模糊系统分析

●李永明 著

3

科学出版社
www.sciencep.com

模糊系统分析

李永明 著

陕西师范大学优秀学术著作基金资助出版

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从系统分析的角度论述了模糊数学与系统，从理论上进行了详尽的推导. 全书共分 6 章. 第 1 章介绍模糊集合的最基本的内容; 第 2 章介绍模糊关系分析的相关知识; 第 3 章讲述模糊系统的逼近性分析; 第 4 章研究了模糊系统及其模糊自动机的有关理论; 第 5 章总结了针对 T-S 模糊系统的稳定性与鲁棒稳定性的分析方法; 第 6 章讨论了针对 T-S 自适应模糊控制系统的稳定性分析方法.

本书可作为数学系、计算机系、自动化系等专业模糊系统与模糊数学方向的研究生或高年级本科生的教材，也可作为工程人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊系统分析/李永明 著.—北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-015775-3

I. 模… II. 李… III. 模糊系统-系统分析 IV. N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 067384 号

责任编辑：鄢德平　范庆奎　吕　虹　祖翠娥 / 责任校对：赵桂芬

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005年11月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2005年11月第一次印刷　印张：17 3/4

印数：1—2 000　字数：337 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

1965 年, 为了从数学上处理带有模糊性的不确定性现象, Zadeh 引入了模糊集合的概念. 自此, 模糊集合的观点引起了众多研究者的兴趣, 并被引入许多理论与应用的学科中. 目前在模糊数学与模糊系统的理论与应用方面已取得了重要的成果. 有关模糊数学与系统的理论与应用的书籍已有很多. 本书将从系统分析的角度来论述模糊数学与系统, 这也是目前模糊数学与系统研究中的一个突出问题. 模糊系统与通常的研究系统的一个重要区别在于通常的系统往往是用微分与代数方程来描述, 有确定的数学模型, 而模糊系统则是用基于人的经验的语言规则来描述, 经过模糊推理来实现的系统. 因而模糊系统的分析不能只用经典的方法进行研究. 实际上, 缺乏系统而有效的分析方法也势必影响模糊系统在安全可靠系统中的应用. 因而研究模糊系统分析的方法构成模糊数学与系统的一个重要方向. 在这一方面, 目前已取得了不少进展, 如模糊控制的自适应方法、模糊系统的逼近性分析、模糊系统的关系分析与矩阵分析、离散系统的模糊自动机实现与分析研究等. 本书作者就一直在这些方面开展研究.

本书是对作者研究工作的一个总结. 全书以系统分析为主线, 在模糊关系分析、模糊逼近性分析、模糊离散系统模型分析、模糊系统稳定性分析等方面进行系统而全面的论述, 并通过大量的例子对问题进行阐释.

本书内容安排: 第 1 章是基础, 介绍模糊集合的一些最基本的内容. 第 2 章是有关模糊关系分析的内容, 既包括最常用的模糊关系方程及其求解问题, 又包括基于此的模糊矩阵的幂运算, 基于模糊关系的系统分析及模糊推理系统的鲁棒性分析讨论. 第 3 章是有关模糊系统的逼近性分析的内容, 我们针对目前常用的 Mamdani 模糊系统、T-S 模糊系统和布尔型模糊系统研究了它们的逼近性能及其对应系统的构造方法, 并针对模糊系统对动态过程的逼近性进行了讨论. 第 4 章研究了(离散)模糊系统及其模糊自动机的有关理论, 在格值意义下本章涵盖了模糊自动机的基本内容. 第 5 章主要总结了针对 T-S 模糊系统的稳定性与鲁棒稳定性的分析方法. 第 6 章讨论了针对 T-S 自适应模糊控制系统的稳定性分析方法.

当然还有许多重要的模糊系统分析方法没有涉及，有兴趣的读者可以从参考文献中找到. 书中提供了大量的习题，有些是常规的训练，有些是书中内容的一些拓广，有些本身可以作为下一步的研究课题. 这些练习对于那些志在模糊系统分析方法方面作出贡献的读者是十分必要的.

