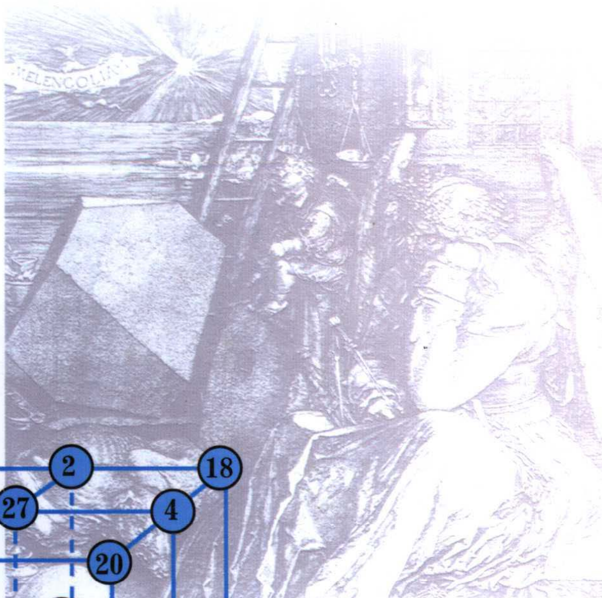
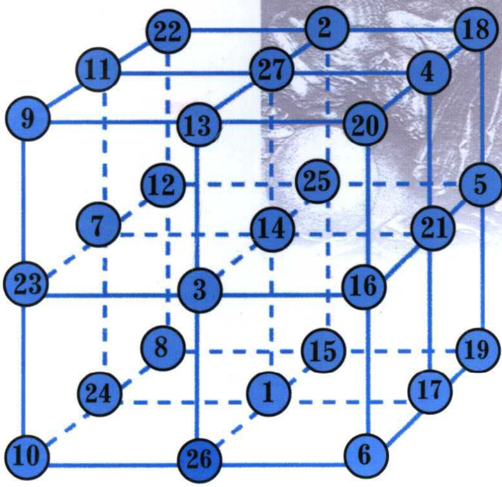
MODERN THEORY OF THE MAGIC SQUARE AND MAGIC CUBE

幻方与幻立方的当代理论

欧阳录 著



7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4



湖南教育出版社

幻方与幻立方的当代理论

MODERN THEORY OF
THE MAGIC SQUARE AND MAGIC CUBE

欧阳录著

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

湖南教育出版社

前　言

本书是一本雅俗共赏的数学著作，不仅为研究幻方学的专家们提供一套新的系统的理论，也为幻方爱好者们作一次览胜猎奇的导游．不论读者的数学素养处于哪一个水平上，只要他对幻方有兴趣，阅读本书后，都会有所裨益．作为爱好者，他将从幻方制作方面的机智、技巧中获得美的享受，同时在思想方法上也得到启发．作为专家，在掌握一套全新的系统化的理论后，以他们毕生从事幻方研究而积累起来的智慧与经验从事进一步的研究，一定可以揭示出隐藏在更深层次内的幻方的(也就是数的)奥秘．

本书第一章是为不具备任何现代数学基础知识的人写的，实际上这一章也就是幻方与幻立方的发展史，由于缺乏可靠的文字记录，也没有考古的发现，因而文中很多是臆测之词，故只能称为“幻方的故事”．虽然近 4 000 年来幻方的发展与现代数学无关，但人类所创造的每个幻方都闪烁着智慧之光，当读者读完了这一章，他实际上已进入了二维和三维平衡组合学的领域．

由第一章可以看出，幻方学几千年来的发展，都是“类比思维”的胜利．幻方由低阶进入高阶，由二维进入三维，无论是用复合法还是镶边法，卢培步法还是杨辉对角线法，其核心都是类比．在由熟悉领域进入陌生领域时，类比法无疑是最好的导游．但类比的结果不一定正确，即使正确，也只能使人知其然而不知其所以然，所以读完了第一章的读者，如果想要真正破译幻方的奥秘，便会自觉地进入下面几章．

从第二章起，是为那些有一定数学基础的幻方爱好者和专家

们写的.

自欧拉创立了拉丁方并用一对正交的拉丁幻方构造幻方后，专家们便在拉丁方的领域内探索幻方．许多幻方爱好者虽然不知道拉丁方为何物，但在长期的实践中，在力求平衡的思维定势的作用下，往往不自觉地也进入了拉丁方这个领域．他们大多采用同余式理论，不知道使用更方便的剩余环．极少数专家知道用伽罗华域来处理拉丁方．用伽罗华域处理拉丁方，用拉丁方处理幻方，都很方便，专家们也乐此不疲，沉溺于拉丁方中，不知不觉地进入了误区，再要前进一步便非常困难了．需知伽罗华域不能解决拉丁方的所有问题，拉丁方也不能解决幻方的所有问题.

