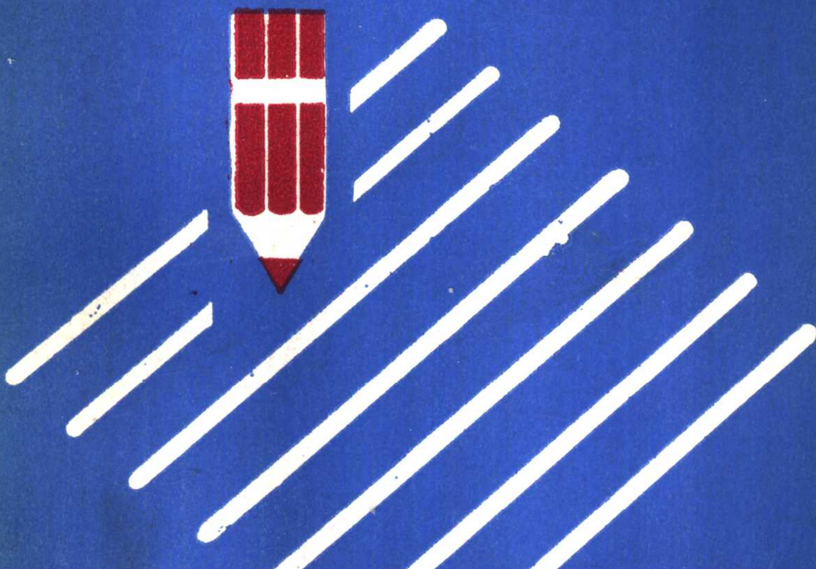
1985年

高考

数学阅卷分析与展望



辽宁教育出版社

1985年高考

数学阅卷分析与展望

魏超群　康凤岩
吴育斌　赵明立　编

辽宁教育出版社

一九八六年·沈阳

1985年高考数学阅卷分析与展望

魏超群 康凤岩 吴育斌 赵明立 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 大连印刷工业总厂印刷

字数：80.000 开本：787×1092 1/32 印张：3 3/4
印数：1—22.000
1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：王淑芬
封面设计：谭成荫 插 图：韩 梅

统一书号：7371·229 定价：0.52元

目　　录

一、概　　述

每年高考都拨动着几百万考生的心弦，引起家长和教师们的关注。考前的模拟训练和各种形式的猜磨、押题，都指望在高考试题中得以“命中”。然而，每当试题被揭晓，几乎所有抱着侥幸或乞灵于题海的人立即大失所望。即便有的学校在临模考试中显现了试题的“影子”或同种类型的训练，但反映在学生的答卷中往往是丢三忘四，收效甚微。

中国有句俗话，“冰冻三尺，非一日之寒”。从1985年高考阅卷中，我们想到了日常教学和平素学习时，应该做到扎实基础、狠抓分析，为了说清这个道理，不妨从今年高考数学试题与考生的答卷提供的信息谈起。

与以往两年一样，今年的试题题量较大，共九道大题，前八道（包括小题共19道题）计入总分，第九题只供录取时参考。试题类型有选择题、填空题、证明题、综合题、推理计算题。试题考查的主要知识有集合的概念、二次函数与三角函数的性质（增减性、奇偶性、周期性、定义域）、条件极值的求法、对数方程、不等式的解法与证明、反三角函数与简单三角方程、排列与二项式赋值法的应用、复数的三角函数式与复数的模、应用直线方程与参数方程求轨迹方程、判断极坐标方程的图象、数列、不等式、应用极限定义的证明、立方体与四面体、应用三垂线定理和直线与平面所成的角推理计算二面角的问题等。考查的数学方法有演绎法、比较法、综合法、分析法、数学归纳法、交轨法等。整份试题

内容覆盖面较大，分布较广，起点不高，入手不难，灵活性和综合性较强。试题要求的程度差异与计算量较大。知识分类的比例是代数56分，占总分（120分）的46.7%；解析几何28分，占总分的23.3%；三角23分，占总分的17%；立体几何10分，占总分的8.3%；微积分10分，不计入总分。

这套试题的特点之一是，比较突出地体现了一个“活”字。试题中，要求知识用的活、解题方法活。例如理工科数学第四题就是三垂线定理的灵活应用。很多考生对三垂线定理的内容是了解的，但掌握得“死”，只注意了点和线段在平面上的射影，而忽视了可以无限延长的直线在无限伸展的平面上的射影，几乎有80%以上的考生都失利在“直线上线段的射影落在直线的射影之外。”

