

中等專業學校教科書

工業性質專業適用

高等数学

高等教育出版社

中等專業學校教科書

高等数学

工業性質專業適用

高等教育出版社

說 明

我司組織中等專業學校數學教師汪良材、張子干、張永平、章景星、曹安祿、楊英明、駱鳳和七位先生，根據我部 1955 年批准的 300 小時和 410 小時的中等專業學校數學教學大綱，採取分工編寫、集思討論的辦法，編出了中等專業學校工業、農林、財經性質專業適用的代數、幾何、三角、高等數學（工業性質專業適用）教科書。除高等數學外，這些書對醫藥性質專業也能作參考用。

這本高等數學教科書是汪良材、楊英明兩先生參照蘇聯塔拉索夫所著高等數學教程編寫的（汪先生具體編寫平面解析幾何部分，楊先生具體編寫微積分學部分）。初稿曾在今年春天印發部分學校征求意见。根據各校寄來的許多寶貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿後，曾請北京工業學院孫樹本教授審閱，孫先生在百忙中抽時間給本書提供了進一步修正的寶貴意見，使本書付印前能由編者再作一次修正。在這裡，對孫先生的熱忱幫助表示感謝。

由於時間倉促，匆匆付印，缺點在所難免。希望中等專業學校教師以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我刊），以便再版時一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956 年 6 月

高 等 數 學

（自 編 稿）

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版

北京城內東一七〇號

（北京市書刊出版業營業登記證出字第 016 號）

中華書局上海廠印刷 新華書店總經售

書號 15010-130 開本 850×1168 1/32 印數 86,116 字數 205,000

一九五六年九月上海第一版

一九五六年九月上海第一次印刷

印數 1—100,000

定價(8) 半 0.95

目 錄

緒論	7
第一篇 平面解析几何学初步	
第一章 平面上直角坐标系与它在簡單問題上的应用	9
§ 1. 平面上点的直角坐标	9
§ 2. 兩点間的距离	11
§ 3. 線段的定比分割	13
習題	16
第二章 直線	21
§ 4. 直線作为与二已知点等距离的点的軌跡 直線方程的概念	21
§ 5. 平行於坐标軸的直線方程 坐标軸的方程	24
§ 6. 角系数式的直線方程	26
§ 7. 直線方程的一般形式和它的特殊情形	29
§ 8. 通过已知点且有定方向的直線的方程 直線束	32
§ 9. 过兩已知点的直線方程	33
§ 10. 截距式的直線方程	35
§ 11. 兩直線間的夹角	36
§ 12. 兩直線平行和垂直的条件	38
§ 13. 兩直線的交点	40
習題	43
第三章 二次曲線	48
§ 14. 軌跡及曲線方程	48
習題	50
§ 15. 圓	50
習題	53
§ 16. 橢圓	55
§ 17. 橢圓形狀的研究	57
§ 18. 橢圓的离心率	59
§ 19. 橢圓与圆的关系	59
習題	60
§ 20. 双曲線	61
§ 21. 双曲線形狀的研究	63
§ 22. 双曲線的离心率	64

§ 23. 双曲线的渐近线	65
§ 24. 等轴双曲线	68
习题	70
§ 25. 抛物线	72
§ 26. 抛物线 $y = Ax^2 + Bx + C$	74
§ 27. 二次曲线是圆锥截线	77
习题	77