本书提出了原幻方（及原高级幻方，原超级幻方）的概念，凡拉丁幻方都是原幻方，但原幻方可以不是拉丁方，它是一个比拉丁幻方更广泛的概念.

第二章是为新理论作准备.

第三章首先建立新理论．若 F 与 G 是一对正交的原幻方(也可以是高级原幻方或超级原幻方)，阶数为 n，则

$$M = nF + G + 1$$

是一 n 阶的幻方（或高级幻方，或超级幻方）.

在这一章内，还解答了第一章中留下的一些问题，例如，卢培步法何以对任何奇数阶幻方有效？杨辉对角线法何以对任何 $4k$ 阶幻方有效？$4k$ 阶幻方与 $4k+2$ 阶幻方有无本质上的不同？

第四章用新理论彻底解决了高级幻方的问题.

第五章是新理论在21世纪所取得的人类梦寐以求的新成果，对超级幻方给予了系统而完满的解决．必须指出，对 $(4k)^2$ 阶超级幻方使用了超级原幻方，它不是拉丁方．对 $(2k+1)^2$ 阶超级幻方使用了超级拉丁幻方，但它既不是伽罗华域 F_n 上的，也不是剩余环 R_n 上的.

第六章是为三维的平衡组合学（即幻立方）作准备，首先把

二维的正交对扩充为三维的正交三元组，并建立幻立方的基础定理：若 L，M，N 是一个正交的原幻立方（或标准原幻立方，或高级原幻立方）的三元组，则

$$\mathfrak{M} = n^2L + nM + N + 1$$

是一个幻立方（或标准幻立方，或高级幻立方）．

在这一章内还提出了三个拉丁立方成为正交组的一个充分条件．

第七章讲幻立方，从新理论的高度来回答旧问题，为什么卢培步法对奇数阶幻立方有效？为什么杨辉对角线法对 $4k$ 阶幻立方有效？

在本章内也讲述了一个 21 世纪取得的新成果．19 世纪末，已造出 6 阶幻立方，之后，再无进展．本章内彻底解决了 $4k+2$ 幻立方的构造问题．

第八章讲标准幻立方和高级幻立方．虽然在 20 世纪末有人造出了个别的 7 阶标准幻立方，用本书的新理论，却可以造出一系列的标准幻立方，即使限于 7 阶也可以造出许多，而且，根据新理论，还可以造出平衡性更好的高级幻立方．

截至目前为止，超级幻方和高级幻立方是人类所能达到的平衡组合中的最高峰．

制造幻方和幻立方，有着严格的限制，即使用的元素必须是 1 到 n^2 或 1 到 n^3 的连续自然数，从 20 世纪开始，人们把它放宽为 n^2（或 n^3）个不同的自然数，这便是第九章所涉及的内容，比之于幻方或幻立方，泛幻方更容易实现人们所要求的平衡，但随意性更大，研究它也更麻烦．

伽罗华域与拉丁方，虽然不能解决幻方与幻立方的所有问题，但它毕竟是一个重要的工具．为了使幻方爱好者能读懂本书，特意在书后加了一章附录，以特别简洁的语言叙述了伽罗华域与拉丁方的主要性质．

数的奥妙，潜隐极深．知其然而不知其所以然的固然很多（如哥德巴赫猜想）．原以为不然而事实已然的也不少（如双重幻方及平方幻方便是20世纪的重要发现）．仅就幻方与幻立方而言，当前就有一些问题没有解决．如

(1) $4k+2$阶高级幻方似乎不存在，但无证明．

(2) 任给一个 n（$n\geqslant 8$）阶幻方，如何判断它是否有配偶拉丁方（已知 $n\leqslant 7$ 时无配偶）？如有，如何求得？

(3) 是否存在 n（$n>2$）次幂幻方？

(4) 用对换法构造原幻立方 X^{ξ}，Y^{η}，Z^{ζ}，三者成正交三元组的充分必要条件是什么？（A^{α}、B^{β} 正交的充要条件见44目的定理6．）

(5) 是否存在 n^3 阶的超级幻立方？

人类对数的认识包含于人类对宇宙的认识这个大范畴之内，破译数的奥秘，也就是加深我们对周围世界及对人类自身的认识，希望能出现一些有才华有兴趣的幻方爱好者，继续向这深奥难明、神秘莫测的数字之谜进军．

