Guidance Series for Mathematics Majors
数学类专业学习辅导丛书

数学分析习题全解指南 上册

Mathematics

陈纪修 徐惠平 周渊 金路 邱维元

高等教育出版社

Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

数学分析

习题全解指南　上册

陈纪修　徐惠平　周　渊

金　路　邱维元

高等教育出版社

内容提要

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版,上册)相配套的学习辅导书,是教育部"理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析"项目和高等教育出版社"高等教育百门精品课程教材建设计划"精品项目的成果,书中内容包含了《数学分析》(第二版,上册)中全部习题的详细解答。

本书不仅可作为高等学校学习"数学分析"课程的学生的学习参考书与讲授"数学分析"课程的教师的教学参考书,也可作为准备报考高等学校理工科各专业研究生的学生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题全解指南.上册/陈纪修等.—北京:高等教育出版社,2005.7

ISBN 7-04-016618-6

Ⅰ.数.. Ⅱ.陈... Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第048492号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 刘晓翔
责任绘图 郝 林 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 王 超
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	山东省高唐印刷有限责任公司		
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2005年7月第1版
印　　张	17	印　　次	2005年7月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	19.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

物料号 16618-00

前言

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版)相配套的学习辅导书,是教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目和高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目的成果。本书分上、下两册出版,内容分别包含了《数学分析》(第二版)中全部习题的详细解答。

自从面向21世纪课程教材《数学分析》出版以来,我们不断收到广大读者的来信和电子邮件,希望我们能提供教材中习题的解答,以便于他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求,促使我们编写了这本《数学分析习题全解指南》。

对于学习“数学分析”课程的学生来说,不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论与基本方法,更要通过学习,培养熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这一目的,严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家苏步青院士说他自己曾做过一万道微积分习题,由此可以说明我们的前辈大师们为什么会有如此深厚的数学功底。希望广大同学在做习题时,首先要认真地独立思考,认真地解答每一道习题。希望同学们一定要正确运用本书,只有在经过自己的认真思考,仍不会解答或对自己解答的正确性无法确定时,再去参考题解。否则,不仅对学习没有任何帮助,也违背了我们编写这本《数学分析习题全解指南》的初衷。

本书给出了教材中全部习题的解答。但对于大部分习题,书中给出的解法并不是惟一的。事实上,教材中大部分习题都是可以有多种解法的,而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型的习题,希望读者能自己思考是否有多种解法,这将有助于对数学知识的融会贯通,提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院楼红卫教授向我们提供了部分习题的解答;在本书的出版过程中,我们得到了高等教育出版社徐刚老师,李蕊老师,蒋青老师,文小西老师的大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平,书中给出的题解难免会有错误与缺陷,希望广大读者提出宝贵的批评和建议,以便今后再版时改进。

编　者

二〇〇四年八月

郑重声明

目　录

第一章　集合与映射

§1　集合

1．证明由 n 个元素组成的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$有 2^n 个子集.

解　由 k 个元素组成的子集的个数为 C_n^k，$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=(1+1)^n=2^n$.

2．证明：

(1) 任意无限集必包含一个可列子集；

(2) 设 A 与 B 都是可列集，证明 $A\cup B$ 也是可列集.

证　(1) 设 T 是一个无限集，先取 $a_1\in T$. 由于 T 是无限集，必存在 $a_2\in T,a_2\neq a_1$. 再由 T 是无限集，必存在 $a_3\in T,a_3\neq a_1,a_3\neq a_2$. 这样的过程可以无限进行下去，于是得到可列集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$S\subset T$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，则 $A\cup B$ 可表示为

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}.$$

3．指出下列表述中的错误：

(1) $\{0\}=\varnothing$；

(2) $a\subset\{a,b,c\}$；

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$；

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$.

解　(1) $\{0\}$是由元素 0 构成的集合，不是空集.

(2) a 是集合$\{a,b,c\}$的元素，应表述为 $a\in\{a,b,c\}$.

(3) $\{a,b\}$是集合$\{a,b,c\}$的子集，应表述为$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$.

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}$是由 a,b 和$\{a,b\}$为元素构成的集合，所以$\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\}$，或$\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$，但$\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}$.

4．用集合符号表示下列数集：

(1) 满足$\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$ 的实数全体；

(2) 平面上第一象限的点的全体；

(3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4) 方程 $\sin x\cot x=0$ 的实数解全体.

解　(1) $\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x>0 \text{ 且 } y>0\}$.

(3) $\{x\mid 0<x<1 \text{ 且 } x\in\mathbf{Q}\}$.