第二篇 微分学初步

第四章 极限的理论	81
§ 28. 绝对值概念与有关的基本公式	81
§ 29. 变量与常量	83
§ 30. 无穷小量	84
§ 31. 无穷小量的基本性质	87
§ 32. 变量的极限	89
§ 33. 关于变量的极限的基本定理	93
§ 34. 无穷大量	96
§ 35. 无穷大量与无穷小量的关系	97
§ 36. 两无穷小量的比值	99
复习问题(1—3)	99
习题(1—21)	100
第五章 导数的概念	101
§ 37. 函数	101
§ 38. 函数的几何表示法	103
§ 39. 函数的增量	103
§ 40. 函数的连续性	104
习题(22—25)	109
§ 41. 线性函数的变化率	109
§ 42. 不均匀运动及其速度	110
§ 43. 任意函数的变化率	114
习题(26—29)	115
§ 44. 导数及求导数的一般法则	116
习题(30—35)	119
§ 45. 曲线的斜率、导数的几何意义	120
§ 46. 导数的存在与函数的连续性的关系	123
习题(36—32)	123
第六章 求导数的基本公式和法则, 初等函数的导数	125
§ 47. 求导数的基本公式表	125
§ 48. 常量的导数	126

§ 49. 自变量 (即函数 $y=x$) 的導数	127
§ 50. 两个函数之積的導数	127
§ 51. 指数为正整数时的幂函数的導数	128
§ 52. 函数的代数和的導数	130
習題 (55—58)	131
§ 53. 两个函数之商的導数	133
習題 (89—96)	135
§ 54. 复合函数及其導数	135
習題 (97—109)	139
§ 55. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比 $\frac{\sin x}{x}$ 的極限	139
§ 56. 三角函数的導数	141
習題 (110—122)	144
§ 57. 数 e 、自然对数、自然对数与十进对数的換算法	144
§ 58. 对数函数的導数	146
§ 59. 指数为任何数时幂函数的導数	148
習題 (123—145)	149
§ 60. 指数函数的導数	150
習題 (146—164)	150
§ 61. 反三角函数的導数	151
習題 (165—175)	153
第七章 導数的应用——利用導数去研究函数的变化	154
§ 62. 函数的变化过程	154
§ 63. 函数的遞增与遞減	155
習題 (176—182)	157
§ 64. 函数的極大值和極小值	157
習題 (183—208)	166
§ 65. 二階導数、二階導数的力学意义	137
習題 (209—226)	169
§ 66. 确定函数極值的第二法則	170
習題 (227—242)	172
§ 67. 曲綫的凹和凸	173
§ 68. 拐点	176
習題 (243—252)	179
§ 69. 函数圖象的作法	179
習題 (253—264)	181
第八章 微分	183
§ 70. 無窮小量的比較	188
§ 71. 微分概念	184

§ 72. 函数的微分的几何意义	185
§ 73. 微分的求法	187
习题(235—274)	188
§ 74. 微分应用于近似计算	188
习题 (275—289)	193
复习问题(4—14)	194

第三篇 积分学初步

第九章. 不定积分	196
-----------	-----

§ 75. 根据函数的导数或微分求函数	196
§ 76. 不定积分	197
§ 77. 初始条件确定积分常数	201
§ 78. 由微分公式导出积分法的基本公式	204
§ 79. 直接积分法	206
习题(290—326)	208
§ 80. 代换积分法	210
习题(327—384)	217

第十章 定积分	219
---------	-----

§ 81. 定积分作为面积	219
§ 82. 用不定积分计算定积分	225
§ 83. 定积分最简单的性质	228
习题(365—376)	227
§ 84. 定积分作为和的极限	227
习题(377—390)	233

第十一章 定积分的应用	234
-------------	-----

§ 85. 定积分的应用原理	234
§ 86. 计算面积的例子	236
习题(391—402)	238
§ 87. 旋成体的体积	238
习题(403—408)	243
§ 88. 功	243
习题(409—415)	245
§ 89. 液体的压力	245
习题(416—422)	247
复习问题(15—19)	248

附录	249
----	-----

一. 解析几何习题答案	249
二. 微积分习题答案	254

緒 論

同學們已經學過初等數學。在初等數學里，幾何和代數各自獨立，互相聯系得很少。因此，大家常說：三角形和圓的性質是幾何學所研究的對象，而解二次方程才是屬於代數的範圍。

本書第一篇講述“解析幾何學基礎”，與以前所學幾何不同，它建立在代數與幾何密切結合的基礎上。說得更確切些，它是應用代數方法來研究幾何形象（點、線、面等）的。

在初等幾何里也曾遇到代數計算，並且許多問題是由解方程而得解決的。不過在初等幾何中代數的應用不是有系統的；而在解析幾何中才是全面而有系統地應用代數來研究幾何圖形的本質問題。

