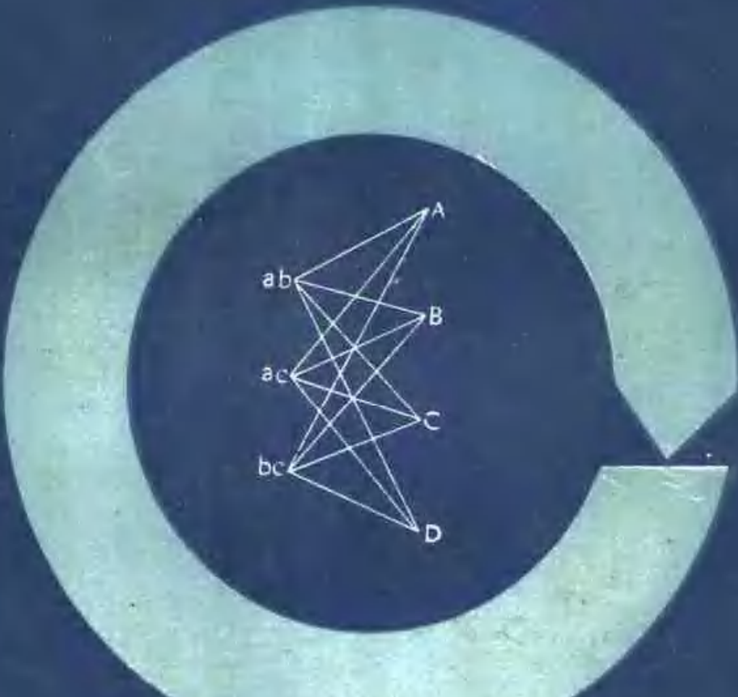
中学数学课本辅导丛书

高中代数第三册学习指导

钱长彦　李德文　编



辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

高中代数第三册学习指导

沈长亮　李忠义　编

辽宁教育出版社

1985·沈阳

高中代数第三册学习指导

沈长亮　李忠义　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：107,000　开本：787×1092 1/32　印张：6 3/8

印数：1—25,500

1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷

责任编辑：王皓男　封面设计：周咏红

统一书号：7371·17　定价：0.77 元

出版说明

提高学生的自学能力，是时代对人才培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

在组织和编写过程中，辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本书的主编，并同钱永耀同志一起，审阅了全部书稿。

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，进行逐章逐节逐个问题地剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每个单元都配有巩固基本知识的思考与练习，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　一元多项式和高次方程

多项式和高次方程是代数学研究的基本对象之一．这一章的主要内容是，介绍一元多项式和高次方程的一些基础知识和研究解决这些问题的基本方法。

本章的知识结构如下：

- 多项式
  - 概　念
  - 运　算——综合除法
  - 性　质
    - 余数定理　因式定理
    - 因式分解　唯一性定理
- 高次方程
  - 概　念
  - 根的性质
    - 根的个数定理
    - 有根的充要条件定理
    - 韦达定理及其逆定理
    - 有理根定理
    - 虚根成对定理

一　一元多项式

（一）内容简介

这一部分是在实数集里已经研究过的多项式的概念、运

算等知识的基础上，在学过复数的基础知识之后，研究多项式的一些初步理论、系统归纳同学们已经学过的有关多项式因式分解的知识。

这一部分的主要内容是多项式的概念、运算（主要是介绍综合除法）、性质及其应用。

由于一元n次方程的理论是从属于一元多项式的，所以一元多项式的学习是很重要的. 学好这部分知识也将为今后学习高等代数打下基础。

（二）学 习 指 导

1.1　一元n次多项式

学习这节内容，同学们要掌握一元n次多项式的概念及零次多项式与零多项式的区别.

1．一元n次多项式的概念

在初中，同学们已经学习过多项式的概念，即"几个单项式的和叫做多项式"．此外，初中课本又给出了多项式的项数、次数以及多项式各项系数的概念. 这里又提出了"元数"的概念，如一元一次式$ax+b$，一元二次式ax^2+bx+c等等，其中$a\neq0$.