第二题的(5)小题，也充分地体现了一个“活”字，它是利用函数f(x)的定义域求函数$f(x^2)$的定义域。实质是解不等式$0<x^2<1$，即解不等式$|x|<1$。试题这样变式处理后，相当多数的考生不适应，白白地丢掉了4分。

一道普通的无理不等式却“难”倒了数以万计的考生。实际上，教材中出现了$\sqrt{f(x)}<g(x)$ （f(x)、g(x)分别表示两个一次多项式）类型，试题将它变为$\sqrt{f(x)}>g(x)$类型后，至使80%以上的考生很不适应。他们死板地套用教材题型使用的将不等式两端平方去根号的方法，造成此类不等式解法上的严重错误。可以设想，倘若十分醒目地指出$g(x)>0$或$g(x)<0$，那么，出错率就会显著地下降。这种估计不是没有道理的，因为通过阅卷表明，考生惯于直接套用数学方法，对于题中隐含条件的分析力实在薄弱。

这套试题的特点之二是，十分注意考查能力。选择题考查学生的观察能力、判断能力和空间想象能力；填空题考查

学生准确、迅速的运算能力；其它五道大题考查学生分析问题与解决问题的能力，它把逻辑推理、数式运算、综合分析柔合在一起，看学生的辨析力。从阅卷拾错中得到反馈信息表明，大部分学生这些基本能力显得十分欠缺，他们不会讨论问题，书写不规范，推理不严谨；他们缺乏数学运算和恒等变形的训练，运算不合理，计算速度慢。有这样的一个考生，从第四题到第八题每题的基本思路正确，运用的方法也合理，然而，由于缺乏前面所涉及的基本能力，没有一道题得出正确的结果。

与上述情况恰恰相反的是，大约有25%的考生由于具有较高的分析能力、运算能力、推理论证能力、空间想象能力和综合能力，虽然在暂短的限定时间内，通过周密的推理和迅速而准确的运算，完整地回答了综合性较强的几道大题。阅卷中发现，第三大题中第二小题和第五、六两题，竟有七、八种解法，有的解法充分发挥了自己的创造能力，很有独道见解。比如，用函数观点解无理不等式。

这套试题的特点之三是，重视考查基础知识。从试题上看，考查的基本概念有27个，重要公式16个；定理、性质、法则10个；涉及的数学方法8种。可以说，今年的高考数学试题，体现了“抓基础、出活题，考能力，摆脱题海”的思想。值得注意的是这十三个字不仅是今后高考的方向，也是今后教学和学习的方向。

下面，我们把阅卷中发现各题的好的解法以及各种类型的错误，逐题分析，以供师生们吸取经验、总结教训，脱离题海，寓总复习于日常教学中去，这正是我们对1985年高考数学试卷分析的目的所在。

本书共分三部分，以上是第一部分概述。第二部分详

述，我们将对每一道考题进行全面分析：包括此题考查的目的；考生的多种解法（证法或算法）；试卷中出现几类错误；分析错因，并在错中悟理，为改革教学方法与学习方法提供参考资料；最后在偶得里，进行有针对性的论述，它侧重在数学方法论上多添笔墨，为学生灵活、准确地掌握基本的数学方法补偏救弊。第三部分附录，给出1985年高考文史类数学试题和标准答案。在阅卷分析中，还选编了一些加强基础、培养能力、有一定灵活性的练习题，供教学与复习时参考。

由于本书亟待与读者见面，编写时间仓促，阅卷不尽周全，愿读者多提宝贵意见。

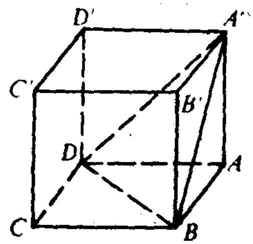
二、详　述（理工农医类试题）

第　一　题（满分15分）

本题共有 5 个小题，每个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的，把正确结论的代号写在题后的圆括号内。选对得 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分。

第 1 小题

【题目】 如果正方体 ABCD—A'B'C'D' 的棱长为 a，那么四面体 A'—ABD 的体积是 (A) $\frac{a^3}{2}$。(B) $\frac{a^3}{3}$。(C) $\frac{a^3}{4}$。(D) $\frac{a^3}{6}$。



