中等專業学校教科書

工業性質專業適用

高等数学

高等教育出版社

中等專業学校教科書

高等数学

工業性質專業適用

高等教育出版社

說　明

我司組織中等專業学校数学教师汪良材、張子干、張永丰、崔景星、曹安礼、楊英明、駱風和七位先生，根据我部1955年批准的300小时和410小时的中等專業学校数学教学大綱，采取分工編寫、集体討論的办法，編出了中等專業学校工業、農林、財經性質專業適用的代数、几何、三角、高等数学（工業性質專業適用）教科書。除高等数学外，这些書对醫藥性質專業也能作参考用。

这本高等数学教科書是汪良材、楊英明兩先生参照苏联塔拉索夫所著高等数学教程編寫的（汪先生具体編寫平面解析几何部分，楊先生具体編寫微積分学部分）。初稿曾在今年春天印發部分学校征求意見。根据各校寄來的許多寶貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿后，曾請北京工業学院孙樹本教授審閱，孙先生在百忙中抽时間給本書提供了進一步修正的寶貴意見，使本書在付印前能由編者再作一次修正。在这里，对孙先生的热忱帮助表示感謝。

由於时間倉促，匆匆付印，缺点在所難免。希望中等專業学校教师以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我司），以便再版时一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956年6月

高　等　数　学

([illegible]稿)

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版

北京沙灘後街一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五七號）

中華書局上海廠印刷　新華書店總經售

書號13010·130　開本850×1168 1/32　印張8 6/16　字數205,000

一九五六年九月上海第一版

一九五六年九月上海第一次印刷

印數1—100,000　定價(8) ¥0.95

目　錄

第二篇 微分学初步

第三篇 積分学初步

緒　論

同学們已經学过初等数学。在初等数学里，几何和代数各自独立，互相联系得很少。因此，大家常說：三角形和圓的性質是几何学所研究的对象，而解二次方程才是屬於代数的范圍。

本書第一篇講述“解析几何学基礎”，与以前所学几何不同，它建立在代数与几何密切結合的基礎上。說得更确切些，它是应用代数方法來研究几何形象（点、線、面等）的。

在初等几何里也曾遇到代数計算，並且許多問題是由解方程而得解決的。不过在初等几何中代数的应用不是有系統的；而在解析几何中才是全面而有系統地应用代数來研究几何圖形的本質問題。

本書的第二篇和第三篇講述“微分学”和“積分学”的基本知識。

微積分学的基礎是变量的極限概念。同学們在初等几何里也曾遇到过这个概念；但是在那里只是偶尔地应用一下；而微積分学的一切基本理論与运算法則却都是建立在这个概念之上的。

微積分学產生於三百年前。它的產生起源於物理、天文、几何和力学上一系列問題的研究。这些問題是随着科学和工程的進步而發生；而科学与工程的進步又是由生產的發展所激起。

在今天这个时代，不掌握微積分学的基本知識就不能学好任何一門技術。

微積分学的宏偉美麗大廈是由許多偉大的数学家努力建筑起來的。牛頓、萊布尼茲、欧拉、奥斯特罗格拉德斯基、車貝雪夫等姓名，射出万丈光芒，永垂不朽。

我國古代在数学上是有輝煌成就的。但近数百年由於長期处

於封建統治与帝國主义的压迫下，束縛了科学与文化的發展，造成科学与技術的落后狀态。但是，偉大的祖國今天正以飛快的速度向社会主义邁進，成千成万的科学工作者正在党和政府的領導与帮助下作最大的努力，要在十二年內消滅科学与技術的落后狀态，赶上世界先進水平，並且目前已具备了勝利完成这項任务的充分条件。因此，瞻望將來，我國数学和其他科学是有無限發展的前途，獲得比以前更輝煌偉大的成就是可以預料的。

第一篇　平面解析几何学初步

第一章　平面上直角坐标系与它在簡單問題上的应用

§1. 平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的数，叫做这个点的**坐标**；用來規定坐标的方法，叫做**坐标法**。

最簡單的一个确定平面上点的位置的方法如下：

在平面上取兩条有方向而且互相垂直的直線，这兩条直線叫做坐标軸；水平直線 Ox 叫做横軸，鉛垂線 Oy 叫做縱軸，它們的交点 O 叫做坐标原点（圖 1）。在坐标軸上分別規定出正的方向（如圖中箭头所指的）：在 Ox 軸上由原点起始向右为正，在 Oy 軸上由原点起始向上为正。

