

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（一）

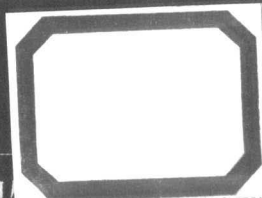
# 微 积 分

（经济类与管理类）

周誓达 编著



 中国人民大学出版社



大学本科经济应用数学基础精品教材系列

经济应用数学基础（一）

# 微 积 分

（经济类与管理类）

周誓达 编著

 中国人民大学出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分(经济类与管理类) /周暂达编著.  
北京:中国人民大学出版社, 2005  
大学本科经济应用数学基础特色教材系列  
经济应用数学基础(一)  
ISBN 7-300-06441-8

- I. 微…
- II. 周…
- III. 微积分-高等学校-教材
- IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 032972 号

大学本科经济应用数学基础特色教材系列  
经济应用数学基础(一)

### 微积分

(经济类与管理类)

周暂达 编著

---

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511239 (出版部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a>		
	<a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		
开 本	787×965 毫米 1/16	版 次	2005 年 5 月第 1 版
印 张	23	印 次	2005 年 5 月第 1 次印刷
字 数	405 000	定 价	28.00 元

---

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换



## 前 言

大学本科经济应用数学基础特色教材系列是为大学本科经济类与管理类各专业编著的教材与辅导书,包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》及《微积分学习指导》、《线性代数与线性规划学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》。这是一套特色鲜明的教材系列,其特色是:密切结合经济工作的需要,充分注意逻辑思维的规律,突出重点,说理透彻,循序渐进,通俗易懂。

经济应用数学基础(一)《微积分》共分七章,介绍了经济工作所需要的一元微积分、二元微积分及无穷级数、一阶微分方程,书首列有预备知识初等数学小结。本书着重讲解基本概念、基本理论及基本方法,培养学生的熟练运算能力及解决实际问题的能力。

经济类与管理类毕竟不是数学系。本着“打好基础,够用为度”的原则,本书去掉了对于经济工作并不急需的某些内容与某些定理的严格证明,而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容,讲得流畅,讲得透彻,实现“在战术上以多胜少”的策略。本书不求深,不求全,只求实用,重视在经济上的应用,注意与专业课接轨,体现“有所为,必须有所不为”。

基础课毕竟不是专业课。本着“服务专业,兼顾数学体系”的原则,本书不盲目攀比难度,做到难易适当,深入浅出,举一反三,融会贯通,达到“跳一跳就

能够着苹果”的效果。本书在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，形象直观地说明问题，适当注意知识面的拓宽，使得“讲起来好讲，学起来好学”。

质量是教材的生命，质量是特色的反映，质量不过硬，教材就站不住脚。本书在质量上坚持高标准，不但内容正确无误，而且编排科学合理，尤其在复合函数导数运算法则的讲解上、在不定积分第一换元积分法则与分部积分法则的论述上、在二重积分计算的处理上都有许多独到之处，便于理解与掌握。衡量教材质量的一项重要标准是减少以至消灭差错，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现计算零差错。

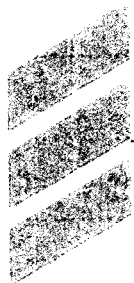
例题、习题是教材的窗口，集中展示了教学意图。本书对例题、习题给予高度重视，例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题、证明题及经济应用题外，尚有考查基本概念与基本运算技能的填空题与单项选择题。填空题要求将正确答案直接填在空白处；单项选择题是指在四项备选答案中，只有一项备选答案是正确的，要求将正确备选答案前面的字母填在括号内。书末附有全部习题答案，便于检查学习效果。

相信读者学习本书后会大有收获，并对学习微积分产生兴趣，增强学习信心，提高科学素质。记得尊敬的老舍先生关于文学创作曾经说过：写什么固然重要，怎样写尤其重要。我想这句至理名言对于编著教材同样具有指导意义。诚挚欢迎各位教师与广大读者提出宝贵意见，作者将不断改进与完善本书，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