图一

【目的】 本题考查

1. 主要知识：正方体的概念和性质，直三棱锥体积的求法。

2. 基本能力：简单的计算能力和空间想象能力。

【选解】

解法 1 （直接计算法）

思路：根据正方体的性质和棱长为 a 的已知条件，直接计算四面体 A'—ABD 的体积。

略解：如图一，∵ AB、AD、AA' 两两垂直且其长皆为

a，$\therefore V_{A'-ABD}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}AB\cdot AD)\cdot AA'=\frac{a^3}{6}$。故本题答案是(D)。

解法 2 (体积比较法)

思路：连接 $B'D'$ 后，考查四面体 $A'—ABD$、三棱柱 $A'B'D'—ABD$、正方体 $A'B'C'D'—ABCD$ 三者体积之间的关系，从而得出正确解答。

略解：$V_{A'-ABD}=\frac{1}{3}V_{A'B'D'-ABD}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}V_{A'B'C'D'-ABCD})=\frac{a^3}{6}$。故本题答案是(D)。

注意：本解法关键是掌握：如果一个棱锥和一个棱柱同底同高（或等底等高），那么锥体体积是柱体体积的$\frac{1}{3}$；两个等高柱体的体积之比等于底面积之比。

【拾错】

错例 1 $V_{A'-ABD}=\frac{a^3}{3}$，答(B)。

浅析：由于锥体体积公式 $V_{锥}=\frac{1}{3}sh$中分数是$\frac{1}{3}$，从而误认为本题中四面体体积为$\frac{a^3}{3}$。这里忽略了底面积 $S=\frac{1}{2}a^2$ 的系数$\frac{1}{2}$。

错例 2 $V_{A'-ABD}=\frac{a^3}{4}$。答(C)。

浅析：此种错误的原因是没有认真计算四面体 $A'—ABD$的体积。认为截面$A'BD$将给定正方体割去一角，故四

面体 A′—ABD 的体积是正方体体积的$\frac{1}{4}$，即$\frac{a^3}{4}$。这种凭直观而下结论是毫无根据的。

第 2 小题

【题目】 $tgx=1$ 是 $x=\frac{5}{4}\pi$的

(A) 必要条件。(B) 充分条件。(C) 充分必要条件。(D) 既不充分又不必要条件。

【目的】 本题考查

1. 主要知识：必要条件，充分条件，充要条件的概念。

2. 基本能力：简单的判断，推理能力。

【选解】

思路：根据必要条件、充分条件、充要条件的概念，判断由 $tgx=1$ 能否推出$x=\frac{5}{4}\pi$；再判断由 $x=\frac{5}{4}\pi$ 能否推出 $tgx=1$，然后推选正确的答案。

解法：$\because tg\frac{5}{4}\pi=1$，$\therefore$若 $x=\frac{5}{4}\pi$成立，则 $tgx=1$ 必成立。即 $x=\frac{5}{4}\pi \Longrightarrow tgx=1$。

另一方面，若 $tgx=1$ 成立，则$x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in z)$，$x=\frac{5}{4}\pi$ 不一定成立，即 $tgx=1 \not\Longrightarrow x=\frac{5}{4}\pi$。$\therefore$ $tgx=1$ 是 $x=\frac{4}{5}\pi$ 的必要条件，正确答案是(A)。

【拾错】

错例 1　$tgx=1$ 是 $x=\frac{5}{4}\pi$的充分条件。答(B)。

浅析：错误原因是混淆了必要条件和充分条件的概念。

注意：若$A\Longrightarrow B$,则B是A的必要条件；而A是B的充分条件。对于本题有 $x=\frac{5}{4}\pi\Longrightarrow tgx=1$，故有$tgx=1$是$x=\frac{5}{4}\pi$ 的必要条件；而 $x=\frac{5}{4}\pi$是$tgx=1$的充分条件。答成：$tgx=1$ 是 $x=\frac{5}{4}\pi$ 的充分条件是错误的。

错例 2　$tgx=1$ 是 $x=\frac{5}{4}\pi$ 的充要条件。答(C)。

浅析：判断、推理错误。

当 $tgx=1$ 成立时，$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in z)$ 即此时 x 可以等于$\frac{5}{4}\pi$，也可以不等于$\frac{5}{4}\pi$ （等于$\frac{\pi}{4}+kx, k\neq 1, k\in z$）。这就是说“x 必等于$\frac{5}{4}\pi$”不成立。∴ $tgx=1\not\Longrightarrow x=\frac{5}{4}\pi$。