本書的第二篇和第三篇講述“微分學”和“積分學”的基本知識。

微積分學的基礎是變量的極限概念。同學們在初等幾何里也曾遇到過這個概念；但是在那里只是偶爾地應用一下；而微積分學的一切基本理論與運算法則却都是建立在這個概念之上的。

微積分學產生於三百年前。它的產生起源於物理、天文、幾何和力學上一系列問題的研究。這些問題是隨着科學和工程的進步而發生；而科學與工程的進步又是由生產的發展所激起。

在今天這個時代，不掌握微積分學的基本知識就不能學好任何一門技術。

微積分學的宏偉美麗大廈是由許多偉大的數學家努力建築起來的。牛頓、萊布尼茲、歐拉、奧斯特羅格拉德斯基、車貝雪夫等姓名，射出萬丈光芒，永垂不朽。

我國古代在數學上是有輝煌成就的。但近數百年由於長期處

於封建統治與帝國主義的壓迫下，束縛了科學與文化的發展，造成科學與技術的落後狀態。但是，偉大的祖國今天正以飛快的速度向社會主義邁進，成千成萬的科學工作者正在黨和政府的領導與幫助下作最大的努力，要在十二年內消滅科學與技術的落後狀態，趕上世界先進水平。並且目前已具備了勝利完成這項任務的充分條件。因此，瞻望將來，我國數學和其他科學是有無限發展的前途，獲得比以前更輝煌偉大的成就是可以預料的。

第一篇 平面解析几何学初步

第一章 平面上直角坐标系与它在 簡單問題上的应用

§ 1. 平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的数,叫做这个点的坐标;用来规定坐标的方法,叫做坐标法。

最簡單的一个确定平面上点的位置的方法如下:

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直线,这两条直线叫做坐标轴;水平直线 Ox 叫做横轴,铅垂线 Oy 叫做纵轴,它们的交点 O 叫做坐标原点(圖 1)。在坐标轴上分别规定出正的方向(如圖中箭头所指的):在 Ox 軸上由原点起始向右为正,在 Oy 軸上由原点起始向上为正。

现在对已知点 M 引入两个数,这两个数就是这个点的横坐标(简称横标) x 与纵坐标(简称纵标) y 。

用一定長度單位量一

点 M 至纵轴的距离所得的数,就是这一点 M 的横标 x 的绝对值,如点在纵轴的右边,这个数取正号(+);如在左边,取负号(-)。

用同样長度單位量一点 M 至横轴的距离所得的数,就是这一

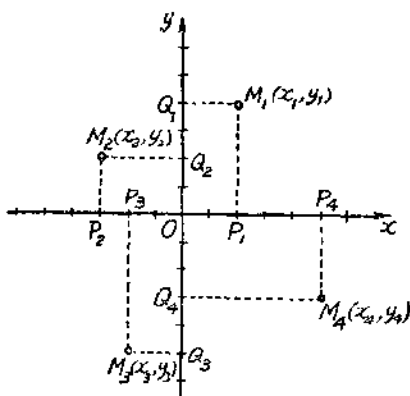


圖 1

点 M 的縱标 y 的絕對值, 如点在橫軸的上方, 这个数取正号(+); 如在下方, 取負号(-)。

上面所說的兩個数 x 与 y 就是点 M 的坐标, 因为它们可以完全确定平面上点的位置, 也就是每一对数 x 与 y 有唯一的一点和它对应, 这个点的坐标就是这一对数; 反之, 平面上的每一个点都有确定的坐标 x 与 y 。如果点 M 有坐标 x 与 y , 我們就把坐标寫在 M 的后面, 以表示 M 点的位置, 如 $M(x, y)$ 。括号内先寫橫标 x , 后寫縱标 y 。寫坐标时, 正号通常可以省略。