模糊系统分析方法是目前模糊系统理论研究的一个重点，目前仍处于发展阶段，尚有许多的问题需要解决. 希望本书的出版对该学科的发展有一定的促进作用.

本书的各部分内容都向研究生讲授过，其中一些是作者新近完成的科研成果. 但限于作者的水平，不妥之处在所难免，希望各位专家与读者不吝赐教.

作者十分感谢陕西师范大学数学与信息科学学院的王国俊教授、西北工业大学自动化学院的史忠科教授、四川大学数学学院的刘应明院士、清华大学计算机科学与技术系的应明生教授，以及加拿大 Alberta 大学电子与计算机工程系 Witold Pedrycz 教授提供了各方面的帮助.

我的研究生尚云、李莉、刘维军、罗艳斌、焦烨、吴静杰、李得超、雷红轩、李平、盛莉等对此书做了若干错误的纠正，这里也向他们表示感谢.

最后，我向给予我巨大支持的妻子李志慧博士表示诚挚的感谢.

本书的写作得到了国家自然科学基金(60174016, 19901028)、数学天元基金(10226023)、国家教育部高等学校青年教师教学与科研奖励计划及国家 973 项目(2002CB312200)的共同资助.

目　录

第 1 章　模糊数学基础

本章将给出本书所要用到的模糊数学的一些最基本的内容，主要包括模糊集合的定义及其基本性质、模糊关系的定义及其基本性质，以及模糊逻辑与推理的基本内容.

1.1　模糊集合的定义与运算

经典集合是用来描述确定性现象最基本的数学概念，也是现代数学的基础. 而为了处理模糊现象 (概念)，L. A. Zadeh 引入了模糊集合的概念. 本节我们简单地回顾经典集合的概念及一些最基本性质，然后引入模糊集合的概念，并给出模糊集合的基本性质.

1.1.1　经典集合与特征函数

设 X 为基本论域，X 的子集记为 $A, B, C, \cdots$. 集合 A 的表示方法主要有以下几种：

(1) 列举法：列出集合 A 的所有元素，$A = \{x_1, x_2, \cdots\}$;

(2) 描述法：给出集合 A 中元素性质的描述，$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$;

(3) 特征函数法：利用特征函数来表示集合 A, A 的特征函数 χ_A：$X \to \{0, 1\}$ 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

记 $P(X) = \{A | A \subseteq X\}$，称为 X 的幂集，则 $(P(X), \subseteq)$ 构成偏序集，即包含关系 $\subseteq$ 满足如下三个条件：

(1) 自反性：$A \subseteq A$;

(2) 反对称性：若 $A \subseteq B, B \subseteq A$，则 $A = B$;

(3) 传递性：若 $A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

$P(X)$ 上有如下运算：设 $A, B \in P(X), B_t \in P(X)(t \in T, T$ 为一个指标集)，则 $A \cup B, A \cap B, A^c, \cup_{t \in T} B_t, \cap_{t \in T} B_t$ 为 $P(X)$ 的并、交、补、任意并、任意交运算，并且 $(P(X), \cup, \cap, c)$ 具有如下性质：

(1) $A \cup B, A \cap B, \cup_{t \in T} B_t, \cap_{t \in T} B_t, A^c \in P(X)$;　　(封闭性)

(2) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;　　(交换律)

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;　(结合律)

(4) $A \cup \varnothing = A,\ A \cap X = A$;　(单位元存在性)

(5) $A \cup A^c = X,\ A \cap A^c = \varnothing$;　(互补性)

(6) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$;　(吸收律)

(7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (\cap_{t \in T} B_t) = \cap_{t \in T}(A \cup B_t)$,

$A \cap (\cup_{t \in T} B_t = \cup_{k \in T}(A \cap B_t)$;　(分配律)

