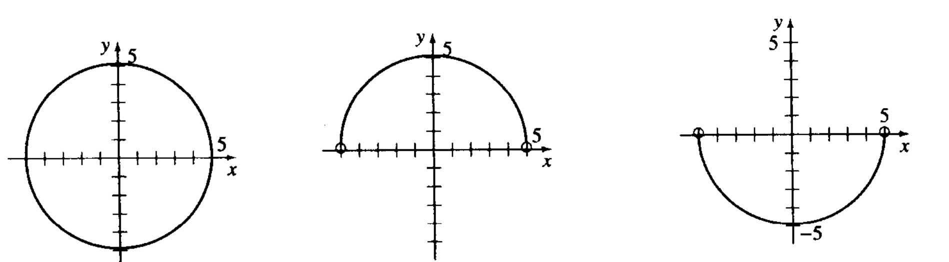
函数关系 $x^2+y^2=25$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{7}$$

在区间 $-5<x<5$ 上的隐式解. 对这个隐式解微分，我们得到

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}25 \quad 或 \quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

解后一个微分方程可以表示出符号 dy/dx，因此可以得到(7). 进一步，从 $x^2+y^2=25$ 中解出用 x 表示的 y 为 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$. 这两个函数 $y=\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ 和 $y=\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$ 满足函数关系($x^2+\phi_1^2=25$ 和 $x^2+\phi_2^2=25$)同时也是定义在 $-5<x<5$ 上的显式解. 图 1.2(b)和(c)表示的解曲线是图 1.2(a)中隐式解图形的一部分.



a) 隐式解 $x^2+y^2=25$

b) 显式解 $y_1=\sqrt{25-x^2}, -5<x<5$

c) 显式解 $y_2=-\sqrt{25-x^2}, -5<x<5$

图 1.2 $y'=-x/y$ 的一个隐式解和两个显式解 ■

任何形如 $x^2+y^2-c=0$ 的函数关系都满足(7)，对任何常数 c 都适用. 但是这一关系首先要保证在实数域内有意义. 例如若 $c=-25$，我们就不能说 $x^2+y^2+25=0$ 是方程的隐式解. (为什么?)

因为显式解和隐式解的区别在直观上是明显的，所以我们不会总说"存在一个显式(隐式)解"之类的话.

解族 对微分方程的研究类似于对微积分的研究. 在一些教科书中, 解 ϕ 被看作是一个方程的积分(integral), 它的图形称为积分曲线(integral curve). 在微积分中, 当计算一个原函数或不定积分时, 我们使用了一个积分常数 c. 类似地, 在解一个一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$ 时, 我们通常得到含有一个任意常数或参数 c 的解. 含有一个任意常数的解表示了解的集合 $G(x, y, c)=0$, 称之为单参数解族(one-parameter family of solution). 解一个 n 阶微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$, 我们将得到一个 n 参数解族(n-parameter family of solution). $G(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$. 这意味着一个微分方程对应于无数个参数可以有无数个解. 微分方程中不含任何参数的解称为特解(particular solution). 例如, 单参数族 $y=cx-x\cos x$ 是线性一阶方程 $xy'-y=x^2\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的显式解. (请读者证明.)用绘图软件绘出的图 1.3 表示了这个解族中一些解的图形. 解 $y=-x\cos x$ 是相应于 $c=0$ 的特解. 同样, 区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的 $y=c_1e^x+c_2xe^x$ 是例 1 中线性二阶方程 $y''-2y'+y=0$ 含两个参数的解族. (请读者证明.)方程的某些特解是平凡解 $y=0(c_1=c_2=0)$, $y=xe^x(c_1=0, c_2=1)$, $y=5e^x-2xe^x(c_1=5, c_2=-2)$, 等等.