特邀华北光学仪器厂第一科研设计所葛利达同志校对书稿、验算习题答案并绘图，谨表示衷心的感谢。

**周晋达**

2005年3月7日于北京



# 目 录

---

引 论 微积分思路.....	1
预备知识 初等数学小结.....	2
<b>第一章 函数与极限</b> .....	<b>15</b>
§ 1.1 函数定义域与函数值.....	15
§ 1.2 函数的类别与基本性质.....	20
§ 1.3 极限的概念与基本运算法则.....	24
§ 1.4 无穷大量与无穷小量.....	31
§ 1.5 未定式极限.....	35
§ 1.6 两个重要极限.....	41
§ 1.7 函数的连续性.....	47
§ 1.8 几何与经济方面函数关系式.....	52
习题一 .....	56

<b>第二章 导数与微分</b> .....	62
§ 2.1 导数的概念 .....	62
§ 2.2 导数基本运算法则 .....	68
§ 2.3 导数基本公式 .....	71
§ 2.4 复合函数导数运算法则 .....	78
§ 2.5 隐函数的导数 .....	83
§ 2.6 高阶导数 .....	88
§ 2.7 分段函数的导数 .....	93
§ 2.8 微分 .....	97
习题二 .....	102
<b>第三章 导数的应用</b> .....	108
§ 3.1 微分中值定理 .....	108
§ 3.2 洛必达法则 .....	113
§ 3.3 函数曲线的切线与法线 .....	120
§ 3.4 函数的单调区间与极值 .....	124
§ 3.5 函数的最值 .....	131
§ 3.6 函数曲线的凹向区间与拐点 .....	135
§ 3.7 经济方面函数的边际与弹性 .....	140
§ 3.8 几何与经济方面函数的优化 .....	143
习题三 .....	149
<b>第四章 不定积分</b> .....	154
§ 4.1 不定积分的概念与基本运算法则 .....	154
§ 4.2 不定积分基本公式 .....	160
§ 4.3 凑微分 .....	166
§ 4.4 不定积分第一换元积分法则 .....	170
§ 4.5 有理分式的不定积分 .....	177
§ 4.6 不定积分第二换元积分法则 .....	181
§ 4.7 不定积分分部积分法则 .....	185
§ 4.8 初值问题 .....	191
习题四 .....	194

<b>第五章 定积分</b> .....	200
§ 5.1 定积分的概念与基本运算法则 .....	200
§ 5.2 变上限定积分 .....	204
§ 5.3 牛顿-莱不尼兹公式 .....	210
§ 5.4 定积分换元积分法则 .....	216
§ 5.5 定积分分部积分法则 .....	222
§ 5.6 分段函数的定积分 .....	226
§ 5.7 广义积分 .....	229
§ 5.8 平面图形的面积 .....	235
习题五.....	242
<b>第六章 二元微积分</b> .....	247
§ 6.1 二元函数的概念 .....	247
§ 6.2 二元函数的一阶偏导数 .....	251
§ 6.3 二元函数的二阶偏导数 .....	256
§ 6.4 二元函数的全微分 .....	260
§ 6.5 二元函数的极值 .....	264
§ 6.6 二次积分 .....	269
§ 6.7 二重积分的概念与基本运算法则 .....	276
§ 6.8 二重积分的计算 .....	280
习题六.....	288
<b>第七章 无穷级数与一阶微分方程</b> .....	293
§ 7.1 无穷级数的概念与基本运算法则 .....	293
§ 7.2 正项级数 .....	300
§ 7.3 交错级数 .....	307
§ 7.4 幂级数 .....	312
§ 7.5 函数的幂级数展开 .....	318
§ 7.6 微分方程的概念 .....	323
§ 7.7 一阶可分离变量微分方程 .....	325
§ 7.8 一阶线性微分方程 .....	330
习题七.....	335
<b>习题答案</b> .....	340



# 引 论

## 微积分思路

经济类与管理类高等数学是研究经济领域内数量关系与优化规律的科学,微积分是高等数学的基础.

微积分研究的对象是函数,主要是初等函数,研究的主要工具是极限.


微积分中最重要的基本概念是导数、微分、不定积分及定积分,最重要的基本运算是求导数与求不定积分.

应用微积分解决经济方面函数的数量关系与优化问题,是微积分的重要内容.

作为一元微积分的延续,二元微积分在经济领域内有着广泛的应用.

作为微积分的发展,无穷级数与一阶微分方程是经济领域研究工作的有力数学工具.