(8) $A \cup A = A, A \cap A = A$;　(幂等律)

(9) $A \cup X = X, A \cap \varnothing = \varnothing$;　(两极律)

(10) $(A^c)^c = A$;　(对合律)

(11) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

$(\cup_{t \in T} B_t)^c = \cap_{t \in T} B_t^c, (\cap_{t \in T} B_t)^c = \cup_{t \in T} B_t^c$.　(De-Morgan 对偶律)

若令 $F_0(X) = \{\chi_A | A \subseteq X\}$, 则我们可以在 $F_0(X)$ 上引入以下运算:

$$(\chi_A \vee \chi_B)(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$
$$(\chi_A \vee \chi_B)(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$
$$\chi'_A(x) = 1 - \chi_A(x).$$

于是存在双射 φ: $P(X) \to F_0(X)$, 其中 φ 定义为 $\varphi(A) = \chi_A$, 且 φ 为代数同构, 即 φ 保持各种代数运算, 记为 $(P(X), \cup, \cap, c) \cong (F_0(X), \vee, \wedge, ')$. 由于这个缘故, A 与 χ_A 不加区别.

1.1.2　模糊集合的定义与例子

以下设 X 为普通集合.

定义 1.1.1　集合 X 上的模糊集合 (fuzzy set) 是一个映射 $A: X \to [0,1]$, A 也称为模糊集合 A 的隶属函数, 常记为 μ_A. 对 $x \in X$, $A(x)$ 称为 x 属于模糊集 A 的隶属度.

模糊集合有以下几种记法:

(1) $A = \{(x, A(x)) | x \in X\}$;

(2) 若 X 为连续集 (无限集), 则 A 可以表示为

$$A = \int A(x)/x;$$

(3) 若 X 为有限集或可数集, 并设 $X = \{x_i\}$, 则 A 可以表示为

$$A = \sum A(x_i)/x_i.$$

例 1.1.1　设 $X=[0,100]$ 表示年龄的集合，A 与 B 表示 “年老” 与 “年轻” 的模糊集合，它们的隶属函数分别为

$$A(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50\leqslant x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25\leqslant x\leqslant 100,\end{cases}$$

如图 1.1.1, 图 1.1.2 所示.

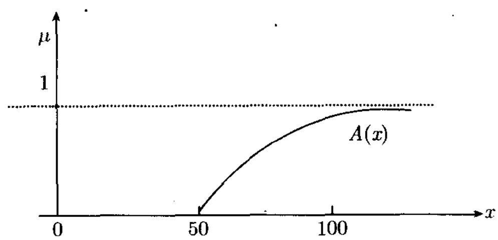

图 1.1.1　模糊集合 “年老” A

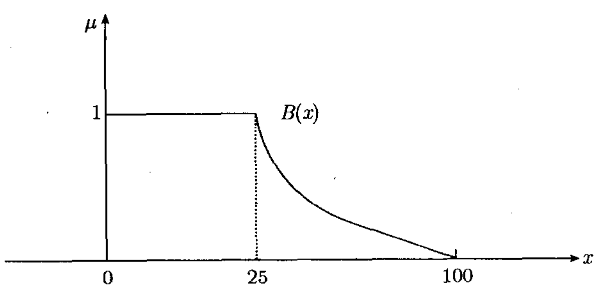

图 1.1.2　模糊集合 “年轻” B

如果 $x=60$, 则 $A(60)=0.8, B(60)=0.02$, 故可认为 60 岁是比较年老的.

例 1.1.2　设 X 中元素是各种单连通凸区域 x, 以光滑的封闭曲线为边界, 用 l 表示边界的周长, s 表示区域的面积, 模糊集 A 表示 “圆的程度”, A 的隶属函数为 $A(l,s)=\dfrac{4\pi s}{l^2}$. 当 x 是圆时, $A(x)=1$; 当 x 不圆时, $A(x)<1$.