作者写于岳麓山桃花村

2003年3月12

目　　录

第一章　幻方的故事

第一节　洛书的神话

1 幻方起源于我国，但年代久远，很多细节早已无法考查，留下来的只有传说．由于对祖先的崇敬，其实就是一种民族自豪感的潜意识的体现，无一例外，世界上所有的民族，都把他们有关祖先的传说神化，成为一种神话．

在舜帝时，中国洪水泛滥，舜命禹治理洪水，禹先后经历了十三年，终有所成．功成之后，途经洛汭，即洛水入黄河之处．在洛水的北面，黄河的南面，即今河南巩县北边河洛所夹之处，从洛水中浮出一只玄色的乌龟，玄龟背了一幅神秘的图画送给禹，此图后人称为**洛书**．

关于玄龟，《拾遗记》说："禹尽力沟洫，导川夷岩，黄龙曳尾于前，玄龟负青泥于后．玄龟，河精之使者也．"原来它早就帮助大禹治理山川了．

有关洛书的文字记录，在《周易》里与**河图**并称，说："是故天生神物，圣人则之．天地变化，圣人效之．天垂象，见吉凶，圣人象之．河出图，洛出书，圣人则之．"这里并没有讲清洛书是什么，只说洛书是天生神物而已．

《大戴礼·明堂》有一段话："明堂者，古有之也，凡九室．

……二九四七五三六一八．”北齐（550－575）人卢辩注曰：“二九四七五三六一八，记用九室，谓法龟文，故取此数，以明其制也．”明堂的“制”是法龟文的，而洛书又是画在龟背上的，那么洛书就应当是**九宫图**．

后周（951－960）甄鸾注《数术记遗》说：“九宫者，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央．”这里已把九宫图讲得清清楚楚．这就是今天的3阶幻方．至汉，称幻方为**纵横图**，至宋，杨辉仍称为纵横图．幻方之学传入西方之后，学生胜过了老师，后来又由西方以更为进步的方式返回中国，他们称之为 magic square，我们译为**幻方**，这已是数学界通用的名词了．

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1

现在所传的《周易》和《礼记》（有《大戴礼》和《小戴礼》两种版本）都是孔子（BC551—BC479）删诗书、订礼乐后的产物，至今已有2 500多年了．如果洛书真是大禹时发现的，禹把帝位传给儿子启建立夏王朝时，约为BC2100年，那么洛书为人类所知，至少有4 000年了．

2 我国古代，历来把河图洛书连在一起．九宫八卦也经常并称，外加阴阳五行，星象筮卜，把一个洛书弄得非常神秘．在古代的西域、印度、欧洲也是一样，认为幻方具有某种镇压妖邪的魔力．在我国，这门学问只在少数人中间流传．北宋的朱震把河图洛书排在周易各图之首，其次才是伏羲八卦图，足见对此图的重视．据他说，刘牧著《易数钩隐图》，以九为河图，十为洛书，以之传于范谔昌，谔昌传于许坚，坚传于李溉，溉传于种放，放传于希夷陈抟，这些人都是从哲学上来研究河图洛书，没有多从数学上考虑．刘、范、许、李、种等人的事迹已无从查

考．陈抟（？—989）就是和宋太祖赵匡胤下一盘棋赢了一座华山的道士，后来宋太宗封他为希夷先生．他精研易术，对以后的宋明理学都有重要影响，后来理学家朱熹按“龟文说”认为当以九为洛书，十为河图，此后成为定论．上述诸家，在哲学上固有贡献，但在数学上则没有任何推进．

[redacted]唯一能从数的角度研究八卦的是理学家邵雍（1011—1077），他是象数学派的创始人．以道或太极为宇宙之本，经过神、数、象的演化过程成为天地万物．其观点有些类似于希腊的毕达哥拉斯（Pythagoras，BC580—BC500），把数神秘化，认为数是万物的原型，万物都模仿数．

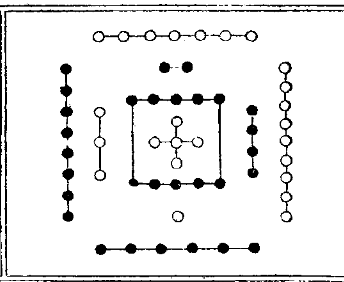
对于八卦与河图，也有一段传说．《三皇本纪》说，在原始公社的狩猎时代，有位大英雄大智者，他“仰则观象于天，俯则观法于地，旁观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，始画八卦，以通神明之德，以类万物之情；造书契以代结绳之政；于是始制嫁娶，以俪皮为礼；结网罟以教渔佃，故曰宓牺氏；养牺牲以充庖厨，故曰庖牺氏”．由于他对人类的贡献，黄河有龙马跃出，背负一幅神秘的图画献给他，后人称之为河图．

