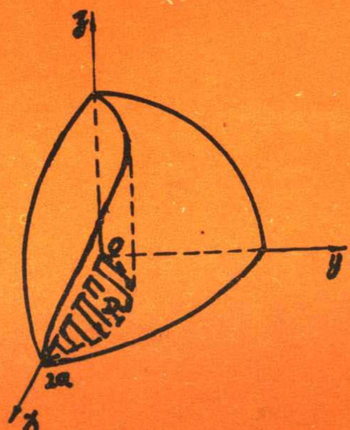
《高等数学》
学习指导书

张永曙　主编



西北工业大学出版社

(陕)新登字 009 号

《高等数学》学习指导书
张永曙　主编
责任编辑　郑永安
责任校对　享　邑
*

(710072　西安市友谊西路 127 号　电话 4253407)
陕西省新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0725-5/O・96
*
开本 850×1168 毫米　1/32　印张：8　字数：195 千字
1994 年 8 月第 1 版　　1994 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—8 000 册　　定价：5.00 元

前　　言

《〈高等数学〉学习指导书》是按照《高等数学》(上、下册)教材的章节顺序编写的，是配合各类高等工程专科学生学习高等数学课程的辅助书。目的是帮助大专学生在学习高等数学这门课程时，如何进一步正确理解高等数学中的各个基本概念，掌握高等数学的基本理论和基本方法。本书在内容结构、难点释疑、解题方法小结、例题选取等方面都尽量适应大专学生的特点。本书可作为各类高等工程大专学生学习高等数学的指导书，也可供参加自学考试和报考专科升本科的考生学习参考。

本书各章由以下三部分组成：

一、基本要求

“基本要求”规定了学习每一章所必须达到的最低要求。

二、学习指导

对各章的基本概念、基本理论和基本方法及重点和难点内容作了进一步的阐述和说明。

三、解题方法小结与例题分析

对各章的习题进行分类小结，并通过典型例题的分析，阐述各类习题的解题方法。

本书各章依次由西北工业大学张永曙(第一、二、三章)、武汉水利电力大学袁美月(第四、五、六章)、西安理工大学刘有炳(第七章)、重庆大学戴一明(第八、九、十章)、同济大学刘浩荣(第十一、十二章)、成都理工学院惠永琴(第十三、十四章)、西北工业大学倚朝晖(第十五、十六、十七章)、武汉交通科技大学苏金熙(第十八、十九章)、长沙铁道学院徐敏(第二十、二十一、二十二章)等编写，

由张永曙任主编，负责全书的修改与统稿工作。

由于我们水平有限，加之编写时间较仓促，错误和不妥之处在所难免，诚望读者批评指正。

编　者

1994年4月

目 录

第一篇　微积学引论

第一章　函　　数

一、基本要求

1. 了解区间和邻域的概念.

2. 理解函数的概念. 会求函数的定义域. 了解函数记号 $f(x)$ 的意义并能运用. 知道分段函数.

3. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性. 会判断给定函数的奇偶性.

4. 了解反函数与复合函数的概念，会将一个复合函数分解为若干个简单函数的复合.

5. 熟悉基本初等函数的性质和图形.

6. 会建立简单实际问题中的函数关系.

二、学习指导

§1.2　函数概念及函数的表示法

1. 函数是数学中最重要的概念之一，是高等数学主要的研究

对象，它反映了自然界和生产过程中各种变量之间的相互依从关系.

在函数的定义中，定义域和对应法则是函数概念的两个要素，二者缺一不可. 当我们给定一个函数时，除了要给出它的对应法则外，还必须指明它的定义域. 两个函数只有它们的对应法则和定义域分别相同时才是相同的. 例如，函数 $f(x) = (x^4 + x)/(x^3 + 1)$ 与 $g(x) = x$ 是两个不同的函数，因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$；又如函数 $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ 与 $\psi(x) = \sqrt[6]{x^2}$ 的定义域虽然都是 $(-\infty, +\infty)$，但对应法则不同，所以是两个不同的函数.

2. 在函数记号 $y = f(x)$ 中，记号 $f(\quad)$ 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，且不限于表示某一个数学表达式，也可以表示几个数学表达式(如分段函数)，甚至还可以表示一个几何图形或一张数据表格. 因此，对函数记号应有充分的认识，并在求函数的分析表达式及函数的值的运算中能灵活运用.

3. 函数的定义域的确定，需分如下两种情况考虑：

(1) 在实际问题中，由它所反映的具体问题的实际意义来确定；

(2) 如果是抽象地研究用分析式表达的函数，通常约定函数的定义域是使分析式子有意义的一切实数集合.