当基本集合为**R**时, 常用下列三种标准函数表示模糊集合的隶属函数:

(1) S 函数 (偏大型隶属函数), 如图 1.1.3 所示.

(2) Z 函数 (偏小型函数), 如图 1.1.4 所示.

(3) π 函数 (中间型隶属函数), 如图 1.1.5 所示.

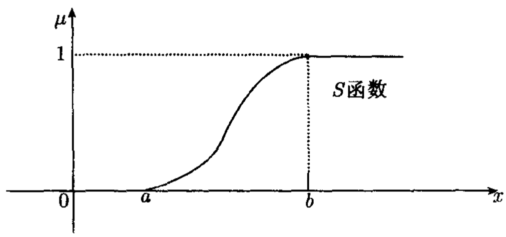

图 1.1.3　S 函数

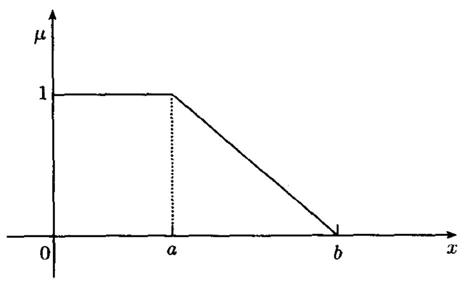

图 1.1.4　Z 函数

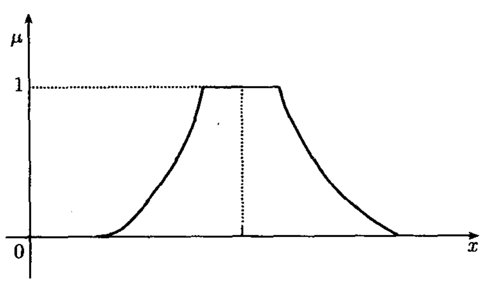

图 1.1.5　π 函数

1.1.3　模糊集合的运算

用 $F(X)$ 表示 X 上模糊集合的全体, 即

$$F(X)=\{A|A\colon X\to[0,1]\}.$$

定义 1.1.2　设 $A,B\in F(X)$, 若 $\forall x\in X$ 有 $A(x)\leqslant B(x)$, 则称 A 含于 B, 或 B 包含 A, 记作 $A\subseteq B$. 若 $\forall x\in X$, 有 $A(x)=B(x)$, 称 A 等于 B, 记作 $A=B$, 则 $(F(X),\subseteq)$ 为偏序集.

定义 1.1.3　设 $A,B\in F(X)$, A 与 B 的并 $A\cup B$, 交 $A\cap B$, 补 A^c 的隶属函数定义为

$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)=\max\{A(x),B(x)\}$,

$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)=\min\{A(x),B(x)\}$,

$A^c(x)=1-A(x)$.

显然, 若 $A,B\in F(X)$, 则 $A\cup B, A\cap B, A^c\in F(X)$. 另外, 若 $A_t\in F(X)(t\in T)$, 则可定义模糊集合的任意并与任意交的运算如下:

$(\cup_{t\in T}A_t)(x)=\vee_{t\in T}A_t(x)=\sup_{t\in T}A_t(x)$,

$(\cap_{t\in T}A_t)(x)=\wedge_{t\in T}A_t(x)=\inf_{t\in T}A_t(x)$.

显然, $\cup_{t\in T}A_t, \cap_{t\in T}A_t\in F(X)$.