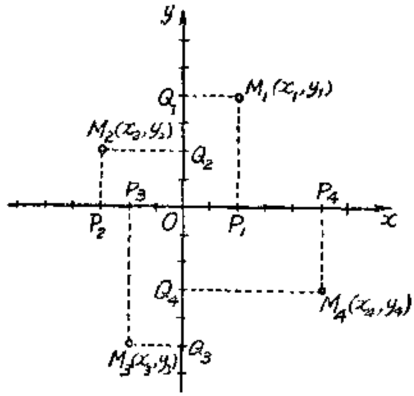

圖 1

現在对已知点 M 引入兩个数，这兩个数就是这个点的横坐标（簡称横标）x 与縱坐标（簡称縱标）y。

用一定長度單位量一点 M 至縱軸的距离所得的数，就是这一点 M 的横标 x 的絕对值，如点在縱軸的右边，这个数取正号（+）；如在左边，取負号（−）。

用同样長度單位量一点 M 至横軸的距离所得的数，就是这一

点 M 的縱标 y 的絕对值，如点在横軸的上方，这个数取正号（+）；如在下方，取負号（−）。

上面所説的兩个数 x 与 y 就是点 M 的坐标，因为它們可以完全确定平面上点的位置，也就是每一对数 x 与 y 有唯一的一点和它对应，这个点的坐标就是这一对数；反之，平面上的每一个点都有确定的坐标 x 与 y。如果点 M 有坐标 x 与 y，我們就把坐标寫在 M 的后面，以表示 M 点的位置，如 $M(x, y)$。括号內先寫横标 x，后寫縱标 y。寫坐标时，正号通常可以省略。

Ox 軸与 Oy 軸將平面分为四部分，各部分叫做象限。由兩个坐标都为正的那个象限开始，按反时針的方向依次用号碼 I，II，III 与 IV 來表示这四个象限，那么就可得到点的坐标符号表如下：

坐标＼象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

如圖 1 中的点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$ 与 $M_4(x_4, y_4)$ 有坐标：

（1）$x_1=Q_1M_1=OP_1=+2$，　$y_1=P_1M_1=OQ_1=+4$；

（2）$x_2=Q_2M_2=OP_2=-3$，　$y_2=P_2M_2=OQ_2=+2$；

（3）$x_3=Q_3M_3=OP_3=-2$，　$y_3=P_3M_3=OQ_3=-5$；

（4）$x_4=Q_4M_4=OP_4=+5$，　$y_4=P_4M_4=OQ_4=-3$。

又从圖 1 容易看出來：如果点在横軸上，則它的縱标 y 等於零；如果它在縱軸上，則它的横标 x 等於零。因此，如果点与坐标原点重合，則它的坐标皆为零。

上面所引入的坐标称为直角坐标或笛卡兒坐标（由数学家笛卡兒得名）。

笛卡兒是法國的数学家和哲学家，他在 1637 年發表过关於解

析几何学的最初著作。笛卡兒坐标系並不是使我們能夠确定平面上点的位置的唯一坐标系，但是它是最簡單的。所以，以后我們要利用它。下面我們举例說明由已知坐标求点与由已知点求坐标的方法：

例 1. 作出下列各点（圖 2）

（1）$A(-2, 0)$

（2）$B(-4, -3)$

（3）$C(-1, 2)$

（4）以 Ox 軸为对称軸，与 $D(4, -3)$ 对称的点 E.

圖 2 上就描繪出了上面的各点。

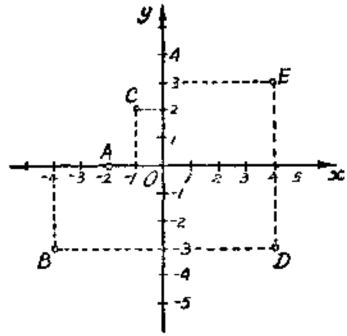

圖 2

例 2. 已知正方形的边長为 4 單位，其兩对角線与兩坐标軸重合，求其各頂点的坐标。

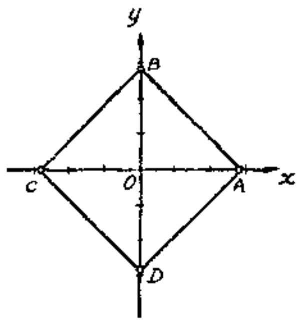

圖 3

解：設 $ABCD$ 是所給的正方形（圖 3）。

則 $OA=OB=OC=OD$

$AB=BC=CD=DA=4$

由勾股定理可得 $OA=2\sqrt{2}$

故得頂点的坐标为 $A(2\sqrt{2}, 0)$，$B(0, 2\sqrt{2})$，$C(-2\sqrt{2}, 0)$，$D(0, -2\sqrt{2})$。