函数的定义域可以用不等式、实数集合或区间表示，在高等数学中多用区间表示. 注意，一个函数的定义域可能是一个区间，也可能是几个区间，甚至还可能是一些离散的数，例如，函数 $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$ 的定义域就是一些离散的数：$2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

§1.3 函数的几种简单性质

1. 函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性是函数的四种简

单性质，应了解它们的数学定义，会根据定义验证函数是否具有某种性质. 需注意的是，并不是每个函数都具有上述四种性质.

2. 函数的上述四种简单性质都有它们的几何意义. 例如，单调增加(减少)函数的图形从左到右是上升(下降)的；奇函数和偶函数的图形分别关于坐标原点和纵轴是对称的；周期函数的图形按周期重复出现. 了解这些特点，对作函数的图形是很有帮助的.

§1.4 反函数与复合函数

1. 函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = \varphi(y)$ 从方程的角度看，它们是变量 x 与 y 的同一个方程. 但从函数关系看，它们是两个不同的函数. 除定义域可能不同外，主要是它们的对应法则不同. 由于函数主要是定义域和对应法则两要素所决定，而与用什么样的字母表示自变量和因变量没有关系，所以通常把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$.

2. 在 xoy 直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形是相同的，但反函数 $y = \varphi(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. 这一点是要特别记住的.

3. 复合函数概念是本章的难点. 引进复合函数概念的主要目的是把一个较为复杂的函数，通过适当地引入中间变量后，分解成若干个比较简单的函数，使对复杂函数的研究可转化为对简单函数的研究. 把一个较复杂的函数分解成若干个简单的函数，这里所说的简单函数是指基本初等函数或是常数及基本初等函数经过加、减、乘、除得到的函数.

注意，并不是任何两个函数都能复合成一个复合函数(见教材中所举的例子).

§1.5 基本初等函数与初等函数

1. 在自然科学和工程技术中所遇到的函数绝大多数是初等

函数，所以初等函数是高等数学研究的主要对象. 我们又知道，初等函数是由常数及基本初等函数所构成的，因此，作为构成初等函数基础的基本初等函数尤其显得重要，务必给予足够的重视. 对基本初等函数的分析表示式、定义域、值域、性质及图形要熟练掌握.

2. 不是初等函数的函数叫做非初等函数. 分段函数是非初等函数的例子. 但是要注意，不是任何分段函数都是非初等函数. 例如函数 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 是分段函数，但它是初等函数，因为它可用一个分析式子表示，$f(x)=\sqrt{(\sin x)^2}\,(|x|\leqslant\pi)$.

三、解题方法小结与例题分析

（一）求函数的定义域

设函数 $y=f(x)$ 是由分析式子给出的，且不考虑它的实际意义，则它的定义域是使分析式子有意义的所有实数的全体. 要使分析式子 $f(x)$ 有意义，应注意以下几条原则：

(1) 若 $f(x)$ 的表达中含有分式函数，则其分母不能等于零；

(2) 若 $f(x)$ 的表达式中含有偶次根式，则根号下面的式子必须大于或等于零；

(3) 若 $f(x)$ 的表达式中含有对数，则对数的真数必须大于零；

(4) 若 $f(x)$ 的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数，其必须符合反正弦或反余函数的定义域. 如 $y=\arcsin(2x-1)$，则必须 $|2x-1|\leqslant 1$.

根据上述原则，通过解不等式或不等式组，即可求得任何函数的定义域.

【例 1.1】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$；　　(2) $g(x)=\sqrt{x-x^2}$；

(3) $\varphi(x)=\log_2(x^2-3x+2)$；　　(4) $\psi(x)=\arcsin(2x-1)$.

【解】 (1) 这是分式函数，它的定义域是使分母不等于零的 x 值的全体.

由 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\neq 0$ 得 $x\neq 2, x\neq 3$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 这是含有偶次方根的函数，其定义域是使根号下的式子大于或等于零的 x 值的全体.

由 $x-x^2=x(1-x)\geqslant 0$ 得下面两组不等式

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x\leqslant 0\\1-x\leqslant 0\end{cases}$$

由前一组不等式得 $0\leqslant x\leqslant 1$，而后一组不等式不可能成立，即无解，故 $g(x)$ 的定义域为 $[0,1]$.

(3) 这是对数型函数，其定义域是使真数大于零的 x 值的全体.

由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$，得不等式组

$$\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x-1<0\\x-2<0\end{cases}$$

由第一组不等式得 $x>2$；由第二组不等式得 $x<1$，故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(4) 这是反正弦型函数，由 $|2x-1|\leqslant 1$，得 $0\leqslant x\leqslant 1$，故 $\psi(x)$ 的定义域为 $[0,1]$.