一个多项式中含有不同未知数（或者说不同变量）的个数就叫做这个多项式的元数．如多项式 $2x^3+3x-1$，$x^2-2xy+3y^2-6x+2$，$4x^2yz+7xz$等等．如果把x、y、z看成是未知数（变量），那么，它们就分别是一元、二元、三元多项式。

今后，遇到多项式，在合并同类项后，同学们就可以根据这个多项式的元数、次数来准确称呼．如，将多项式ax^3+bx^2+cx+d $(a\neq0)$，称为一元三次多项式．将字母a、b、c、d分别称做多项式各项关于x的字母系数（简称系数），它们是常量．

一般地，我们把按降幂排列的一元多项式，称做这个多项式的一般形式（或称标准式）．以x为元的一元n次多项式的一般形式是

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中n是确定的自然数，$a_n\neq0$。

这里a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_1，a_0都是已知的复数，它们分别是n次项，$n-1$次项，$n-2$次项，…，一次项，零次项（常数项）的系数。

注意 ①按降幂排列的多项式，其首项次数叫做这个多项式的次数，因此，只有当$a_n\neq0$时，才称$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$为一元$n$次多项式；②一元$n$次多项式的定义式中，各项系数的下标与未知数的指数相同．

一元n次多项式可以根据它的各项系数$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$都是复数、实数、有理数、整数等，分别定义为复系数一元n次多项式、实系数一元n次多项式、有理系数一元n次多项式和整系数一元n次多项式等．

2．零次多项式与零多项式

为了研究问题的方便，我们把“系数都是零的多项式叫做零多项式”．当一个多项式是零多项式时，它就是常数零．因此，常数零是零多项式．而把单独的一个非零常数

a_0称做零次多项式.

注意 ① 零多项式的形式有多种写法，如 $0x^3+0x^2+0x+0$，$0x^5y^2+0xy-0x$，0，…等，都是零多项式，因此，零多项式没有项数和次数的定义；②零多项式的值都是0，但是，一个多项式的值是0并不一定是零多项式，因为这个多项式各项系数不一定都是零；③零次多项式是说这个多项式的次数是零（$x\neq0$ 时，$a_0=a_0x^0$，$a_0\neq0$，a_0 是0次多项式），这与零多项式没有次数是根本不同的；④有了零多项式和零次多项式这两个概念以后，可以把多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 分成零多项式与非零多项式两大类：

i. 如果 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 都等于零，那么这个多项式是零多项式.

ii. 如果 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$不全等于零，那么这个多项式是非零多项式.

同学们从一元n次多项式的定义中可以看出，每个一元n次多项式都是常数和变数（未知数）利用加法和乘法运算所构成的.

因此，给定了一个多项式，也就给定了当变数x在复数集C上每取一个确定值时，计算这个多项式的值的对应法则. 而在复数集中，加法、乘法总可以实施，因此，这时这个一元n次多项式的值总是唯一确定的. 所以，我们可以把一元n次多项式看作定义在复数集C上，以x为自变量的一个n次函数，并可用函数记号$f(x)$表示一个一元n次多项式. 当 $x=a+bi$ $(a, b\in R)$时，多项式$f(x)$的值也类似

函数值的记法，记作 $f(a+bi)$. 显然，不论 x 在 C 上取何值，零多项式的值恒为 0，所以零多项式可记作 0.

1.2 综 合 除 法

在初中时，同学们已经学过实系数多项式的代数运算，并且知道两个多项式进行加、减、乘三种运算的结果仍然是一个多项式. 但在多项式的范围内，除法运算却不是总可以实施的，即一个多项式除以另一个多项式的结果可能不是一个多项式（有余式）. 复系数多项式的代数运算也是如此.

在解决多项式的有关运算和求高次方程的根等问题时，常常需要求一个一元 n 次多项式除以 $x-b$ 所得的商式和余数. 因此，如何较快地求出商式和余数有特别加以研究的必要.

1. 综合除法的由来

例 1 用一般除法计算：

$$(2x^4+5x^3-24x^2+15)\div(x-2).$$

解

$$
\begin{array}{r|r}
 & 2x^3+9x^2-6x-12 \\ \hline
x-2 & 2x^4+5x^3-24x^2+0x+15 \\
 & 2x^4-4x^3 \qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline
 & 9x^3-24x^2+0x+15 \\
 & 9x^3-18x^2 \qquad\qquad \\ \hline
 & -6x^2+0x+15 \\
 & -6x^2+12x \qquad \\ \hline
 & -12x+15 \\
 & -12x+24 \\ \hline
 & -9
\end{array}
$$

商式是 $2x^3+9x^2-6x-12$，余数是 -9.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 1 中的被除式与除式都是关于x的多项式. 在实际计算中，我们发现起关键作用的是各项系数的运算，如果我们把x全部去掉，把被除式、除式都按降幂排列成标准式，缺项补零，列出除法竖式以后，只进行多项式系数间的运算，再由各数所在地位的不同,就可以得出商式、余式的系数.即

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2 & +9 & -6 & -12 & \\ \cline{2-6}
1-2\Big) & 2 & +5 & -24 & +0 & +15\\
 & 2 & -4 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 9 & -24 & +0 & +15\\
 & & 9 & -18 & & \\ \cline{3-6}
 & & & -6 & +0 & +15\\
 & & & -6 & +12 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -12 & +15\\
 & & & & -12 & +24\\ \cline{5-6}
 & & & & & -9
\end{array}$$

∴商式是　$2x^3+9x^2-6x-12$，余数是-9.