微积分的精髓在于:在变化中考察各量之间的关系.可以说,没有变化就没有微积分.因此,必须以变化的观点学习微积分.



## 预备知识

### 初等数学小结

毫无疑问,微积分是以初等数学作为基础的.但是,微积分中所用到的初等数学知识不是全部,仅仅是其中一部分.在这部分初等数学知识中,有一些是必须熟练掌握的,有一些只要了解就可以了.

学习微积分必须熟练掌握下列初等数学知识:

#### 1. 数集与区间

全体实数与数轴上的全体点一一对应,因此不严格区别数与点:实数  $x$  代表数轴上点  $x$ ,数轴上点  $x$  也代表实数  $x$ .

在数集之间的关系中,最重要的有三种:

##### (1) 包含关系

若数集  $B$  的每一个元素都是数集  $A$  的元素,则称数集  $A$  包含  $B$ ,记作  $A \supset B$  或  $B \subset A$ .

##### (2) 相等关系

若数集  $A$  的元素与数集  $B$  的元素完全相同,则称数集  $A$  与  $B$  相等,记作  $A = B$ .

##### (3) 分离关系

若数集  $A$  与  $B$  没有公共元素,则称数集  $A$  与  $B$  分离.

数集之间的运算共有四种:

(1) 并集

数集  $A$  与  $B$  的所有元素构成的数集称为数集  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ .

(2) 交集

数集  $A$  与  $B$  的所有公共元素构成的数集称为数集  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ .

(3) 差集

属于数集  $A$  且不属于数集  $B$  的所有元素构成的数集称为数集  $A$  与  $B$  的差集, 记作  $A - B$ .

(4) 补集

在规定全集  $\Omega \supset A$  的条件下, 全集  $\Omega$  中不属于数集  $A$  的所有元素构成的数集称为数集  $A$  的补集, 记作  $\bar{A}$ .

在表示数值范围时, 经常采用区间记号. 已知数  $a$  与  $b$ , 且  $a < b$ , 则开区间

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

闭区间

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

半开区间

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

上述三类区间是有限区间, 点  $a$  称为左端点, 点  $b$  称为右端点, 统称为端点, 它们之间的距离  $b - a$  称为区间长度.

除上述有限区间外, 还有无限区间:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

## 2. 幂

数学表达式  $a^b$  称为幂, 其中  $a$  称为底,  $b$  称为指数. 当指数取值为有理数时, 相应幂的表达式表示为

$$a^n = \underbrace{a a \cdots a}_{n \text{ 个}} \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (m, n \text{ 为互质正整数, 且 } n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \quad (m, n \text{ 为互质正整数, 且 } n > 1)$$

幂的运算法则为

$$(1) a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1 + b_2}$$

$$(2) \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1 - b_2}$$

$$(3) (a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$$

$$(4) (a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b$$

$$(5) \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}$$

### 3. 函数的概念

**定义 0.1** 已知变量  $x$  与  $y$ , 当变量  $x$  在某个非空实数集合  $D$  内任取一个实数值时, 若变量  $y$  符合对应规则  $f$  的取值恒为惟一确定的实数值与之对应, 则称对应规则  $f$  表示变量  $y$  为  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x)$$

其中变量  $x$  称为自变量, 自变量  $x$  的取值范围  $D$  称为函数定义域; 函数  $y$  也称为因变量, 函数  $y$  的取值范围称为值域, 记作  $G$ ; 对应规则  $f$  也称为对应关系或函数关系.

若函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 又区间  $I \subset D$ , 则称函数  $f(x)$  在定义域  $D$  或区间  $I$  上有定义.

考虑对应规则  $y^2 = x$ , 无论变量  $x$  取任何正实数, 变量  $y$  恒有两个实数值与之对应, 因此对应规则  $y^2 = x$  不表示变量  $y$  为  $x$  的函数, 但是可以限制变量  $y$  的取值范围为  $y \leq 0$  或  $y \geq 0$ , 而使得对应规则  $y^2 = x (y \leq 0)$  与  $y^2 = x (y \geq 0)$  分别表示变量  $y$  为  $x$  的函数, 即对应规则  $y = -\sqrt{x}$  与  $y = \sqrt{x}$  分别表示变量  $y$  为  $x$  的函数, 于是在这种意义下, 可以认为对应规则  $y^2 = x$  分别代表函数  $y = -\sqrt{x}$  与  $y = \sqrt{x}$ .