(4) $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. 证明下列集合等式：

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$;

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

证　(1) 设 $x\in A\cap(B\cup D)$，则 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$. 于是或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$，即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D);$$

设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，则或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$. 于是 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$，即 $x\in A\cap(B\cup D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\supset(A\cap B)\cup(A\cap D).$$

所以

$$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D).$$

(2) 设 $x\in(A\cup B)^C$，则 $x\overline{\in}A\cup B$，即 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，于是 $x\in A^C\cap B^C$，因此

$$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C;$$

设 $x\in A^C\cap B^C$，则 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，即 $x\overline{\in}A\cup B$，于是 $x\in(A\cup B)^C$，因此

$$(A\cup B)^C\supset A^C\cap B^C.$$

因此

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1) $A\cup B=A\cup C\not\Rightarrow B=C$;

(2) $A\cap B=A\cap C\not\Rightarrow B=C$.

其中符号“$\not\Rightarrow$”表示左边的命题不能推出右边的命题.

解　(1) 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$.

(2) 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$.

7. 下述命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $x \overline{\in} A \cap B \Leftrightarrow x \overline{\in} A$ 并且 $x \overline{\in} B$;

(2) $x \overline{\in} A \cup B \Leftrightarrow x \overline{\in} A$ 或者 $x \overline{\in} B$.

解 (1) 不正确. $x \overline{\in} A \cap B \Leftrightarrow x \overline{\in} A$ 或者 $x \overline{\in} B$.

(2) 不正确. $x \overline{\in} A \cup B \Leftrightarrow x \overline{\in} A$ 并且 $x \overline{\in} B$.

§2 映射与函数

1. 设 $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $T=\{a,b,c\}$, 问有多少种可能的映射 $f:S\to T$? 其中哪些是双射?

解 有 $3^3=27$ 种可能的映射，其中有 $3!=6$ 种是双射，它们是

$$f:\begin{cases}\alpha \mapsto a,\\ \beta \mapsto b,\\ \gamma \mapsto c,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha \mapsto a,\\ \beta \mapsto c,\\ \gamma \mapsto b,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha \mapsto b,\\ \beta \mapsto c,\\ \gamma \mapsto a,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha \mapsto b,\\ \beta \mapsto a,\\ \gamma \mapsto c,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha \mapsto c,\\ \beta \mapsto a,\\ \gamma \mapsto b,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha \mapsto c,\\ \beta \mapsto b,\\ \gamma \mapsto a.\end{cases}$$

2. (1) 建立区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应;

(2) 建立区间 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应.

解 (1) $f:[a,b]\to[0,1]$

$$x \mapsto y=\frac{x-a}{b-a}.$$

(2) $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$

$$x \mapsto \tan\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi=-\cot(\pi x).$$

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数，并指出定义域与值域:

(1) $y=f(u)=\log_a u$, $u=g(x)=x^2-3$;

(2) $y=f(u)=\arcsin u$, $u=g(x)=3^x$;

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=g(x)=\sec x$;

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

解 (1) $y=\log_a(x^2-3)$, 定义域: $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$, 值域: $(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin 3^x$, 定义域: $(-\infty,0]$, 值域: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(3) $y=|\tan x|$,定义域:$\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,值域:$[0,+\infty)$.

(4) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,定义域:$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$,值域:$[0,1)\cup(1,+\infty)$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y=\dfrac{1}{3}\log_a^3(x^2-1)$.

解 (1) $y=\arcsin u,u=\dfrac{1}{\sqrt{v}},v=x^2+1$.

(2) $y=\dfrac{1}{3}u^3,u=\log_a v,v=x^2-1$.

5. 求下列函数的自然定义域与值域:

(1) $y=\log_a\sin x\ (a>1)$;

(2) $y=\sqrt{\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$;

(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x^4}$.

解 (1) 定义域:$\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$,值域:$(-\infty,0]$.

(2) 定义域:$\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$,值域:$[0,1]$.

(3) 定义域:$[-4,1]$,值域:$\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$.

(4) 定义域:$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域:$\left[\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$.

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x)=\log_a(x^2),g(x)=2\log_a x$;

(2) $f(x)=\sec^2x-\tan^2x,g(x)=1$;

(3) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,g(x)=1$.

解 (1) 函数 f 和 g 不等同.

(2) 函数 f 和 g 不等同.

(3) 函数 f 和 g 等同.

7. (1) 设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$,求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$，求 $f(x)$.

解 (1) 令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，代入等式，得到

$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97.$

所以 $f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$.

(2) 令 $\dfrac{x}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t}{t-1}$，代入等式，得到

$$f(t)=\frac{\dfrac{3t}{t-1}-1}{\dfrac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1},$$

所以 $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-1}$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f\circ f, f\circ f\circ f, f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式.