定理 1.1.1 设 X 为论域, $A,B,C\in F(X)$, 则代数系统 $(F(X),\cup,\cap,c)$ 具有如下性质:

(1) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$; (交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; (结合律)

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; (分配律)

(4) $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$; (吸收律)

(5) $A\cup A=A, A\cap A=A$; (幂等律)

(6) $(A^c)^c=A$; (对合律)

(7) $X\cap A=A, X\cup A=X$,

$\varnothing\cap A=\varnothing, \varnothing\cup A=A$; (两极律)

(8) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$. (DeMorgan 对偶律)

若 $B_t\in F(X)(t\in T)$, 则 (3) 和 (8) 有更一般的形式:

(3′) $A\cap(\cup_{t\in T}B_t)=\cup_{t\in T}(A\cap B_t)$, $A\cup(\cap_{t\in T}B_t)=\cap_{t\in T}(A\cup B_t)$;

(8′) $(\cup_{t\in T}B_t)^c=\cap_{t\in T}B_t^c$, $(\cap_{t\in T}B_t)^c=\cup_{t\in T}B_t^c$.

证明 直接验证即可. ■

注 1.1.1 模糊集合不再满足互补律, 即 $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$ 一般不再成立.

例 1.1.3 设 $X=[0,1], A(x)=x$, 则 $A^c(x)=1-x$, 这时

$$(A\cup A^c)(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ x, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}\qquad (A\cap A^c)(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-x, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

于是 $A\cup A^c\neq X, A\cap A^c\neq\varnothing$. 特别地, $(A\cup A^c)\left(\dfrac{1}{2}\right)=(A\cap A^c)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

1.1.4　模糊集合的分解定理

定义 1.1.4　设 $A \in F(X), \forall\lambda \in [0,1]$, 记

$$A_\lambda = \{x \in X | A(x) \geqslant \lambda\} (\subseteq X),$$

则称 A_λ 为 A 的 λ 截集 ($\lambda-\mathrm{cut}$). 又记

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \in X | A(x) > \lambda\},$$

则又称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 A 的 λ 强截集.

定理 1.1.2　截集有下列性质：

(1) $(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$, $(A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$;

(2) $(A \cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $(A \cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(3) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset A_\lambda$;

(4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A_\lambda \subseteq B_\lambda, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(5) 若 $\lambda_1 > \lambda_2$, 则 $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}, A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_2}}$;

(6) $A_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda \leqslant \alpha} A_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda < \alpha} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $A_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda > \alpha} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \geqslant \alpha} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明　直接验证即可. ■

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ 也称为对应于模糊集合 A 的集合套. 关于模糊集合与集合套的关系的讨论可见表现定理 (定理 1.1.6).

定义 1.1.5　设 $A \in F(X)$, 称 $A_1 = \{x \in X | A(x) = 1\}$ 为 A 的核, 记作 $\ker A$. $A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x \in X | A(x) > 0\}$ 为 A 的支集, 记作 $\mathrm{supp}A$. 而差集 $\mathrm{supp}A - \ker A$ 称为 A 的边界. 如图 1.1.6 所示.

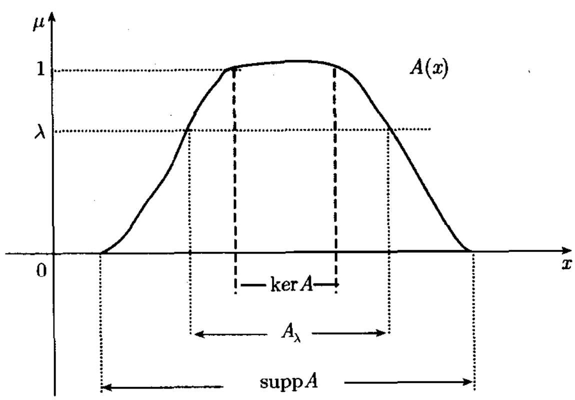

图 1.1.6　模糊集合的截集、支集和核

明显地, 有 $\forall\lambda \in [0,1], \ker A \subseteq A_\lambda \subseteq \mathrm{supp}A \subseteq X$.

定义 1.1.6 设 $A \in F(X)$, 若 $\ker A \neq \varnothing$, 则称 A 为正规模糊集 (normal fuzzy set), 否则 A 称为非正规模糊集.