Ox 軸与 Oy 軸將平面分为四部分, 各部分叫做象限。由两个坐标都为正的那个象限开始, 按反时针的方向依次用号码 I, II, III 与 IV 来表示这四个象限, 那么就可得到点的坐标符号表如下:

象限 坐标	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

如圖 1 中的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ 与 $M_4(x_4, y_4)$ 有坐标:

$$(1) x_1 = Q_1 M_1 = OP_1 = +2, \quad y_1 = P_1 M_1 = OQ_1 = +4;$$

$$(2) x_2 = Q_2 M_2 = OP_2 = -3, \quad y_2 = P_2 M_2 = OQ_2 = +2;$$

$$(3) x_3 = Q_3 M_3 = OP_3 = -2, \quad y_3 = P_3 M_3 = OQ_3 = -5;$$

$$(4) x_4 = Q_4 M_4 = OP_4 = +5, \quad y_4 = P_4 M_4 = OQ_4 = -3。$$

又从圖 1 容易看出來: 如果点在橫軸上, 則它的縱标 y 等於零; 如果它在縱軸上, 則它的橫标 x 等於零。因此, 如果点与坐标原点重合, 則它的坐标皆为零。

上面所引入的坐标称为直角坐标或笛卡兒坐标 (由数学家笛卡兒得名)。

笛卡兒是法國的数学家和哲学家, 他在 1637 年發表过關於解

析几何学的最初著作。笛卡兒坐标系並不是使我們能够确定平面上点的位置的唯一坐标系,但是它是最簡單的。所以,以后我們要利用它。下面我們举例說明由已知坐标求点与由已知点求坐标的方法:

例 1. 作出下列各点(圖 2)

(1) $A(-2, 0)$

(2) $B(-4, -3)$

(3) $C(-1, 2)$

(4) 以 Ox 轴为对称轴,与 $D(4, -3)$ 对称的点 E 。

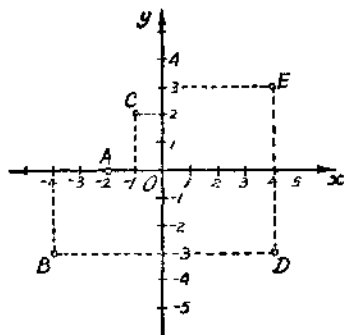


圖 2

圖 2 上就描繪出了上面的各点。

例 2. 已知正方形的边長为 4 單位,其兩对角線与兩坐标軸重合,求其各顶点的坐标。

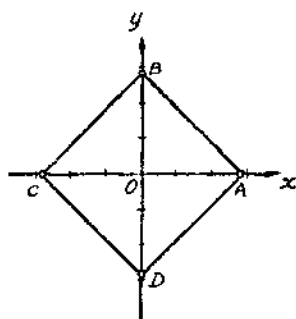


圖 3

解: 設 $ABCD$ 是所給的正方形(圖 3)。

則 $OA = OB = OC = OD$

$AB = BC = CD = DA = 4$

由勾股定理可得 $OA = 2\sqrt{2}$

故得顶点的坐标为 $A(2\sqrt{2}, 0)$,
 $B(0, 2\sqrt{2})$, $C(-2\sqrt{2}, 0)$,
 $D(0, -2\sqrt{2})$ 。

§ 2. 兩点間的距离

假設有兩個点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 。試用坐标來表示它們的距离。

設 A 与 B 的距离是 d , 如圖 4 由点 A 与点 B 分別作 Ox 軸的垂線 AP 与 BQ , 並經過点 A 引平行於 Ox 軸的直線 AC 交 BQ 於