即 $tgx=1$ 只能是$x=\frac{5}{4}\pi$ 的必要条件而不是充要条件。

注意：在定义“若$A\Longrightarrow B$,则B是A的必要条件”中，$A\Longrightarrow B$是指当A成立时，B必定成立,即“$A\Longrightarrow B$是一个真命题”。如果当A成立时，B可以成立，也可以不成立（即B不一定成立），这时应理解为$A\Longrightarrow B$。

第 3 小题

【题目】 在下面给出的函数中，哪一个函数既是区间$(0, \frac{\pi}{2})$上的增函数，又是以 π 为周期的偶函数?

(A) $y=x^2(x\in R)$。　(B) $y=|\sin x|\ (x\in R)$。
(C) $y=\cos 2x(x\in R)$。 (D) $y=e^{\sin^2 x}(x\in R)$。

【目的】本题考查

1. 主要知识：增函数、周期函数、偶函数的概念。
2. 基本能力：简单的判断、分析、推理的能力。

【选解】

解法 1 （直接挑选法）

思路：从给定四个函数中，直接选出满足以下三个条件的函数：（1）在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，（2）以$\pi$为周期的周期函数，（4）偶函数。

略解：函数 $y=|\sin x|$ 满足（1）和（3）是显然的。又对于任意的$x(x\in R)$，等式：$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$恒成立。这说明函数$y=|\sin x|$也满足条件（2）。所以正确的答案是（B）。

注意：如果画出函数 $y=|\sin x|$ 的图象（略）更容易判断出函数 $y=|\sin x|$ 满足题目的三条要求。

解法 2 （筛选法）

思路：把不满足题意要求的三条件的函数筛选掉，剩下最后一个函数必合乎要求。

略解：∵函数 $y=x^2(x\in R)$不是周期函数，故它不满足条件（2）；函数 $y=\cos 2x(x\in R)$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$不是增函数，故它不满足条件（1）；函数 $y=e^{\sin^2 x}(x\in R)$ 不是偶函数，故它不满足条件（3），∴以上三个函数均不合要求，从而本题正确答案是（B）。

【拾错】

错例1　答(D)。

浅析：错误原因是对函数 $y=e^{\sin 2x}$ 的奇偶性认识不清。

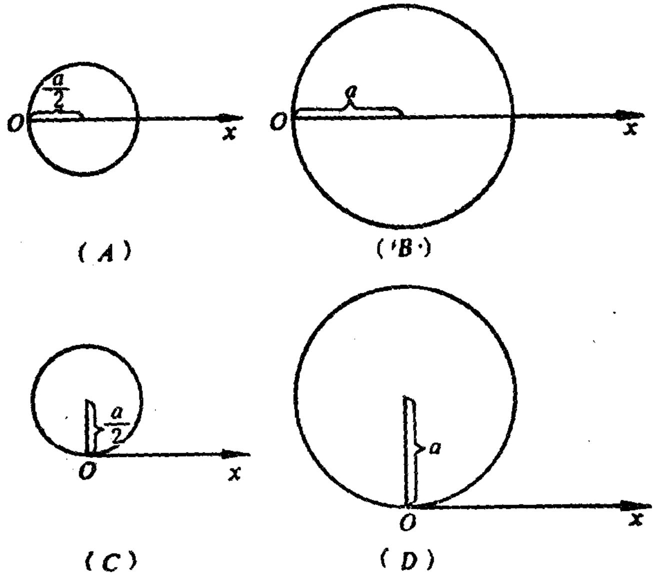
$\because e^{\sin(-2x)}=e^{-\sin 2x}=\dfrac{1}{e^{\sin 2x}}$，它既不恒等于 $e^{\sin 2x}$，也不恒等于 $-e^{\sin 2x}$，$\therefore$ 函数 $y=e^{\sin 2x}$ 是非奇非偶函数。

错例2　答(B)。

浅析：错误原因是对函数 $y=\cos 2x$ 的增减性认识不清。此函数在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数而不是增函数。

第4小题

【题目】 极坐标方程 $\rho=a\sin\theta(a>0)$ 的图象是



图二

【目的】本题考查

1. 主要知识：简单极坐标方程的性质。

2. 基本能力：简单的分析能力和识图绘图能力。

3. 基本方法：绘制图象的描点法；极坐标与直角坐标的转化方法。

【选解】

解法 1

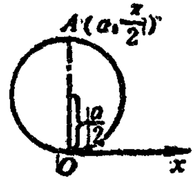
思路：将极坐标方程 $\rho=a\sin\theta(a>0)$ 转化成直角坐标方程，从而判断其图象是哪一个。