函数关系的表示方法有公式法、列表法及图形法, 在应用公式法表示函数关系时, 函数表达式主要有显函数  $y = f(x)$  与隐函数即由方程式  $F(x, y) = 0$  确定变量  $y$  为  $x$  的函数.

**定义 0.2** 已知函数  $y = f(x)$ , 从表达式  $y = f(x)$  出发, 经过代数恒等变形, 将变量  $x$  表示为  $y$  的表达式, 若这个对应规则表示变量  $x$  为  $y$  的函数, 则称它为函

数  $y = f(x)$  的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

如果函数  $y = f(x)$  存在反函数  $x = f^{-1}(y)$ , 则函数  $x = f^{-1}(y)$  也存在反函数  $y = f(x)$ , 因此函数  $y = f(x)$  与  $x = f^{-1}(y)$  互为反函数.

由于习惯用变量记号  $x$  表示自变量、用变量记号  $y$  表示函数, 因此在反函数  $x = f^{-1}(y)$  的表达式中, 再将变量记号  $x$  改写为  $y$ , 变量记号  $y$  改写为  $x$ , 得到函数表达式  $y = f^{-1}(x)$ , 于是也称函数  $y = f^{-1}(x)$  为函数  $y = f(x)$  的反函数.

**定义 0.3** 已知函数  $y = f(u)$  的定义域为  $U_1$ , 函数  $u = u(x)$  的值域为  $U_2$ . 若交集  $U_1 \cap U_2$  非空集, 则称变量  $y$  为  $x$  的复合函数, 记作

$$y = f(u(x))$$

其中变量  $x$  称为自变量, 变量  $u$  称为中间变量, 复合函数  $y$  也称为因变量.

只有一个自变量的函数称为一元函数, 有两个自变量的函数称为二元函数.

#### 4. 幂函数

在幂的表达式中, 若底为变量  $x$  而指数为常数  $\alpha$ , 则称函数  $y = x^\alpha$  为幂函数.

**例 1**  $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{1}{x^{10}} = x^{-10}$$

**例 2**  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

**例 3**  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

函数  $y = x$ ,  $y = x^2$  及  $y = \sqrt{x}$  的图形如图 0-1, 函数  $y = x^3$  与  $y = \frac{1}{x}$  的图形如图 0-2.

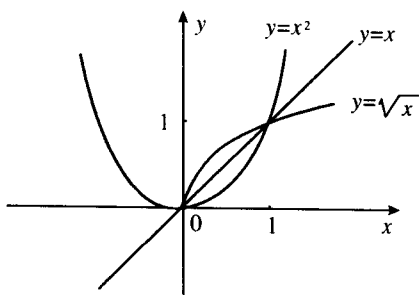


图 0-1

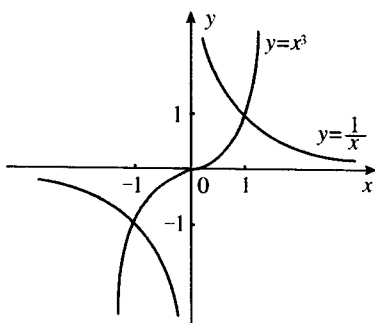


图 0-2

### 5. 指数函数

在幂的表达式中,若底为常数  $a(a > 0, a \neq 1)$  而指数为变量  $x$ ,则称函数  $y = a^x$  为指数函数.

例 4  $2^x 2^{-x} = 2^0 = 1$

$$a^{2x} = a^x a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$2^x 3^x = 6^x$$

函数  $y = a^x (a > 1)$  的图形如图 0-3.