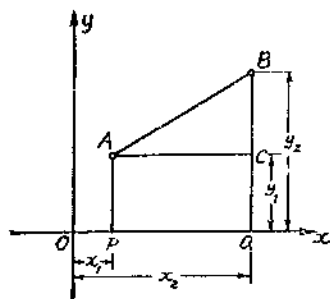


圖 4

C ，則得直角三角形 ABC 。由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2 \quad (1)$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$CB = QB - QC =$$

$$= QB - PA = y_2 - y_1.$$

將 AC 与 CB 这两个值代入

等式(1)，得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

由此，得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

在根式前面永远取正号(+), 因为兩点間的距离永远是正的。

应当注意，在推演公式(2)的时候，我們是假设点 A 与点 B 在第一象限的，因此，它們的坐标都是正的。同样可以証明 A 与 B 兩点在任何其他一个象限或者分別在两个象限时，上面的公式也都是成立的。这个公式用語言敘述出來，就是：兩点間的距离等於这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

在公式(2)中，如果 $x_1 = x_2$ ，得

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}, \quad \text{即} \quad d = |y_2 - y_1| \quad (3)$$

也就是，如果 AB 線段与縱軸平行， A 与 B 兩点之間的距离就等於这两点縱标之差的絕對值。

如果 $y_1 = y_2$ ，得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}, \quad \text{即} \quad d = |x_2 - x_1| \quad (4)$$

也就是，如果 AB 線段与橫軸平行， A 与 B 兩点之間的距离就等於这两点橫标之差的絕對值。

如果兩点中有一点是坐标原点，即 $(0, 0)$ ，另一点的坐标是 (x, y) ，那末，这一点到原点的距离公式是：

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

例1. 試求 $A(-3, 5)$ 和 $B(1, 2)$ 兩點之間的距離。

解: 由已知條件 $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 1, y_2 = 2$

把這些坐標代入公式(2), 得

$$AB = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

例2. 求與已知點 $M_1(1, 2); M_2(-1, -2); M_3(2, -5)$ 等距離的一點。

解: 在坐標平面上, 有了點的坐標, 就可以找到這個點。所以在解析幾何里求點就是求它的坐標。

假設 x, y 為所求 M 的坐標。

由已知條件, 得

$$M_1M = M_2M,$$

$$M_2M = M_3M.$$

按公式(2)

$$M_1M = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$M_2M = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$

$$M_3M = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

於是得兩個含 x 與 y 的方

程。

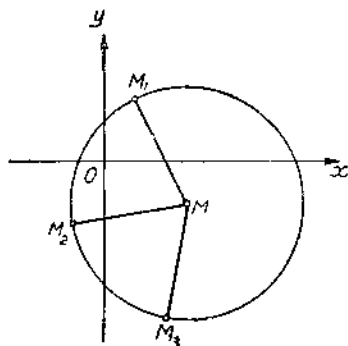


圖 5

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

解之, 得 $x = \frac{8}{3}, y = -\frac{4}{3}$, 因此所求的點是 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ 。

註: 求得的這一點就是過二已知點 M_1, M_2, M_3 的那個圓的圓心。

§ 3. 線段的定比分割

已知兩點: $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ (圖6), 設 C 為 AB 線段內的一點, 它把 AB 線段分為兩部分, 使這兩部分的比值 $\frac{AC}{CB}$ 等於

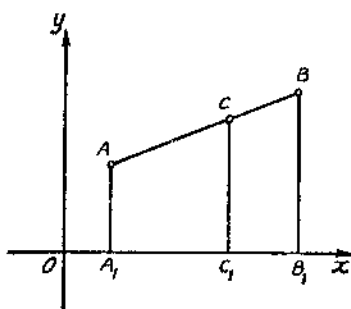


圖 6

已知數 λ ，我們說 C 點把線段 AB 分割成定比 λ 。

讓我們來求 C 點的坐標 x , y 。

從平面幾何學中，我們知道線段 AC , CB , A_1C_1 和 C_1B_1 成比例，根據已知條件，得：

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \lambda \quad (6)$$

由圖 6 知，

$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1,$$

$$C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x.$$

將這兩式代入公式 (6)，得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \quad (7)$$

對未知橫標 x 解方程 (4)，得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

同樣

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

因此，按照定比 λ ，分割線段 AB (看成由 A 到 B) 的點 $C(x, y)$ 的坐標用下列公式來確定：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