略解：原方程两边同乘以ρ得：$\rho^2=a\rho\sin\theta$。$\because \rho^2=x^2+y^2, \rho\sin\theta=y$，$\therefore$原方程化为 $x^2+y^2=ay$，即 $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$。它是以点$\left(0,\frac{a}{2}\right)$为圆心、以$\frac{a}{2}$为半径的圆，所以本题解答应是(C)。

解法 2 赋值法（验证法）

思路：给 θ 一特殊值 θ_0，求出对应的 ρ 值 ρ_0，判断点(ρ_0,θ_0)在哪条曲线上，从而确定解答。

略解：令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，代入方程 $\rho=a\sin\theta$ 中，得$\rho=a$，显然点$\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$只在图三曲线上，即A点位置。点$\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$都不在其他三条曲线上，所以本题正确答案是(C)。



图三

【拾错】

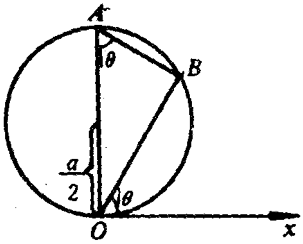
错例 1 答(D)。

浅析：错误原因是把圆 $\rho=a\sin\theta$ 的半径误认为 a。

错例2　答(A)。

浅析：错误原因是混淆了圆 $\rho=a\sin\theta$ 和 $\rho=a\cos\theta$ 的位置。

注意：不应死记硬背方程 $\rho=a\sin\theta$ 和 $\rho=a\cos\theta$ 表示的两圆位置在哪？半径多少？而应掌握迅速建立圆的极坐标方程的方法。如建立如图四所示的圆的极坐标方程：设B是圆上任意一点，$B(\rho,\theta)$，则 $\angle A=\angle\theta$，$\therefore A\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$。$\sin A=\sin\theta=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{\rho}{a}$，$\therefore \rho=a\sin\theta$。



图四

第5小题

【题目】 用1,2,3,4,5这五个数字，可以组成比20000大，并且百位数不是数字3的没有重复数字的五位数共有：

(A) 96个　(B) 78个　(C) 72个　(D) 64个

【目的】 本题考查

1. 主要知识：排列的概念及排列数公式。

2. 基本能力：全面分析思考问题的能力和解决问题的能力。

【选解】

解法1

思路：根据题目要求，先计算出总的排列数，再减掉其中不合要求的排列数。注意不重不漏，从而挑选正确答案。

略解：五个数字组成无重复数字的五位数，共有P_5^5个；其中数字1做万位数字的五位数不合要求，有P_4^4个；数字3

做百位数字的五位数不合要求，也有P_4^4。而1做万位数且3做百位数的五位数共有P_3^3不能减重复。故所求排列数为：$P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78$（个），答(B)。

解法2

思路：把所求排列分成两类：第一类2,4,5做万位数；第二类3做万位数。分别计算排列数再相加，这样可以防漏，防重。

略解：2、4、5做万位数且3不做百位数的无重复数字的五位数共有$C_3^1(P_4^4-P_3^3)$；3做万位数的无重复数字的五位数共有P_4^4，∴所求排列数共有$C_3^1(P_4^4-P_3^3)+P_4^4=78$(个)。答案为(B)。

【拾错】

错例1　答(C)。

浅析：错误原因是数码1做万位数且3做百位数字的五位数不合要求，减去了两次，减重复了，其错误计算公式为$P_5^5-2P_4^4=72$。

错例2　答(D)。

浅析：错误原因是错用乘法原理，错误的计算公式是$4\times4\times2\times2\times1=64$(个)，其思路是：做万位数有4种可能，做千位数有4种可能，做百位数有2种可能，做十位数有2种可能，做个位数有1种可能（按万、千、百、十、个位数字顺序按排考虑）。这里百位数有2种可能是错误的。

【偶得】

近几年在各类考试题目中选择题日益被广泛采用。选择题区别于其它形式的试题的特点是：针对考生知识上的漏洞，抓住易错易混的概念、法则，巧妙构思出正误并举的现成答案，要求考生迅速判断，明辨是非，去伪存真。