定义 1.1.7 设 $\alpha \in [0,1]$, $A \in F(X), \alpha$ 与 A 的数积为 αA 定义为, $\forall x \in X$,

$$(\alpha A)(x) = \alpha \wedge A(x).$$

定理 1.1.3(模糊集合的分解定理) 对于任意的 $A \in F(X)$, 有

$$A = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha, \qquad A = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_{\dot{\alpha}}.$$

若 R_0 为 [0,1] 中的有理点集 (或稠密集), 则

$$A = \cup_{\alpha \in R_0} \alpha A_\alpha = \cup_{\alpha \in R_0} \alpha A_{\dot{\alpha}}.$$

证明 因为

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\alpha, \\ 0, & x \notin A_\alpha, \end{cases}$$

所以 $(\cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha)(x) = \sup\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \alpha A_\alpha(x) = \sup\limits_{x \in A_\alpha} \alpha = \sup\limits_{\alpha \leqslant A(x)} \alpha = A(x)$. ■

推论 1.1.1 设 $A, B \in F(X)$, 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], A_\alpha \subseteq B_\alpha$, 或 $\forall \alpha \in R_0, A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

证明 由分解定理知成立. ■

1.1.5 模糊集合的模运算

为了使模糊集合适用于各种不同的模糊现象, 必须建立模糊集合的各种不同的运算. 模运算是模糊集合运算的最一般形式.

定义 1.1.8 映射 T: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 称为三角模, 如果 T 满足如下条件:

(1) $T(0,0) = 0, T(1,1) = 1$;

(2) $a \leqslant c, b \leqslant d \Rightarrow T(a,b) \leqslant T(c,d)$;

(3) $T(a,b) = T(b,a)$;

(4) $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$.

若三角模满足 $T(a,1) = a (\forall a \in [0,1])$, 则称 T 为 t- 模 (t-norm); 若三角模 T 满足 $t(0,a) = a \quad (\forall a \in [0,1])$, 则称 T 为 t- 余模或 s- 模 (s-norm).

例 1.1.4 下面的模是 t- 模:

极端积 (drastic product): $T_0'(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

取小算子 (minimum): $T_0(a,b) = a \wedge b = \min\{a,b\}$;

代数积 (algebraic product)：$T_1(a,b)=ab$;

Einstein 积 (Einstein product)：$T_2(a,b)=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$;

有界积或 Lukasiewicz 积 (Lukasiewicz product)：$T_\infty(a,b)=\max\{0,a+b-1\}$.

下面的模是 s- 模：

$$S_0'(a,b)=\begin{cases} b, & a=0,\\ a, & b=0,\\ 1 & \text{其他};\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b=\max\{a,b\};$$
$$S_1(a,b)=a+b-ab;$$
$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab};$$
$$S_\infty(a,b)=\min\{1,a+b\}.$$

例 1.1.5　Hamacher t- 模与 s- 模, $\forall p\geqslant 0$,

$$T^{(p)}(a,b)=\frac{ab}{p+(1-p)(a+b-ab)},\qquad S^{(p)}(a,b)=\frac{a+b+(p-2)ab}{1+(p-1)ab}$$

分别为 t- 模和 s- 模. 特别地, 当 $p=2$ 时, $T^{(2)}=T_2, S^{(2)}=S_2$; 当 $p=1$ 时, $T^{(1)}=T_1$, $S^{(1)}=S_1$.

例 1.1.6　Yager t- 模与 s- 模, $\forall p\geqslant 1$,

$T^p(a,b)=1-\min\{1,[(1-a)^p+(1-b)^p]^{1/p}\}$,　$S^{(p)}(a,b)=\min\{1,(a^p+b^p)^{1/p}\}$

分别是 t- 模和 s- 模.

若对三角模 T,S, 规定

$$T\leqslant S\Leftrightarrow T(a,b)\leqslant S(a,b),\qquad \forall(a,b)\in[0,1]^2,$$

则有

$$T_0'\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S_0'.$$

定理 1.1.4　三角模具有如下性质：

(1) 对任意 t- 模 T, 都有 $T_0'\leqslant T\leqslant T_0$;

(2) 对任意 s- 模 S, 都有 $S_0\leqslant S\leqslant S_0'$;

(3) 设 T 为 t- 模, 则 $T=T_0\Leftrightarrow T(a,a)=a(\forall a\in[0,1])$;

(4) 设 S 为 s- 模, 则 $S=S_0\Leftrightarrow S(a,a)=a(\forall a\in[0,1])$.

证明　(1) $T_0'\leqslant T$ 显然. 由于 $T(a,b)\leqslant T(a,1)=a$ 且 $T(a,b)\leqslant T(b,1)=b$, 则 $T(a,b)\leqslant a\wedge b$, 从而 $T\leqslant T_0$.

(2) 同理可证.

(3) 若 $T = T_0$, 则 $T(a,a) = a \wedge a = a(\forall a \in [0,1])$. 反之, 若 $\forall a \in [0,1]$, $T(a,a) = a$, 则 $a \wedge b = T(a \wedge b, a \wedge b) \leqslant T(a,b) \leqslant a \wedge b$, 于是 $T(a;b) = a \wedge b$, 即 $T = T_0$.

类似可证 (4). ■

定义 1.1.9 设 h: $[0,1] \to [0,1]$ 满足

(1) $h(0) = 1, h(1) = 0$; (正则性)

(2) $\forall a, b \in [0,1]$, 若 $a \leqslant b$, 则 $h(b) \leqslant h(a)$. (逆序性)

则称 h 为伪补. 若伪补 h 还满足

(3) $h(h(a)) = a, \forall a \in [0,1]$, (对合性)

则称 h 为补.

例 1.1.7 设 $s_p(x) = \dfrac{1-x}{1+px}$, $p > -1$, 则 s_p 为补, 称为 Sugeno 补. 当 $p = 0$ 时,$s_\lambda = c$, 即 $c(x) = 1 - x$, 称为线性补.

例 1.1.8 设 $y_p(x) = (1 - x^P)^{1/P}$, $p > 0$, 则 y_p 为补, 称为 Yager 补. 当 $p = 1$ 时, $y_p = c$.

定义 1.1.10 设 h 是补, $*$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 为映射 (也称为算子), 定义算子 $*^h$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 为

$$a *^h b = h(h(a) * h(b)), \forall a, b \in [0,1],$$

并称 $*^h$ 为 $*$ 关于 h 的对偶算子.

明显地, $(*^h)^h = *$, 因此对偶算子是相互的. 特别地, 若 $h = c$, 则 $*^c$ 称为 $*$ 的对偶算子. 容易证明如下定理.

定理 1.1.5 T 是 t- 模当且仅当 T^h 是 s- 模.

设 T 是 t- 模, S 是 s- 模, 若存在补算子 h 使得 $S = T^h$, 则称 (T,S) 为关于 h 的对偶模. 特别地, 若 $h = c$, 则 (T,S) 称为对偶模.

定义 1.1.11 设 $A, B \in F(X), (T,S)$ 为关于补算子 h 的对偶模, 称

$$(A \cup_S B)(x) = S(A(x), B(x))$$

为 A 与 B 的模并, 而称

$$(A \cap_T B)(x) = T(A(x), B(x))$$

为 A 与 B 的模交, 称 $A^h(x) = (A(x))^h$ 为 A 的 h 补. 若 $h = c$, 则 $A^c(x) = 1 - A(x)$ 称为 A 的补.

模糊集合的模运算是经典集合取并运算与取交运算的一般化.

1.1.6 模糊集合的表现定理

定义 1.1.12 设 X 是经典集合, 若映射 H: $[0,1] \to P(X)$ 满足: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_2) \subseteq H(\alpha_1)$, 则称 H 为集合 X 上的集合套.

我们用 $H(X)$ 表示集合 X 上的集合套所构成的集合.

对 $A \in F(X)$, 显然 $H_1(\alpha) = A_\alpha(\forall\alpha \in [0,1])$ 为集合 X 上的集合套, $H_2(\alpha) = A_{\underset{\cdot}{\alpha}}(\forall\alpha \in [0,1])$ 也为集合 X 上的集合套.

定义 1.1.13　设 $H_1, H_2 \in H(X)$, 若 $\forall\alpha \in [0,1]$, 有 $H_1(\alpha) \subseteq H_2(\alpha)$, 则称 H_1 含于 H_2, 记作 $H_1 \subseteq H_2$.

显然, $(H(X), \subseteq)$ 是偏序集.

定义 1.1.14　设 $H \in H(X), H_t \in H(X)(t \in T)$, 分别称

$$(\cup_{t\in T} H_t)(\alpha) = \cup_{t\in T} H_t(\alpha), \quad \forall\alpha \in [0,1],$$

$$(\cap_{t\in T} H_t)(\alpha) = \cap_{t\in T} H_t(\alpha), \quad \forall\alpha \in [0,1],$$

$$H^c(\alpha) = H(1-\alpha)^c, \quad \forall\alpha \in [0,1]$$

为集合套的并、交、补运算.

显然, $\cup_{t\in T} H_t, \cap_{t\in T} H_t, H^c \in H(X)$, 且 $H(X)$ 中有最大元 $\bar{X}$, 定义为 $\bar{X}(\alpha) = X(\forall\alpha \in [0,1])$. $H(X)$ 中也有最小元 $\bar{\varnothing}$, 定义为 $\bar{\varnothing}(\alpha) = \varnothing(\forall\alpha \in [0,1])$.

定义 1.1.15　设 $H_1, H_2 \in H(X)$, 若 $\forall\alpha \in [0,1]$, $\bigcap\limits_{\lambda\leqslant\alpha} H_1(\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\leqslant\alpha} H_2(\lambda)$, 则称 H_1 和 H_2 等价, 记作 $H_1 \sim H_2$, 其中 $\bigcap\limits_{\lambda<0} H(\lambda) = X$.

记 $F'(X) = \{[H] | H \in H(X)\}$, 而 $[H] = \{H' \in H(X) | H \sim H'\}$.

定理 1.1.6(模糊集合的表现定理)　存在代数同构 $(F'(X), \cup, \cap, c) \cong (F(X), \vee, \wedge, ')$, 其中同构 f: $F'(X) \to F(X)$ 定义为 $f(H)(x) = A(x) = \bigvee\limits_{\alpha\in[0,1]} (\alpha H(\alpha))(x)$, 而 f 的逆映射 g: $F(X) \to F'(X)$ 定义为 $g(A) = [H]$, 而 $H(\alpha) = A_\alpha(\forall\alpha \in [0,1])$.

证明留作作业.

1.2　L 型模糊集合与运算

本节我们把模糊集合的隶属度取值范围推广到一般的偏序集, 并研究这类广义的模糊集合及其性质.

1.2.1　格的基本性质

定义 1.2.1　称 $(P, \leqslant)$ 为偏序集, 若 P 上的二元关系 "$\leqslant$" 满足以下三个条件:

(1) 自反性: $\forall a \in P, a \leqslant a$;

(2) 反对称性: $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a \Rightarrow a = b$;

(3) 传递性: $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

如果对于任意 $a, b \in P$ 必有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$ 成立, 则称 P 为线性序集.

设 $(P, \leqslant)$ 是偏序集, 如果存在 $a \in P$ 使得 $\forall b \in P$ 都有 $a \leqslant b$, 则称 a 为 P 的最小元素. 若存在 $a \in P$ 使得 $\forall b \in P$ 都有 $b \leqslant a$, 则称 a 为 P 的最大元素. 若 P 有最