【例 1.2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\ln(2-x)}$；　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$；

(3) $y=\dfrac{1}{|x|-x}+\cos\sqrt{x^2-1}$　　(4) $y=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$.

【解】 (1) 由 $\ln(2-x)\geqslant 0$ 解得 $2-x\geqslant 1$，由此又得 x

$\leqslant 1$,所以此函数的定义域为$(-\infty,1]$.

(2) 解不等式组$\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$,得$x\leqslant 2,x\neq 1$,故函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2]$.

(3) 解不等式组$\begin{cases}|x|-x\neq 0\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}$,得函数的定义域为$(-\infty,-1]$.

(4) 当$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时,$\operatorname{tg}x$没有定义,因而$\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$也无定义;又当$\operatorname{tg}x=0$即$x=n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时$\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$没有定义,故函数$y=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$的定义域为$(n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi)\cup(n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2})(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

【例 1.3】 已知$y=f(u)=\sqrt{1-u^2},u=g(x)=x-2$,求复合函数$y=f[g(x)]$的定义域.

【解】 函数$f(u)=\sqrt{1-u^2}$的定义域为$|u|\leqslant 1$即$-1\leqslant u\leqslant 1$,故由$-1\leqslant u=x-2\leqslant 1$,得$f[\varphi(x)]$的定义域为$1\leqslant x\leqslant 3$即$[1,3]$.

【例 1.4】 设$y=f(x)$的定义域为$(0,1]$,求函数(1)$f(x^2)$;(2) $f(\lg x)$的定义域.

【解】 (1) 由$y=f(x)$的定义域$(0,1]$知$f(x^2)$的定义域由不等式$0<x^2\leqslant 1$确定,即为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) 由$f(x)$的定义域$(0,1]$推知$f(\lg x)$的定义域应由不等式$0<\lg x\leqslant 1$确定,即$1<x\leqslant 10$故定义域为$(1,10]$.

(二) 求函数值及函数的表达式

1. 求函数值

如果已知函数的分析表达式,要求定义域内某点处的函数值,只需将该点的值代入函数的表达式中即可算出函数的值.

【例 1.5】 设

$$f(x)=\begin{cases}-x-\dfrac{\pi}{2}, & x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}\\ |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

求 $f(-\pi),f(-\frac{\pi}{6}),f(0),f(\frac{\pi}{6}),f(\pi)$.

【解】 这是分段函数,求函数值时,要注意自变量值所在的分段区间.

$$f(-\pi)=(-x-\frac{\pi}{2})\Big|_{x=-\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$f(-\frac{\pi}{6})=|\sin x|\Big|_{x=-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2};$$

$$f(0)=0;\ f(\frac{\pi}{6})=|\sin x|\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2};$$

$$f(\pi)=(x-\frac{\pi}{2})\Big|_{x=\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

2. 求函数的表达式

(1) 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式,求复合函数 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 的表达式.

【例 1.6】 已知 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$,求 $f[g(x)]$.

【解】 根据函数记号的意义,求 $f[g(x)]$ 只需用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 即可,于是有

$$f[g(x)]=\log(g(x)+\sqrt{1+g^2(x)})$$

$$=\lg(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})=\lg(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|})$$

【例 1.7】 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $f[f(x)]$,并指出它的定义域.

【解】 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq -1$,即 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$
\begin{aligned}
f[f(x)] &= \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \\
&= \left(1-\frac{1-x}{1+x}\right)\Big/\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= x \quad (x\neq -1) \quad (f(x)\text{ 不会等于 } -1)
\end{aligned}
$$

(2) 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式.

这是上一种情形的反问题.一般方法是:令 $g(x)=t$,解出 $t=h(x)$,求出 $f(t)$ 后再将 t 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式.

【例 1.8】 已知 $f(\ln x)=x^2(1+\ln x)(x>0)$,求 $f(x)$.

【解】 令 $\ln x=t$,解得 $x=e^t$,于是原式为 $f(t)=e^{2t}(1+t)$,故 $f(x)=e^{2x}(1+x)$.

上述一般方法由于要从 $g(x)=t$ 反解 x,有时很困难,若采用某种特殊技巧,往往可使问题求解变得简单.如下例.

【例 1.9】 已知 $f(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}$,求 $f(x)$.

【解】 若令 $e^x+e^{-x}=t$,反解 x 很繁,注意所给表达式的特点,可将它变形为

$$
\begin{aligned}
f(e^x+e^{-x}) &= f\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right) \\
&= (e^x)^2+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+2-2=\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2-2
\end{aligned}
$$

由函数记号的意义,即得 $f(x)=x^2-2\ (x>0)$.