§2. 兩点間的距离

假設有兩个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$。試用坐标來表示它們的距离。

設 A 与 B 的距离是 d，如圖 4 由点 A 与点 B 分別作 Ox 軸的垂線 AP 与 BQ，並經过点 A 引平行於 Ox 軸的直線 AC 交 BQ 於

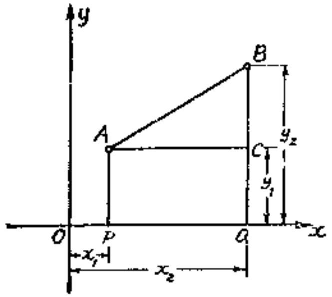

图 4

C，则得直角三角形 ABC。由勾股定理得

$$d^2=AB^2=AC^2+CB^2 \quad (1)$$

但

$$AC=PQ=OQ-OP=x_2-x_1,$$

$$CB=QB-QC=$$

$$=QB-PA=y_2-y_1.$$

將 AC 与 CB 这兩个値代入等式(1)，得

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

由此，得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (2)$$

在根式前面永远取正号(+)，因为兩点間的距离永远是正的。

应当注意，在推演公式(2)的时候，我們是假設点 A 与点 B 在第一象限的，因此，它們的坐标都是正的。同样可以証明 A 与 B 兩点在任何其他一个象限或者分別在兩个象限时，上面的公式也都是成立的。这个公式用語言叙述出來，就是：兩点間的距离等於这兩个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

在公式(2)中，如果 $x_1=x_2$，得

$$d=\sqrt{(y_2-y_1)^2}, \quad 即 \quad d=|y_2-y_1| \quad (3)$$

也就是，如果 AB 線段与縱軸平行，A 与 B 兩点之間的距离就等於这兩点縱标之差的絕对値。

如果 $y_1=y_2$，得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2}, \quad 即 \quad d=|x_2-x_1| \quad (4)$$

也就是，如果 AB 線段与横軸平行，A 与 B 兩点之間的距离就等於这兩点横标之差的絕对値。

如果兩点中有一点是坐标原点，即 $(0, 0)$，另一点的坐标是 (x, y)，那末，这一点到原点的距离公式是：

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (5)$$

例 1．试求 $A(-3, 5)$和 $B(1, 2)$兩点之間的距离。

解：由已知条件 $x_1=-3$, $y_1=5$, $x_2=1$, $y_2=2$

把这些坐标代入公式(2)，得

$$AB=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5。$$

例 2．求与已知点 $M_1(1, 2)$；$M_2(-1, -2)$；$M_3(2, -5)$等距离的一点．

解：在坐标平面上，有了点的坐标，就可以找到这个点。所以在解析几何里求点就是求它的坐标．

假設 x, y 为所求 M 的坐标．

由已知条件，得

$$M_1M=M_2M,$$

$$M_2M=M_3M.$$

按公式(2)

$$M_1M=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$M_2M=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$$

$$M_3M=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$$

於是得兩个含 x 与 y 的方程。

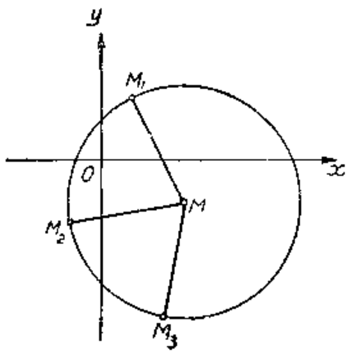

圖 5

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$$

解之，得 $x=\frac{8}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$，因此所求的点是 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$。

註：求得的这一点就是过三已知点 M_1, M_2, M_3 的那个圓的圓心。

§3．線段的定比分割

已知兩点：$A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$（圖 6），設 C 为 AB 線段內的一点，它把 AB 線段分为兩部分，使这兩部分的比值 $\frac{AC}{CB}$ 等於