如果點 C 平分線段 AB ，則 $AC = CB$ ，因此

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = 1.$$

公式 (8) 便取得下列形式：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

也就是線段中点的坐标等於兩端点对应坐标之和的一半。

应当注意，在推演公式(8)的时候，我們假設点 A 与点 B 是在第一象限的。因此，它們的坐标都是正的。同样可以証明，公式(8)對於 A 和 B 在坐标平面上任意的位置都是正确的。

例1. 点 C 把 $A(2, 3)$ 及 $B(3, -3)$ 兩点的連線分为 2:5 的兩段，求点 $C(x, y)$ 的坐标。

解：这里， $\lambda = 2:5 = \frac{2}{5}$ ， $x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ ， $y_1 = 3$ ， $y_2 = -3$ 。根据公式(8)，得

$$x = \frac{2 + \frac{2}{5} \times 3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{16}{7} \quad y = \frac{3 + \frac{2}{5} \times (-3)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{9}{7}$$

所以，所求 C 点是 $(\frac{16}{7}, \frac{9}{7})$ 。

例2. 某線段，中点是 $(-1, 2)$ ，一端点是 $(2, 5)$ ，求另一端点的坐标。

解：現在 $x_1 = 2$ ， $y_1 = 5$ ，及 $x = -1$ ， $y = 2$ 代入公式(9)，得

$$-1 = \frac{2 + x_2}{2} \quad \therefore x_2 = -4$$

$$2 = \frac{5 + y_2}{2} \quad \therefore y_2 = -1$$

所以第二端点的坐标是 $(-4, -1)$ 。

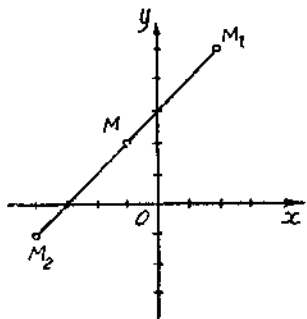


圖 7

例3. 試証：三角形兩边中点的連線平行於第三边。

証：圖形的性質和坐标的选择沒有关系。因此對於這個問題如果坐标軸选择得适当，解法便会很簡單，否則就复雜了。所以我

們这样来选坐标轴,使原点和三角形的一个顶点重合,又使 Ox 轴与这顶点的两条邻边重合(圖 8)。这样,三角形的三个顶点便是 $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, y_2)$, 設 CD 線是 OB 及 AB 兩边的中点的連綫。我們要証明的是 CD 与 OA 平行即与 Ox 轴平行。这只要証明 C 和 D 兩点的縱标相等就行了。

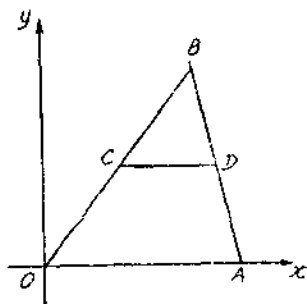


圖 8

按公式(9), C 及 D 兩点的縱标 y_C 及 y_D 各是:

$$y_C = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}, \quad y_D = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

因此, $y_C = y_D$ 。即 CD 線与 OA 線平行。

例 4. 重力作用於質点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 上,它們的質量分別为 m_1 和 m_2 , 試求这个力系的重心的坐标。

解: 从力学上知道,重心 $N(x, y)$ 必在連綫 M_1M_2 上,並且它分綫段 M_1M_2 所成的比与作用在点 M_1 和 M_2 上的重力成反比例。即 $\frac{M_1N}{NM_2} = \frac{m_2g}{m_1g} = \frac{m_2}{m_1}$ 。这里的 g 是重力加速度。根据这一事实,我們得:

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

化簡,得

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

習 題

1. 定出下列各点的位置: