中学数学中的证明方法

吴振奎

中学数学中的证明方法

吴 振 奎

辽 宁 人 民 出 版 社
1 9 7 9年·沈阳

中学数学中的证明方法

吴振奎

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：8 13/16　插页：1

字数：200,000　印数：1—150,000

1979年11月第1版　1979年11月第1次印刷

统一书号：7090·70　定价：0.60 元

前　言

数学是研究空间形式与数量关系的一门科学。由于在自然界里、在生产实践中存在着大量的数与形，所以数学在实践中有着广泛的应用，是一种必不可少的工具。

数学也是中学的一门重要基础学科。学习中学数学，不仅要掌握基础知识，还要演证大量的习题。这些习题中，除了有要求计算的题目之外，还有一些要求证明论断是否正确的问题，也就是所谓证明题。

由于数学中证明问题的多样性，证明的方式和方法也有所不同。熟悉各种证明方法，了解它们的逻辑关系，能迅速、准确地解决不同类型的命题。本书将中学数学中常见的证明方法作了归纳、整理和叙述，以供师生们参考。为了加深对方法的理解，每节后面安排了数量较多的习题，其中有些题目相对来说略难，读者可根据情况选择其中的一部分练习。

本书在编写过程中参考了有关书刊和资料，谨向这些作者致以谢意。沈阳教育学院陈显文老师，辽阳教育学院宋殿桢老师，还有徐万恕、张铁臣、张伯俞等老师在审阅初稿时，提出了极为宝贵的意见，笔者也向他们表示衷心感谢。
由于水平所限，书中定会有不少缺点、错误，欢迎读者批评指正。

吴振奎

1973年7月初稿

1978年9月二稿

目　录

本书用到的数学符号

$\sum\limits_{i=l}^{n} a_i$	表示足码从 l 到 n 的所有 a_i 的和，即 $a_l+a_{l+1}+\cdots+a_n$
$\prod\limits_{i=l}^{n} a_i$	表示足码从 l 到 n 的所有 a_i 的积，即 $a_l a_{l+1}\cdots a_n$
(a,b)	表示整数 a、b 的最大公约数*（多个数时类同）
$[a,b]$	表示整数 a、b 的最小公倍数*（多个数时类同）
$a \mid b$	表示 a 能整除 b
$a \nmid b$	表示 a 不能整除 b
a/b	表示 $\frac{a}{b}$（只是在方便的时候才那样书写）
$m \nparallel n$	表示直线 m 不平行于直线 n
$\Longleftrightarrow$	表示充要条件
$S_{\triangle ABC}$	表示 $\triangle ABC$ 的面积（其他类同）
$V_{\text{球}O}$	表示球 O 的体积（其他类同）
$\lg A$	表示 A 的常用对数
$\arg Z$	表示复数 Z 的幅角（主值）
$\sin^{-1}X$	表示 X 的反正弦函数
const	表示常数
$\bar{z}$	表示复数 z 的共轭复数

$(a,b)=1$ 表示整数 a、b 互质（互素）

$a\equiv b \pmod p$ 表示整数 a、b 对模 p 同余

---

* 有时 (a, b)、[a, b] 也表示开、闭区间，使用时，要看具体场合，表示区间一般在函数中用。(a, b) 在解析几何中又表示点的坐标。

一　一点逻辑知识

数学证明方法中的一些依据，是属于逻辑学的，因此我们在没有谈证明方法之前，先学习一点逻辑知识。

什么是逻辑学呢？“逻辑”一词出于希腊语“*logos*”，有思维、思考、理性之意，我们这里所指的逻辑是指思维构造的正确性，即思维确定，无矛盾，推理有据，首尾一贯等。逻辑学（它是形式逻辑的总称）正是关于思维正确构造规律与形式的科学，因而数学中广泛地应用着逻辑学中的规律与形式。

我们下面先介绍一些逻辑学中的名词，它们在数学中也常用到。

1．概念

概念是反映事物本质属性的一种思维形式，即事物属性在人头脑中的反映。

中学数学中包括着大量的概念，如：点、直线、平面……等等。

在概念中分为外延和内涵。概念的外延是指适合该概念的一切对象的全体，如在“三角形”这个概念的外延中包含一切类型的三角形：锐角三角形、直角三角形、等腰三角形、等边三角形等等。概念的内涵是指概念所包含的对象的一切共同本质属性的总和，如“矩形”这个概念内涵中包含三个本质属性：（1）四边形（2）两组对边互相平行

（3）有一个内角是直角．概念的外延与内涵之间既矛盾着又存在着密切的联系：即当一个概念的内涵愈广泛（扩大），则它的外延就愈狭窄（缩小）；反之，概念的内涵愈狭窄，它的外延就愈广泛．如若矩形内涵的三个属性中再添加一个属性：一组邻边相等，则此总和表达一个新的概念：正方形．这是一个比矩形外延较小的概念，这个概念中不再包括邻边不相等的矩形．

概念有确定性，但又有其灵活性．确定性是指在一定条件下的确定；灵活性是指随人们的认识不断深化，概念的涵义也在发展变化．如“角”的概念，最初限于平面，且在180°以内，有锐角、直角、钝角等；而后发展到180°（平角）至360°（周角）以内的角；进而到正的任意角．规定了方向之后，又有了负角概念．及至立体几何，又有了空间直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角等等．

2．命题

命题是一个有意义的叙述．它揭示一个对象的确定的特征或一些对象之间的关系．一个命题通常是由前提（又称条件）和结论（又叫终结）两部分构成．

例如：“等腰三角形的两底角相等”及“若 x_1、x_2 是一元二次方程$ax^2+bx+c=o$的两个根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$”便是两个命题．这里的“等腰三角形”和“x_1、x_2是一元二次方程 $ax^2+bx+c=o$ 的两个根”分别是这两个命题的前提，而“两底角相等”和“$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$”

分别是这两个命题的结论．命题有时可能是不正确的．

若把一些命题按一定方式连接起来，又可构成新的命题．假设我们把两个命题分别记作A和B，将它们通过“与”、“或”、“若…则”和“非”诸字联结可构成几个新命题．可用符号分别记为：

（1）$\bar{A}$（读作非A或不是A），它表示对命题A的否定，即可视为下述命题：当A真时它假，当A假时它真．

（2）$A\&B$（读作A与B），它表示当且仅当A和B都真时它真．

（3）$A\vee B$（读作A或B），它表示当且仅当A和B至少有一真时命题真．

（4）$A\rightarrow B$（读作若A则B），它表示当且仅当A真B假时命题假．

（5）$A\Longleftrightarrow B$（读作A与B等价），它表示A与B同真同假，即若A则B，且若B则A．它有时又记作$A\sim B$或$A\longleftrightarrow B$．

3．判断

判断是对某种事物进行肯定或否定的思维形式．概念与概念以一定方式联结起来就构成判断．

数学中的任一命题都是一个判断．如数学中的每一公理、定理、性质、法则等都是一个判断．

判断也是一种命题．因而，判断也不一定都正确．检验一个判断的正确与否，除了进行必要的论证外，还要对具体情况作具体分析．这首先要了解判断的前提（或范围），如讨论方程 $ax^2+bx+c=0$ 有无根，有几个根的问题，必须先明确是在有理数，还是在实数、复数范围内讨论．其次应注

意判断的质量界限，注意事物的发展变化，明析量变到质变的过程。如讨论$\frac{1}{x-a}$在整个实数范围内的符号问题时，当$x>a$时，分式值是正的；当$x<a$时，分式值是负的；而$x=a$时，分式无意义。

判断按其质与量，前提与结论可分为多种形式，在数学中常用到的判断是所谓假言判断，即"若什么，则什么"形式的判断。假言判断反映事物间较复杂的或因果的关系。

4．推理与三段论式

推理是从已有的一些判断推出另一个新的判断的思维形式。它揭示个别与一般、特殊与普遍怎样联系，一般怎样从个别中抽出，普遍怎样从特殊中寻求等等。

数学中的命题证明常需要一系列相互联系的推理来完成。

形式逻辑中常用的推理方法有演绎法和归纳法。演绎法是从一般到特殊，从全体到个别的推理方法，它常用三段论式来完成；归纳法是从特殊到一般，从个别到全体的推理方法。

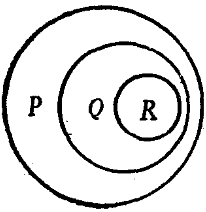
下面我们先来谈一下所谓三段论式。三段论式是人们在思维中经常用到的逻辑论式，它是由两个前提和一个结论组成的。第一个前提通常包含着一个一般规则，叫大前提；第二个前提指命题中的条件，叫小前提。结论是由两个前提推出的判断。例如论式：

矩形两对角线长相等	大前提
正方形是矩形	小前提
正方形两对角线长相等	结　论

在数学推理叙述中，常常省略了大前提，或将大前提在推理后面用括号注明。如上论式常叙述为：∵正方形是矩形，∴正方形对角线相等。（矩形对角线相等）

三段论式的依据是：如果某性质属于（或不属于）某一类事物，则这性质定属于（或不属于）该类事物中的任何一部分。

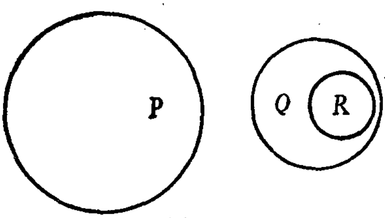
由于三段论式中各命题间的关系，可以用各概念的外延间的关系表示出来，如概念P的外延包含着概念Q的外延，而概念R的外延又包含在概念Q的外延中，则概念R的外延必包含在概念P的外延中。我们可以用图来表示这些关系。如上例中用P表示具有相等对角线的四边形的外延，Q是矩形的外延，R是正方形的外延，则可见图1—1（它常被称为欧拉圆）：



若Q则P	大前提
R为Q	小前提
R为P	结　论

图　1—1

对于否定的情形，可由图1—2说明：



若Q则$\overline{P}$	大前提
R为Q	小前提
R为$\overline{P}$	结　论

图　1—2

推理的要求是：重视前提，过程严密，方法得当，合乎逻辑。

为了后面的应用，我们简单介绍一下枝形推理图（或叫树图）．*

将一个命题证明的逻辑结构用树枝状的图形明显而直观地表示出来，显得有本有源，有根有梢．具体表示法是：

若命题 B 是由命题"若 A 则 B"和"条件 A"（即三段论式中的两个前提）推出的，则它可表为：

$$\frac{（若 A 则 B），A}{B} \quad 简记为 \quad \begin{array}{c}\boxed{A}\\ \downarrow \\ \boxed{B}\end{array}$$

要知道，在一个命题的证明过程中，往往包含一系列相互联系的推理，它们按顺序编排起来，使每一个推理中应用或是一个已经证得的命题（定理、公理、性质、法则等等），或是该命题的一个前提即题设，再不然是由前面推理中推出的结论，这些推理都用上述图示表出，连贯起来，形状如树枝，称为枝形推理图．图 1—3 表示结论 G 由命题 A、C、E 经过中间推理 B、F、D 而得到的．这里 G 称为"树根"，A、C、E 称为"树梢"．

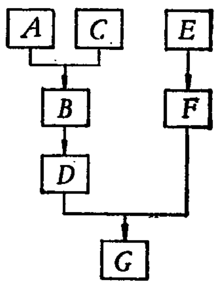


图 1—3

* 枝形推理图在电子计算机程序设计上也常用到，在那里称为"框图"，它对于问题的程序设计的算法语言描述常是直观、重要的。

5．形式逻辑中的四个规律

逻辑思维中的基本规律是人们进行正确思维和论辩时必须遵守的基本规则，这是客观事物在人们头脑中的正确反映．形式逻辑中的思维规律是客观事物在相对稳定下的规律性的反映．中学数学中研究的量大多是些常量，因而中学数学中广泛地应用着形式逻辑，充分利用其四个基本规律．它们是：

（1）同一律：是指在同一论证过程中概念和判断必须保持同一性，用公式表为：A是A．

（2）矛盾律：指在同一论证过程中，两个相互矛盾的（相反的）判断其中至少有一个是错（假）的．用公式表为：A不是$\bar{A}$．

（3）排中律：在同一论证过程中，两个相互矛盾的判断必有一个是真的，因而中间的可能不存在（由矛盾律其中至少有一个是假的）．用公式表为：或A、或$\bar{A}$，二者必居其一．

（4）充足理由律：在同一论证过程中，任何一个真实的判断都要有充足的理由．公式为：所以有A，因为B、$C\cdots$．

二 几个数学名词

上面我们简单地介绍了一些逻辑知识，下面再来介绍几个中学数学中常用到的数学名词。

1. 定义、公理、定理及四种命题

在数学中，用已知概念来说明一个名称或术语意义的命题称为这个名称或术语的定义。

例如："90°的角叫直角"是直角的定义，"只含有一个未知数，且未知数最高次数是1的方程，称为一元一次方程"，是一元一次方程的定义等。

公理是被实践证实是真确，不加证明而采用的命题。它又叫公准。

例如："过两点可引且仅可引一条直线"及"若$a=b$，则$a+c=b+c$（等量加等量和相等）"等都是公理。

定理系由已知真实命题经过逻辑推理（包括计算）而证明是真确的命题。

例如："直角三角形中，若c代表斜边，a、b代表两直角边，则$c^2=a^2+b^2$"叫"勾股定理"；再如"在$\triangle ABC$中，若a、b、c分别表示角A、B、C所对的边，则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$"称为"正弦定理"等等。

定理又常分为引理（又叫预理）、定理和系理（又叫推

论）．由它引导而推出定理的命题（它仅仅是为了证明该定理所作的准备），叫引理．而由定理直接得到的命题（它常常是指对应定理的某些简单的特殊情形），叫系理．

数学中的命题也是由前提与结论两部分组成．倘若对一个命题（称为原命题）的前提与结论互换或否定，便可推衍出与之对应的三个其他命题（当然并非它们都一定真确），即逆命题、否命题和逆否命题．

（1）原命题：我们把任一个已知命题都可视为原命题．若命题形如“若A则B”，由上面介绍我们知道，A称为前提或条件，B称为结论．

（2）逆命题：若一命题的条件是某原命题的结论（或结论的一部分），而它的结论是原命题的条件（或条件的一部分），则称它为原命题的逆命题．可用“若B则A”表示．*

（3）否命题：若一命题的条件与结论分别是某原命题的条件与结论的反面，这个命题称为原命题的否命题．可用“若$\bar{A}$则$\bar{B}$”表示．

（4）逆否命题：若一命题的条件与结论分别是某原命题的结论与条件的反面，这个命题称为原命题的逆否命题．可用“若$\bar{B}$则$\bar{A}$”表示．

下面我们举例说明．

若“正三角形三内角相等”为原命题；

---

* 我们应当较为广泛地理解这种表示法，当A和B都只含一条事项时（此时称为简单命题），不言而喻；但当A和B所含事项不止一种时，应将原命题中条件与结论理出若干事项，然后取出同样多的事项进行交换，得原命题的逆命题．对于下面谈到的几种命题情况类同．

其逆命题是：“三内角相等的三角形是正三角形”；

其否命题是：“不是正三角形，其三内角不等”；

其逆否命题是：“三内角不等的三角形不是正三角形”。

从命题的结构来看，原命题与其逆否命题等效（同真同假），而逆命题与否命题等效，这一点可用后面讲到的反证法证明。* 但是一个命题的逆命题不一定与它的原命题等效，即是说一个命题（原命题）真，其逆命题不一定真．例如“若$a>0,b>0$，则$ab>0$”真，但其逆命题（它只是其中之一）“若 $ab>0$，则 $a>0$，$b>0$”就不真．又如“若 $4|a$，则 a 是偶数”真，而其逆不真，因为有不能被 4 整除的偶数存在。同样可知，一命题的否命题不一定与它的逆否命题等效。它们之间的关系可用右图表示：

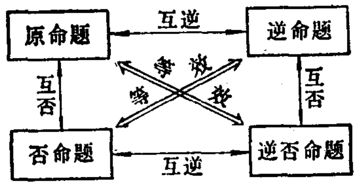


图 2—1

若问：何时原命题与其逆命题等效？我们在回答这个问题之前，先谈谈与它有关的数学中的所谓充要条件。

2．充要条件

充要条件是指一个命题中充分条件和必要条件的简称，它是构成许多数学命题的最重要的概念。下面分别谈一下这两个条件。

---

* 证：若$\overline{B}$则$\bar{A}$不成立，则它的否定情形成立：若$\overline{B}$则A（排中律），但已知：若A则B（原命题），故若$\overline{B}$则B（传递律），矛盾！故若$\overline{B}$则$\bar{A}$真。这一点也正是反证法的逻辑依据。

（1）充分条件：若条件 B 具备时，事件 A 必然出现（成立），即若有命题“若 B 则 A”（记为 $B\to A$）成立，则条件 B 就称为事件 A 的充分条件。充分条件仅仅是充分的，它不一定必要，即是说当条件 B 没有被满足，或者用较弱的条件 B' 代替条件 B，事件 A 也可能出现。简言之：“有之必然，无之未必不然。”

例如：若一整数 n 以“0 0”结尾，则 $4|n$。这里以“0 0”结尾是整数能被 4 整除的充分条件，但它不是必要的，我们只须注意到12不是以“0 0”结尾的整数，而它也能被 4 整除。

（2）必要条件：若必须条件 B 具备时，事件 A 才能发生，即若有命题“若 A 则 B”（记为 $A\to B$）成立时，则条件 B 就叫做事件 A 的必要条件。即若没有条件 B，事件 A 就不能成立，但它不一定是充分的，即满足条件 B 时，事件 A 未必都出现。简言之：“无之必不然，有之未必然”。

例如：“若 $4|n$，则 n 是偶数。”这里偶数是被 4 整除的必要条件，即 n 不是偶数时，它一定不能被 4 整除；但它是不充分或不完全的，因为偶数未必都能被 4 整除。

（3）充要条件：若条件 B 既是事件 A 的充分条件，又是事件 A 的必要条件，则条件 B 称为事件 A 的充分必要条件，简称充要条件。以命题形式书为：若 A 则 B，且若 B 则 A。（记为 $A\Longleftrightarrow B$）

例如：若 n 为整数，$4|n\Longleftrightarrow n$ 的末两位数能被 4 整除。

再例如：方程 $x^2+px+q=0$（p、q 为实数）有二正实根 $\Longleftrightarrow p<0$，$q>0$，$p^2-4q\geqslant 0$。应该指出的是：这里 $p<0$，$q>0$，$p^2-4q\geqslant 0$ 任意之一都是必要的，但其中的任一个条件