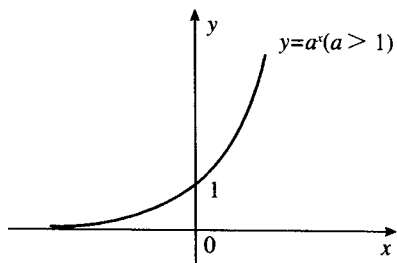


图 0-3

### 6. 对数函数

若  $a^y = x (a > 0, a \neq 1)$ , 则将  $y$  表示为  $\log_a x$ , 称函数  $y = \log_a x$  为对数函数, 其中  $a$  称为底,  $x$  称为真数,  $y$  称为对数. 指数式  $a^y = x$  与对数式  $\log_a x = y$  是表示  $a, x, y$  三者同一关系的不同表示方法, 这两种形式可以互相转化. 有关系式

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

当真数取值等于 1 或底时, 相应对数值

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

对数的运算法则为

$$(1) \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$(2) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$(3) \log_a x^a = a \log_a x$$

以 10 为底的对数称为常用对数,  $x$  的常用对数记作  $\lg x$ , 即

$$\lg x = \log_{10} x$$

根据对数函数与指数函数的关系, 对数函数  $y = \log_a x$  的反函数为指数函数  $x = a^y (a > 0, a \neq 1)$ .

**例 5**  $\log_a 10a = \log_a 10 + \log_a a = \log_a 10 + 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$

$$\log_a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \log_a (x^2 - 1) - \log_a (x^2 + 1) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

函数  $y = \log_a x (a > 1)$  的图形如图 0-4.

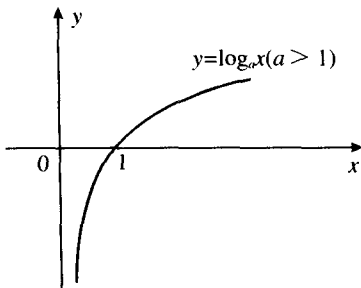


图 0-4

### 7. 三角函数

以弧度作为度量角的单位时, “弧度”二字经常省略不写, 弧度与度的换算关

系为： $\pi$  弧度 =  $180^\circ$ ，从而得到： $0$  弧度 =  $0^\circ$ ， $\frac{\pi}{6}$  弧度 =  $30^\circ$ ， $\frac{\pi}{4}$  弧度 =  $45^\circ$ ， $\frac{\pi}{3}$  弧度 =  $60^\circ$ ， $\frac{\pi}{2}$  弧度 =  $90^\circ$ 。角  $x$  的正弦、余弦、正切、余切、正割及余割函数统称为三角函数，分别表示为  $y = \sin x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \tan x$ ， $y = \cot x$ ， $y = \sec x$  及  $y = \csc x$ 。特别当角  $x$  为锐角时，其三角函数可以用直角三角形有关两条边的比值表示。如图 0—5，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，设锐角  $x$  的对边为  $a$ ，邻边为  $b$ ，斜边为  $c$ ，当然斜边  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，则有

$$\sin x = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan x = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot x = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec x = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc x = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}} = \frac{c}{a}$$

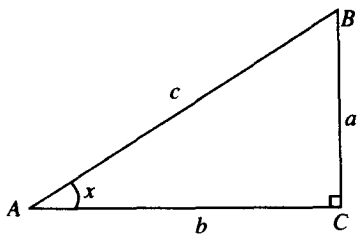


图 0—5

同角三角函数恒等关系式为

$$(1) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(2) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(3) \tan x \cot x = 1$$

$$(4) \sec x = \frac{1}{\cos x}$$



$$(5) \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(7) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(8) 1 + \cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x$$

异角三角函数恒等关系式为

$$(1) \sin(-x) = -\sin x$$

$$(2) \cos(-x) = \cos x$$

$$(3) \tan(-x) = -\tan x$$

$$(4) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

特殊角的正弦、余弦及正切函数值如表 0-1:

表 0-1

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0

**例 6**  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x - 1$$

函数  $y = \sin x$  的图形如图 0-6.

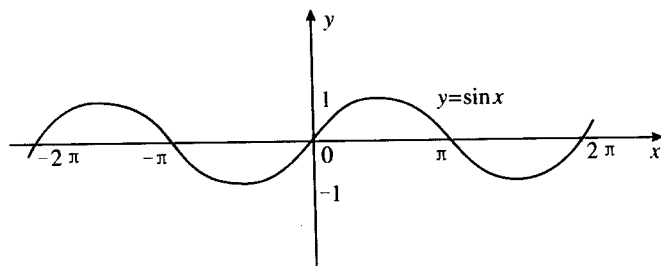


图 0-6