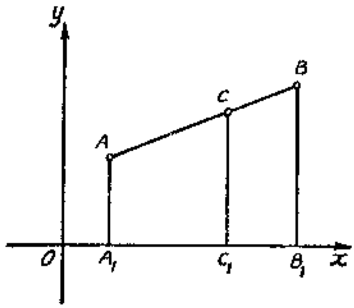

圖 6

已知数λ,我們說 C 点把線段 AB 分割成定比λ。

讓我們來求 C 点的坐标 x, y。

从平面几何学中,我們知道線段 AC, CB, A_1C_1 和 C_1B_1 成比例,根据已知条件,得:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda \qquad (6)$$

由圖 6 知,

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$

$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x。$$

將这兩式代入公式(6),得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \qquad (7)$$

对未知横标 x 解方程(4),得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

同样

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

因此,按照定比λ,分割線段 AB (看成由 A 到 B) 的点 $C(x, y)$的坐标用下列公式來确定:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

如果点 C 平分線段 AB, 則 $AC=CB$, 因此

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=1。$$

公式(8)便取得下列形式:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

也就是線段中点的坐标等於兩端点对应坐标之和的一半。

应当注意，在推演公式(8)的时候，我們假設点 A 与点 B 是在第一象限的。因此，它們的坐标都是正的。同样可以証明，公式(8)对於 A 和 B 在坐标平面上任意的位置都是正确的。

例1. 点 C 把 $A(2, 3)$ 及 $B(3, -3)$ 兩点的連線分为 2:5 的兩段，求点 $C(x, y)$ 的坐标。

解：这里，$\lambda=2:5=\frac{2}{5}$，$x_1=2$，$x_2=3$，$y_1=3$，$y_2=-3$。根据公式(8)，得

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\times 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7} \qquad y=\frac{3+\frac{2}{5}\times(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}$$

所以，所求 C 点是 $\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}\right)$。

例2. 某線段，中点是 $(-1, 2)$，一端点是 $(2, 5)$，求另一端点的坐标。

解：現在 $x_1=2, y_1=5$，及 $x=-1, y=2$ 代入公式(9)，得

$$-1=\frac{2+x_2}{2} \quad \therefore x_2=-4$$

$$2=\frac{5+y_2}{2} \quad \therefore y_2=-1$$

所以第二端点的坐标是 $(-4, -1)$。

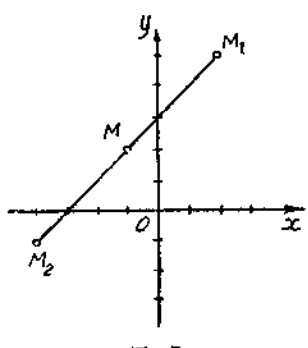

圖 7

例3. 試証：三角形兩边中点的連線平行於第三边。

証：圖形的性質和坐标的选择沒有关系。因此对於这个問題如果坐标軸选擇得适当，解法便会很簡單，否則就复雜了。所以我

們这样來选坐标軸，使原点和三角形的一頂点重合，又使 Ox 軸与这頂点的一条鄰边重合(圖 8)。这样，三角形的三个頂点便是 $O(0, 0)$，$A(x_1, 0)$，$B(x_2, y_2)$，設 CD 線是 OB 及 AB 兩边的中点的連線。我們要証明的是 CD 与 OA 平行卽与 Ox 軸平行。这只要証明 C 和 D 兩点的縱标相等就行了。

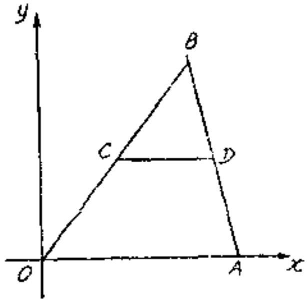

圖 8

按公式(9)，C 及 D 兩点的縱标 y_C 及 y_D 各是：

$$y_C=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2},\quad y_D=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}。$$

因此，$y_C=y_D$。卽 CD 線与 OA 線平行。

例 4．重力作用於質点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 上，它們的質量分別为 m_1 和 m_2，試求这个力系的重心的坐标。

解：从力学上知道，重心 $N(x, y)$ 必在連線 M_1M_2 上，並且它分線段 M_1M_2 所成的比与作用在点 M_1 和 M_2 上的重力成反比例。卽 $\frac{M_1N}{NM_2}=\frac{m_2g}{m_1g}=\frac{m_2}{m_1}$。这里的 g 是重力加速度。根据这一事实，我們得：

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}},\quad y=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}。$$

化簡，得

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}。$$

習 題

1．定出下列各点的位置：