解
$$f\circ f(x)=\frac{x+1}{x+2};$$
$$f\circ f\circ f(x)=\frac{x+2}{2x+3};$$
$$f\circ f\circ f\circ f(x)=\frac{2x+3}{3x+5}.$$

9. 证明：定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证 显然 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数，而

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

10. 写出折线 $\overline{ABCD}$ 所表示的函数关系 $y=f(x)$ 的分段表示，其中 $A=(0,3)$，$B=(1,-1)$，$C=(3,2)$，$D=(4,0)$.

解
$$y=\begin{cases}-4x+3, & x\in[0,1],\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}, & x\in(1,3],\\ -2x+8, & x\in(3,4].\end{cases}$$

11. 设 $f(x)$ 表示原教材图 1.2.8 中阴影部分面积，写出函数 $y=f(x)$，$x\in[0,2]$ 的表达式.

解

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\in[0,1],\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1, & x\in(1,2].\end{cases}$$

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，密度分别为 13.6 g/cm^3，1 g/cm^3，0.8 g/cm^3(原教材图 1.2.9)，上层煤油液体高度为 5 cm，中层水液体高度为 4 cm，下层汞液体高度为 2 cm，试求压强 P 与液体深度 x 之间的函数关系.

解 取重力加速度 $g=980\ \text{cm/s}^2$，

$$P(x)=\begin{cases}784x, & x\in[0,5],\\ 980x-980, & x\in(5,9],\\ 13\,328x-112\,112, & x\in(9,11].\end{cases}$$

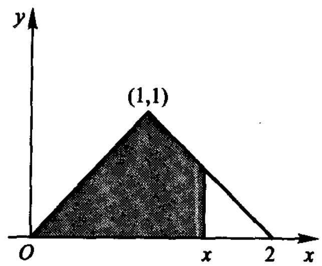

图 1.2.8

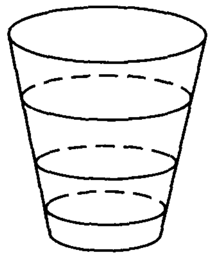
图 1.2.9

13. 试求定义在[0,1]上的函数，它是[0,1]与[0,1]之间的一一对应，但在[0,1]的任一子区间上都不是单调函数.

解

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 1-x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

第二章　数列极限

§1　实数系的连续性

1. (1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数？

证　(1) 反证法.若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\frac{m}{n}$.由 $m^2=6n^2$，可知 m 是偶数，设 $m=2k$，于是有 $3n^2=2k^2$，从而得到 n 是偶数，这与$\frac{m}{n}$是既约分数矛盾.

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数.若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，于是 $3+2\sqrt{6}+2=\frac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\frac{m^2}{2n^2}-\frac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与(1)的结论矛盾.

2. 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

$$A=\{x \mid x\geqslant 0\};$$

$$B=\left\{\sin x \,\middle|\, 0<x<\frac{2\pi}{3}\right\};$$

$$C=\left\{\frac{n}{m} \,\middle|\, m,n\in \mathbf{N}_+\text{ 并且 } n<m\right\}.$$

解　$\min A=0$；因为 $\forall x\in A$，有 $x+1\in A$，$x+1>x$，所以 $\max A$ 不存在.

$\max B=\sin\frac{\pi}{2}=1$；因为 $\forall \alpha\in B$，$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $\alpha=\sin x$，于是有 $\sin\frac{x}{2}\in B$，$\sin\frac{x}{2}<\sin x=\alpha$，所以 $\min B$ 不存在.

$\max C$ 与 $\min C$ 都不存在，因为 $\forall \frac{n}{m}\in C$，有$\frac{n}{m+1}\in C$，$\frac{n+1}{m+1}\in C$，$\frac{n}{m+1}<\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$，所以 $\max C$ 与 $\min C$ 都不存在.

3. A,B 是两个有界集，证明：

(1) $A\cup B$ 是有界集；

(2) $S=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$也是有界集.

证 (1) 设$\forall x\in A$,有$|x|\leqslant M_1$,$\forall y\in B$,有$|y|\leqslant M_2$,则$\forall z\in A\cup B$,有$|z|\leqslant\max\{M_1,M_2\}$.

(2) 设$\forall x\in A$,有$|x|\leqslant M_1$,$\forall y\in B$,有$|y|\leqslant M_2$,则$\forall z=x+y\in S$,有$|z|=|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant M_1+M_2$.

4. 设数集 S 有上界,则数集 $T=\{x\mid -x\in S\}$有下界,且 $\sup S=-\inf T$.