(三) 讨论函数的几种简单性质

讨论函数的有界性、奇偶性和周期性的方法都是根据定义,但判别函数的单调性,除对简单的函数可根据定义判别外,一般需利用导数的符号(见第七章)进行判别.

1. 有界性

【例 1.10】 讨论下列函数在定义域内的有界性：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$； (2)$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$； (3)$\varphi(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】 (1) 因 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$，故 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 在原点邻近，对于无论多大的正数 M，只要取 $|x|<\dfrac{1}{M}$，就有 $|g(x)|=\dfrac{1}{x^2}>M^2$，所以它在定义域是无界的.

(3) 函数 $\varphi(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为对于任何 $x(\neq 0)$，总有 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\varphi(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是有界的.

2. 单调性

【例 1.11】 根据定义证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域$[0,+\infty)$内是单调增加的.

【证】 设 x_1,x_2 是定义域$[0,+\infty)$内任意两点，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}>0$$

故由定义知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$内单调增加.

3. 奇偶性

【例 1.12】 根据定义判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$； (2) $g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；

(3) $\varphi(x)=(x^2-x)/(x-1)$.

【解】 (1) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，又

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)\lg(\sqrt{1+x^2}+x) \\
&= (-x)\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \\
&= x\lg(\sqrt{1+x^2}-x) = f(x)
\end{aligned}
$$

故由定义知 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,又

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \\
&= \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -g(x)
\end{aligned}
$$

故由定义知 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 函数 $\varphi(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 的定义域$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$关于原点不对称,故它既非奇函数也非偶函数.

【例 1.13】 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,试确定下列复合函数的奇偶性:

(1) $f[g(x)]$; (2) $f[f(x)]$;

(3) $g[f(x)]$; (4) $g[g(x)]$.

【解】 由题设有 $f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=g(x)$. 于是

(1) $f[g(-x)]=f[g(x)]$,故 $f[g(x)]$ 为偶函数;

(2) $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,故 $f[f(x)]$ 为奇函数;

(3) $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$,故 $g[f(x)]$ 为偶函数;

(4) $g[g(-x)]=g[g(x)]$,故 $g[g(x)]$ 为偶函数.

判别函数的奇偶性除了可用定义判别外,还可利用一些已知函数,如 x^2,x^3,$\sin x$,$\cos x$,$\mathrm{arctg}x$,等等的奇偶性及下列性质进行判别:

(1) 两个奇函数的和是奇函数,两个奇函数的乘积或商(分母不为零)是偶函数;

(2) 两个偶函数的和、乘积或商(分母不为零)是偶函数;

(3) 一个奇函数与一个偶函数的乘积或商是奇函数.

4. 周期性

【例 1.14】 讨论下列函数的周期性.如果是周期函数,求出它的最小周期:

(1) $f(x)=\cos\pi x$;　　　(2) $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】 (1) 设有常数 T 使 $f(x+T)=f(x)$,即

$$\cos\pi(x+T)-\cos\pi x=-2\sin(\pi x+\frac{\pi T}{2})\sin\frac{\pi T}{2}=0$$

要求出 T 的值,使上式对任意的 x 都成立,必须

$$\sin(\pi x+\frac{\pi T}{2})=0 \quad 或 \quad \sin\frac{\pi T}{2}=0$$

但使等式 $\sin(\pi x+\dfrac{\pi T}{2})=\sin\pi x\cos\dfrac{\pi T}{2}+\cos\pi x\sin\dfrac{\pi T}{2}=0$ 成立,而与 x 无关的 T 值不存在,所以必须 $\sin\dfrac{\pi T}{2}=0$,由此式可求得 $T=2n(n=1,2,\cdots)$,故 $\cos\pi x$ 是周期函数,其最小周期为 2.

(2) 设有常数 T 使 $g(x+T)=g(x)$,即

$$\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}=2\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}\sin\frac{2x-T}{2x(x+T)}=0$$

要求出 T 的值,使上式对任意 $x(\neq 0)$ 都成立,必须

$$\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0 \quad 或 \quad \sin\frac{2x-T}{2x(x+T)}=0$$

但使上两式之一成立而与 x 无关的 T 值不存在,故 $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 不是周期函数.

由上面两例看出,根据定义检验一个函数是否为周期函数或求一个周期函数的周期是相当繁杂的.在多数情况下,可根据已有的知识判断一个函数是否为周期函数,而求周期函数的周期可利用一些已知周期函数的周期,如 $\sin x,\cos x,\mathrm{tg}x$ 等.如对例