这种只写出各项的系数来进行除法计算的方法，叫做分离系数除法.

很显然，上面的计算中还有许多重复的部分，如把它们省去，并改成下面的形式：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & +5 & -24 & +0 & +15 & 1-2 \\ \cline{6-6}
 & -4 & & & & 2+9-6-12\\ \cline{1-5}
 & 9 & & & & \\
 & & -18 & & & \\ \cline{1-3}
 & & -6 & & & \\
 & & & +12 & & \\ \cline{1-4}
 & & & -12 & & \\
 & & & & +24 & \\ \cline{4-5}
 & & & & -9 &
\end{array}$$

由于这样被减数和减数相隔太远，不便于书写，所以，把它紧缩简化为下面的形式：

$$
\begin{array}{r|l}
2+5-24+0+15 & \underline{\;1-2\qquad\qquad} \\
-4-18+12+24 & 2+9-6-12 \\
\hline
9-6-12-9 &
\end{array}
$$

如果我们再把被除式首项系数重复写在横线下，那么右面横线下的商的各项系数也可以不写，因为左面横线下除掉末项 -9是余数外，前面的各项就是商式的各项的系数。而除式的首项系数总是1，某数除以1，它的商仍然是某数。所以除式的首项系数可以省去。因此，有

$$
\begin{array}{r|l}
2+5-24+0+15 & -2 \\
-4-18+12+24 & \\
\hline
2+9-6-12 \quad \underline{|-9\;} &
\end{array}
$$

为了进一步简化计算，可以把上式中的减法改为加法，这只需把除式中第二项（常数项）换成它的相反数。算式如下：

$$
\begin{array}{r|l}
2+5-24+0\;\;+15 & 2 \\
+4+18-12-24 & \\
\hline
2+9-6\;\;-12 \quad \underline{|-9\;} &
\end{array}
$$

这样，除法运算就简便多了。这种简化了的分离系数除法叫做综合除法。

2. 综合除法

用综合除法求一个多项式 $f(x)$ 除以一个一元一次式 $x-b$的商式和余式的一般规律是什么呢？同学们仔细分析一下上面的例子可以发现：该算式的第一行是被除式按降幂排

列时各项的系数，如果有缺项，说明这一项的系数是零，必须用零补足．然后移下它的第一个系数到第三行，这个数就是商式的第一项系数，把这个数乘以除式中常数项的相反数写在第二行再加上被除式中下一项（第二项）的系数，写在第三行，这个数就是商式的第二项系数．依此类推下去，算得的第三行就是商式各项的系数及余数（最后得到的数）．

这个规律一般情况下是不是也是正确的呢？

我们知道，根据除法的意义，在除法中被除式、除式、商式和余式之间存在着如下的关系：

被除式＝除式×商式＋余式．

也就是说，一个一元多项式 $f(x)$ 除以另一个一元多项式 $g(x)$（不是零多项式）得商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$．有下列恒等式：

$$f(x)\equiv g(x)q(x)+r(x).$$

这里，余式 $r(x)$ 的次数一定小于除式 $g(x)$ 的次数，或者是零多项式．（否则应该继续除下去，一直到 $r(x)$ 的次数小于除式 $g(x)$ 的次数或者是零多项式为止）

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$ 除以 $x-b$，所得商式是 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$，而余式一定是一个常数 r（因为除式是一次式），r 称为余数，依除法的意义有

$$f(x)\equiv(x-b)g(x)+r.$$

现在，就这一恒等式，用待定系数法来探求综合除法的一般情况．

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$\equiv(x-b)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)+r,$$

就是

$$\begin{aligned}&a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\\&\equiv b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-bb_{n-1})\ \ x^{n-1}+(b_{n-3}-bb_{n-2})\ \ x^{n-2}+\cdots\\&\quad+(b_0-bb_1)x+(r-bb_0).\end{aligned}$$

根据两个多项式恒等定理，比较两边系数得

$$\begin{aligned}&a_n=b_{n-1}, &&\therefore\quad b_{n-1}=a_n;\\&a_{n-1}=b_{n-2}-bb_{n-1}, &&\therefore\quad b_{n-2}=a_{n-1}+bb_{n-1};\\&a_{n-2}=b_{n-3}-bb_{n-2}, &&\therefore\quad b_{n-3}=a_{n-2}+bb_{n-2};\\&\quad\cdots\cdots &&\quad\cdots\cdots\\&a_1=b_0-bb_1, &&\therefore\quad b_0=a_1+bb_1;\\&a_0=r-bb_0, &&\therefore\quad r=a_0+bb_0.\end{aligned}$$