证 设数集 S 的上确界为 $\sup S$,则对$\forall x\in T=\{x\mid -x\in S\}$,有$-x\leqslant\sup S$,即 $x\geqslant-\sup S$;同时对$\forall\varepsilon>0$,存在 $y\in S$,使得 $y>\sup S-\varepsilon$,于是$-y\in T$,且$-y<-\sup S+\varepsilon$.所以$-\sup S$ 为集合 T 的下确界,即 $\inf T=-\sup S$.

5. 证明有界数集的上、下确界惟一.

证 设 $\sup S$ 既等于A,又等于 B,且 $A<B$.取 $\varepsilon=\frac{B-A}{2}>0$,因为 B 为集合 S 的上确界,所以$\exists x\in S$,使得 $x>B-\varepsilon>A$,这与 A 为集合S 的上确界矛盾,所以 $A=B$,即有界数集的上确界惟一.同理可证有界数集的下确界惟一.

6. 对任何非空数集 S,必有 $\sup S\geqslant\inf S$.当 $\sup S=\inf S$ 时,数集 S 有什么特点?

解 对于$\forall x\in S$,有 $\inf S\leqslant x\leqslant\sup S$,所以 $\sup S\geqslant\inf S$.当 $\sup S=\inf S$ 时,数集 S 是由一个实数构成的集合.

7. 证明非空有下界的数集必有下确界.

证 参考定理 2.1.1 的证明.

8. 设 $S=\{x\mid x\in\mathbf{Q}$ 并且 $x^2<3\}$,证明:

(1) S 没有最大数与最小数;

(2) S 在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界与下确界.

证 (1) $\forall\frac{q}{p}\in S$,$\frac{q}{p}>0$,则$\left(\frac{q}{p}\right)^2<3$,$\frac{q}{p}<2$.取有理数 $r>0$ 充分小,使得 $r^2+4r<3-\left(\frac{q}{p}\right)^2$,于是$\left(\frac{q}{p}+r\right)^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+\frac{2q}{p}r<\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+4r<3$,即$\frac{q}{p}+r\in S$,所以 S 没有最大数.同理可证 S 没有最小数.

(2) 反证法.设 S 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界,记 $\sup S=\frac{n}{m}$($m,n\in\mathbf{N}_+$ 且 m,n 互

质),则显然有 $0<\frac{n}{m}<2$.由于有理数平方不能等于3,所以只有两种可能:

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$,由(1)可知存在充分小的有理数 $r>0$,使得 $\left(\frac{n}{m}+r\right)^2<3$,这说明 $\frac{n}{m}+r\in S$,与 $\sup S=\frac{n}{m}$ 矛盾;

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2>3$,取有理数 $r>0$ 充分小,使得 $4r-r^2<\left(\frac{n}{m}\right)^2-3$,于是 $\left(\frac{n}{m}-r\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2n}{m}r+r^2>\left(\frac{n}{m}\right)^2-4r+r^2>3$,这说明 $\frac{n}{m}-r$ 也是 S 的上界,与 $\sup S=\frac{n}{m}$ 矛盾.所以 S 没有上确界.

同理可证 S 没有下确界.

§2 数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量:

(1) $\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}$;　　(2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$;

(3) $\left\{\frac{1}{n}+5^{-n}\right\}$;　　(4) $\left\{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$;

(5) $\left\{\frac{n^2}{3^n}\right\}$;　　(6) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$;

(7) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$;　　(8) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right\}$.

证 (1) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$0<\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|(-1)^n(0.99)^n\right|<(0.99)^{\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}}=\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<2)$,取 $N_1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N_1$ 时,成立 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N_2=\left[\log_5\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N_2$ 时,成立 $5^{-n}<\frac{\varepsilon}{2}$,

则当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,成立 $\left|\frac{1}{n}+5^{-n}\right|<\varepsilon$.

(4) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$0<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(5) 当 $n>11$ 时,有 $\frac{n^2}{3^n}=\frac{n^2}{(1+2)^n}<\frac{n^2}{2^3C_n^3}=\frac{6n}{8(n-1)(n-2)}<\frac{1}{n}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{11,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\frac{n^2}{3^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

(6) 当 $n>5$,有 $\frac{3^n}{n!}\leqslant\frac{3^5}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$. 于是 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<3)$,取 $N=5+\left[\frac{\lg\frac{\varepsilon}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\frac{3^n}{n!}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<\varepsilon$.

(7) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

(8) 首先有不等式 $0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

2. 按定义证明下述极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}=\frac{2}{3}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中 $x_n=\begin{cases}\frac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 是偶数},\\ 1-10^{-n}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$

证 (1) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2+2)}<\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon.$$