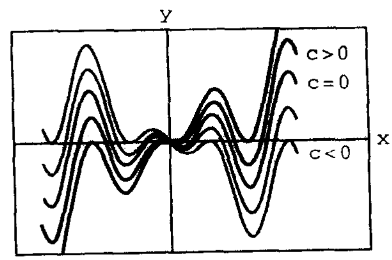


图 1.3 $xy'-y=x^2\sin x$ 的一些解

有时候微分方程有不属于任何解族的解, 也就是不能通过对解族中的参数取特值的方法得到这个解. 这种解族之外的解称为奇异解(singular solution). 例如, 我们已经看到 $y=\frac{1}{16}x^4$, $y=0$ 是微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解. 在 2.2 节中, 我们将证明, 微分方程 $dy/dx=xy^{1/2}$ 有一个单参数的解族 $y=\left(\frac{1}{4}x^2+c\right)^2$, 当 $c=0$ 时我们就得到了特解 $y=\frac{1}{16}x^4$. 但是注意平凡解 $y=0$ 是一个奇异解, 因为它不属于 $y=\left(\frac{1}{4}x^2+c\right)^2$ 的解族; 我们无法通过赋给常数 c 一个值得到 $y=0$.

在前面所有的例子中, 我们都分别用 x 和 y 表示自变量和因变量, 但是读者应该习惯于用其他符号来表示这些变量. 例如, 我们可以用 t 来表示自变量, 用 x 来表示因变量.

例 4 使用不同的符号

函数 $x=c_1\cos 4t$ 和 $x=c_2\sin 4t$ 都是线性微分方程

$$x''+16x=0$$

的解, 这里 c_1 和 c_2 是任意常数或参数.

对 $x=c_1\cos 4t$ 来说, 关于 t 的前二阶导数是 $x'=-4c_1\sin 4t$ 和 $x''=-16c_1\cos 4t$. 替换方程中的 x'' 和 x, 然后得到

$$x''+16x=-16c_1\cos 4t+16(c_1\cos 4t)=0.$$

用同样的方式, 由 $x=c_2\sin 4t$ 可以得到 $x''=-16c_2\sin 4t$, 因此有

$$x''+16x=-16c_2\sin 4t+16(c_2\sin 4t)=0.$$

最后，可以直接证明解的线性组合或含两个参数的解族 $x=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$ 也是微分方程的解. ■

下一个例子说明了微分方程的解可以是分段定义的函数.

例 5　分段定义的解

读者应该先证明一下单参数函数族 $y=cx^4$ 是微分方程 $xy'-4y=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个单参数解族. 请见图 1.4(a). 分段定义的可微函数

$$y=\begin{cases}-x^4, x<0\\ x^4, x\geqslant 0\end{cases}$$

是这个方程的特解，但不能从单参数解族 $y=cx^4$ 中得到. 这个解是当 $x<0$ 时令 $c=-1$ 和 $x\geqslant 0$ 时令 $c=1$ 得到的. 请见图 1.4(b).

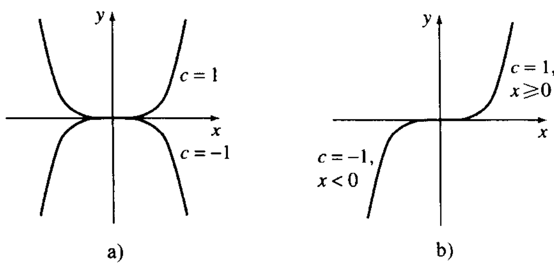


图 1.4　$xy'-4y=0$ 的一些解 ■

微分方程组　到现在为止我们一直在讨论含有一个未知函数的单个微分方程. 但是在理论和实践中，我们必须处理微分方程组. 常微分方程组(system of ordinary differential equations)是由两个或更多的方程组成的，这些方程含有关于一个自变量的两个或两个以上的导数. 例如，如果 x 和 y 表示因变量，t 表示自变量，那么由两个一阶微分方程组成的方程组为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=f(t,x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=g(t,x,y).\end{aligned} \tag{8}$$

形如(8)的方程组的解是两个定义在区间 I 上的可微函数 $x=\phi_1(t)$，$y=\phi_2(t)$，并且在这个区间上满足每一个方程.