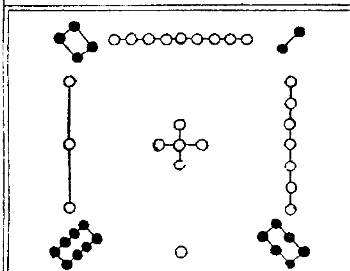
对于河图，至今未能作出进一步的阐述与研究，对于八卦，则由周文王衍生为六十四卦，再加上对六十四卦的解释，成为《易经》，又称《周易》．

《周易》基本观点之一是“万物之生，负阴而抱阳，莫不有太极”，认为阴阳固然相对相反，但又相辅相成．邵雍根据这一思想，画出了图3右上角的太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦的自然排列顺序，即乾一、兑二、离三、震四、巽五、坎六、艮七、坤八，复又根据相辅相成的要求，画出了图3左上角的伏羲八卦方位图，使相对两卦又是互补的，如坎离二卦是相对的，但离中虚、坎中满，又是互相补足的．

周易本義圖目

河圖　洛書





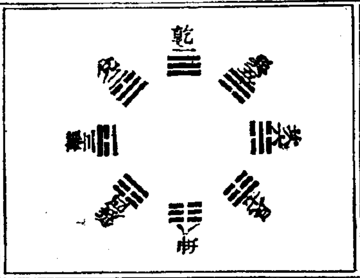
繫辭傳曰河出圖洛出書聖人則之又曰天一地二天三地四天五地六天七地八天九地十天數五地數五五位相得而各有合天數二十有五地數三十凡天地之數五十有五此所以成變化而行鬼神也此河圖之數也洛書蓋取龜象故其數戴九履一左三右七二四爲肩六八爲足

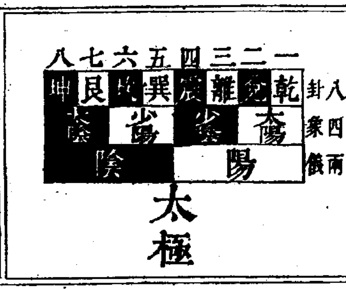
蔡元定曰圖書之象自漢孔安國劉歆魏關朗子明有宋康節先生邵雍堯夫皆謂如此至劉牧始兩易其名而諸家因之故今復之悉從其舊

图 2

周易本義圖

伏羲八卦次序　伏羲八卦方位

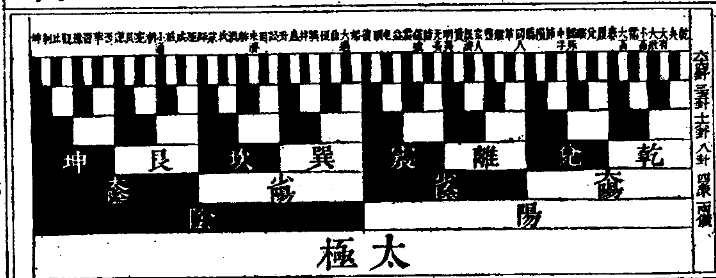




繫辭傳曰易有太極是生兩儀兩儀生四象四象生八卦邵子曰一分爲二二分爲四四分爲八也說卦傳曰易逆數也邵子曰乾一兌二離三震四巽五坎六艮七坤八自乾至坤皆得未生之卦若逆推四時之比也後六十四卦次序放此

說卦傳曰天地定位山澤通氣雷風相薄水火不相射八卦相錯數往者順知來者逆邵子曰乾南坤北離東坎西震東北兌東南巽西南艮西北自震至乾爲順自巽至坤爲逆後六十四卦方位放此

伏羲六十四卦次序



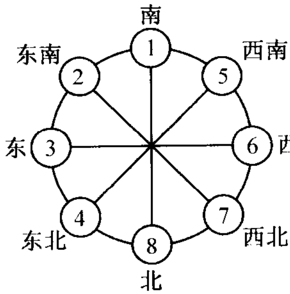
前八卦次序圖卽繫辭傳所謂八卦成列者此圖卽其所謂因而重之者也故下三畫卽前圖之八卦上三畫則各以其序重之而下卦因亦各衍而爲八也若逐爻漸生則邵子所謂八分爲十六十六分爲三十二三十二分爲六十四者尤見法象自然之妙也

七

图 3

后人有八卦生九宫之说，其大致思路如下：

按邵雍八卦图在各方位填上代表八卦的数字得图 4 之（a），而在表方位的图画中以九宫图最自然，即图 4 之（b）．在（a）中，相对两数之和为 9．如改为相对两数之和为 10，便得图 4 之（c），中央正好填上中数 5．



（a）

东南	南	西南
东	中央	西
东北	北	西北

（b）

2	1	6
3	5	7
4	9	8

（c）

8	1	6
3	5	7
4	9	2

（d）

图 4

在（c）中，和为 15 的三数构成的线段成为米字形．如果交换 2 与 8，米字构架当然保持，又加上了一个田字构架，这便是九宫图了．

1 代表乾，9 代表坤，乾上坤下，䷋是六十四卦中最坏的“否”卦，象征天地不交而万物不通，表示内柔而外刚，内小人而外君子．把图 4（d）倒转过来，便成图 1，即戴九履一，坤上乾下，得到六十四卦中最好的“泰”卦，䷊表示天地交而万物通，上下交而志同，内健而外顺，内君子而外小人。

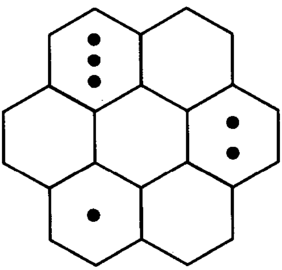
德国数学家莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）发现八卦就是二进制中的 000 到 111，但邵雍的 1～8 显然与二进制无关，只是图 3 中右上角表示的各卦的自然序号．

八卦生九宫，有点尴尬之处，先是邵雍的 5，6，7，8 变成

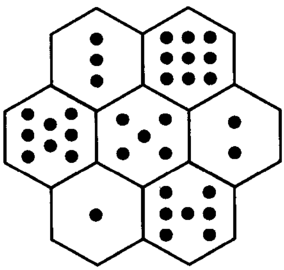
了6，7，8，9，其次是还要来个2，8交换．杨辉于1275年刊行《续古摘奇算法》时，也不知道九宫图是八卦所生．但是尽管这是后人的附会，它总是“九宫图是如何产生的”这个问题的一个答案，总比“天生神物”这个答案好．八卦是人画出来的，不是外星人的赠品，那么，九宫图也应是人创造的，绝非神赐．

但是，想到4 000多年前的生产水平及数学水平，又使人难以相信，会有人有意识地去制作一个对当时生产毫无影响的九宫图，也很难相信，当时的人有能力造出九宫图．因此，它只可能是一种偶然的产物．

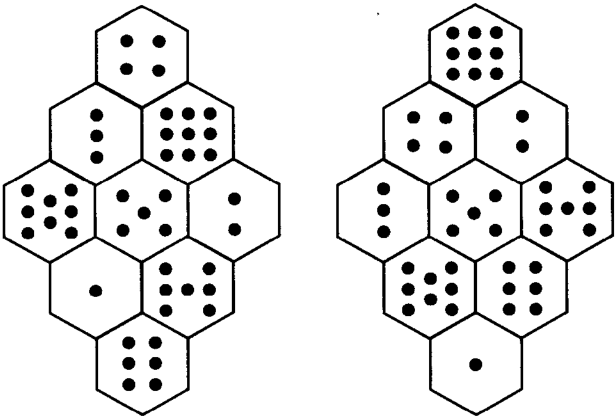
龙凤龟麟，历来是炎黄子孙的吉祥物，雕龙刻凤，颇不容易，找块扁平石头制出一只不必太像的乌龟，倒也并不麻烦．也许在洛水入河的北岸上，刚好有块灰暗的石头像只乌龟，有好事之徒便在其背上刻起龟文来，假定首先刻了图5（a），·，∶，⋮隔一格刻一个，以求视觉上的平衡．之后，又有人在·，∶，⋮的对面刻上⠿，⁙，⁘，使它更为平衡．中间数⁙刻在正中，雪花形的三轴上和数都是15，还有⁚⁚和⁝⁝没有安置好．作最后安置的人，要有一点统筹兼顾的能力，画出（c）来，这就已经是洛书了．如果写成（d）的形式，它更像一只乌龟，以9为头，1为尾，2，4是前足，6，8是后足，3，7是胸边，5是心腹．



(a)



(b)



(c)　　　　(d)

图 5

当然古人也许另有发现过程，这里只是按当时的数学水平模拟一次偶然而且幸运的发现而已.

第二节　九宫图的复合

5 九宫图虽然是最简单的幻方，但在未明其奥秘之前，要默写出来，也颇不容易，因而前人编制了几句歌诀，以助记忆，即

戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足.

前人虽不明九宫之妙，但模仿九宫的造法，也做出了一些高阶幻方.