从这里可以看出，商式的各项系数可以从被除式各项系数和除式中的 b 顺次递推出来。

商式的第一项系数就是被除式的第一项系数，商式的其余各项系数可以逐次用下面法则求出：被除式中紧接着的一个系数，加上以 b 乘以上一次所得商式的系数的积。

这种计算可写成下面算式：

$$\begin{array}{llllll|l}a_n & +a_{n-1} & +\cdots\cdots & +a_1 & +a_0 & & b\\ & +bb_{n-1} & +\cdots\cdots & +bb_1 & +bb_0 & & \\ \hline a_n=b_{n-1} & a_{n-1}+bb_{n-1}=b_{n-2} & \cdots & a_1+bb_1=b_0 & \multicolumn{2}{|l}{a_0+bb_0=r} & \end{array}$$

用这种算式进行的除法叫做综合除法。

上面在推导综合除法的一般情况中所说的两个多项式的恒等定理是：

定理1　两个多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

恒等的充要条件是

$$a_n=b_n,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ \cdots,\ a_1=b_1,\ a_0=b_0.$$

这个定理说明，任意一个多项式的标准形式是唯一确定的。这是待定系数法的理论根据。证明这个定理，需要用到下面定理2。

定理2　多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

恒等于零的充要条件是

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0.$$

证明　（1）充分性。当$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$时，显然有$f(x)\equiv0$。

（2）必要性。我们用数学归纳法来证明，若$f(x)\equiv0$，则$a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$。

i. 当 $n=1$ 时，即 $f(x)=a_1x+a_0\equiv0$，令 $x=0$，得 $a_0=0$，$\therefore$ $a_1x\equiv0$，再 令$x=1$，得$a_1=0$，$\therefore$ $a_1=a_0=0$。

ii. 假设 $n=k-1$ 时，命题成立，即

若$f(x)=a_{k-1}x^{k-1}+a_{k-2}x^{k-2}+\cdots+a_1x+a_0\equiv0$,

则有　$a_{k-1}=a_{k-2}=\cdots=a_1=a_0=0$.

我们来证明，当$n=k$时，命题也成立。

$$\because\quad f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+a_{k-2}x^{k-2}+\cdots+a_1x+a_0\equiv0, \tag{①}$$

①式中令$x=a$，则

$$f(\alpha)=a_k\alpha^k+a_{k-1}\alpha^{k-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0\equiv 0, \qquad ②$$

①式中再令 $x=2\alpha$，则

$$f(2\alpha)=2^k a_k\alpha^k+2^{k-1}a_{k-1}\alpha^{k-1}+\cdots+2a_1\alpha+a_0\equiv 0, \quad ③$$

②$\times 2^k-$③得

$$(2^k-2^{k-1})a_{k-1}\alpha^{k-1}+(2^k-2^{k-2})a_{k-2}\,\alpha^{k-2}$$

$$+\cdots+(2^k-2)a_1\alpha+(2^k-1)a_0\equiv 0\,, \qquad ④$$

∵ α是任意值，∴④式是一个$k-1$次多项式：

$$(2^k-2^{k-1})a_{k-1}x^{k-1}+(2^k-2^{k-2})a_{k-2}x^{k-2}+\cdots$$

$$+(2^k-2)a_1x+(2^k-1)a_0\equiv 0.$$

由归纳假设得，一个低于k次的多项式恒等于零时，一定有它的各项系数都是零，因此

$(2^k-2^{k-1})a_{k-1}=(2^k-2^{k-2})a_{k-2}=\cdots=(2^k-2)a_1$

$=(2^k-1)a_0=0$，而 $2^k-2^{k-1}\neq 0$，$2^k-2^{k-2}\neq 0$，…，

$2^k-2\neq 0$，$2^k-1\neq 0$，

$$\therefore\quad a_{k-1}=a_{k-2}=\cdots=a_1=a_0=0. \qquad ⑤$$

把⑤式代入①式，得 $a_kx^k\equiv 0$，

令$x=1$，有$a_k=0$.

这说明，当 $n=k-1$ 时，命题成立，$n=k$ 时命题也成立。

由 i、ii 可知，对于任意自然数 n，命题成立，即若 $f(x)\equiv 0$，则 $a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=a_0=0$.

由（1）、（2）我们证明了定理2．用定理2很容易证明两个多项式恒等的定理1．请同学们自己来完成这个证明．

定理2说明：如果多项式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com