注　(ⅰ)关于微分方程的隐式解最后再说一点. 在例 3 中，我们可以从 $x^2+y^2=25$ 中解出用 x 表示的 y，得到微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-x/y$ 的两个显式解 $\phi_1(x)=\sqrt{25-x^2}$ 和 $\phi_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$. 但是不要把注意力过多地集中在这个例子上，除非问题是简单的、明显的、方便的、重要的，或被告知这样做，否则通常没有必要试图从一个隐式解 $G(x,y)=0$ 中解出用 x 表示的 y. 同时，也不要误解定义 1.3 后的第二句话，一个隐式解 $G(x,y)=0$ 可以定义一个很好的可微函数 ϕ，它是微分方程的一个解，但是我们可能不能用像代数这样的解析方法解出 $G(x,y)=0$. ϕ 的解曲线可能是 $G(x,y)=0$ 图形的一段或一部分. 请参考练习 1.1 中的习题 41、42 和 2.2 节中例 4 下面的讨论.

（ⅱ）在微分形式 $M(x,\ y)\mathrm{d}x+N(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 中，一阶常微分方程是否是线性的可能并不明显，因为在形式上我们不知道哪个符号表示因变量．请参考练习 1.1 中的习题 3、4．

（ⅲ）假设 $F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0$，从中解出 $y^{(n)}$ 应该不是一件困难的事情，但是在这个地方读者应该稍微小心一点，这里可能有一些例外，关于这个假设肯定也存在一些问题．请参考练习 1.1 中的习题 36、37．

（ⅳ）读者可能会在一些微分方程的课本里或在从事微分方程研究的老师的讲课中遇到“闭形式的解”这个词．这个词通常是说用初等（或类似地）函数表示的显式解：x 的整数次幂、根式指数和对数函数、三角函数和反三角函数的有限次组合．

（ⅴ）如果 n 阶常微分方程 $F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的每一个解可以从含 n 个参数的解族 $G(x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)=0$ 中选择合适的参数 c_i，i，$=1$，2，$\cdots$，n 得到，那么我们说这个解族是微分方程的通解(general solution)．在解线性微分方程时，我们会对方程的系数加上简单的约束条件；通过这些约束条件，我们可以肯定不但在区间上解存在，而且由解族可以产生所有可能的解．除了一些一阶方程外，从非线性方程一般很难或不可能得到用初等函数表示的解．进一步说，如果我们得到一个非线性方程的解族，那么这个解族是否包含所有的解是不知道的．在实践中，“通解”这种说法只用在线性微分方程上．这个概念在 2.3 节和 4～6 章中是很重要的．

练习 1.1

写出习题 1～10 中每个微分方程的阶数，并说明是线性的还是非线性的．

1. $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$

2. $x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4+y=0$

3. $(y^2-1)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$

4. $u\mathrm{d}v+(v+uv-ue^u)\mathrm{d}u=0$

5. $t^5y^{(4)}-t^3y''+6y=0$

6. $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+u=\cos(r+u)$

7. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$

8. $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{k}{R^2}$

9. $(\sin\theta)y'''-(\cos\theta)y'=2$

10. $\ddot{x}-\left(1-\dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x}+x=0$

证明习题 11～14 中给出的函数是相应微分方程的显式解．假定方程定义在某个合适的区间 I 上．

11. $2y'+y=0$；$y=e^{-x/2}$

12. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+20y=24$；　$y=\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{5}e^{-20t}$

13. $y''-6y'+13y=0$；　$y=e^{3x}\cos 2x$

14. $y''+y=\tan x$；　$y=-(\cos x)\ln(\sec x+\tan x)$

证明习题 15、16 中给出的表达式是相应微分方程的隐式解．每一题至少找出一个显式解．绘出显式解的图形．每个解 ϕ 都定义在区间 I 上．

15. $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=(X-1)(1-2X)$；$\ln\left(\dfrac{2X-1}{X-1}\right)=t$