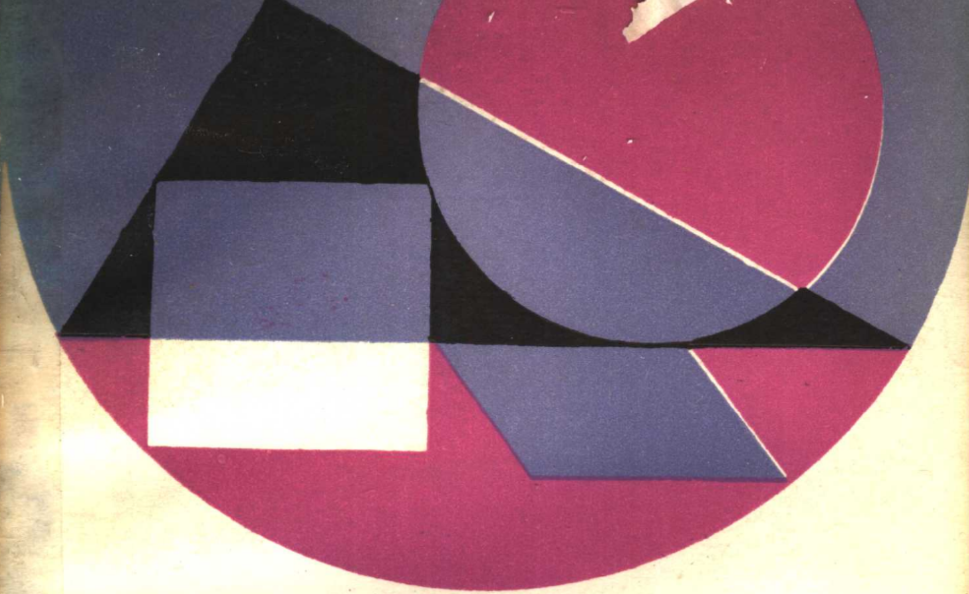

数学辅导员

初三 几何

北京师大附属实验中学
于宗英 主编

数学辅导员

初三几何

北京师大附属实验中学　　于宗英　主编

科学普及出版社

数 学 辅 导 员
初 三 几 何
北京师大附属实验中学
于宗英主编
责任编辑：刘 渔 乔洪文
封面设计：赵一东
*
科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米1/32印张：5.5 字数：121千字
1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷
印数：1—19152册 定价：1.70元
ISBN 7-110-00774-X/O·27

出版说明

《数学辅导员》是配合中学现行数学课本并参照新大纲而编写的辅导读物。我社特邀了北京师大附属实验中学、北京市师大二附中、北京市一六一中学三所市重点学校的优秀教师参加本书的编写。

本套书既然命名为“辅导员”，故既不是习题集，也不同于一般的升学考试复习指导，更不是课本的简单重复。本套书以开发学生智力、启迪学生思维为重点，在“辅导”上下功夫，着重基础知识；对学生学习中经常出现的问题，加以重点辅导；对课文重点详加分析，使学生能抓住这些中心环节；对例题指出了解题思路，典型例题还阐明了多种方法，使学生得以抓住解题突破口；习题附有答案或提示。为提高读者综合运用知识的能力，书末还安排了“赛一赛”，供读者学完全书后练习。注*者为难度较大或超范围的题目，供有余力的同学选做。

这套书编排与课本呼应，初中分五册。初三几何分册由师大附属实验中学于宗英、李光华、李令倩三位老师编写。编写过程中，门树慧、张鸿菊老师提出了宝贵的意见，在此表示感谢。

本书适合中学生平时练习或升学复习，亦适合广大青年自学参考，对中学教师备课，对在职职工的培训也有参考价值。

目　　录

第六章　相　似　形

前五章，我们学习了直线形间的相等和不等关系。例如，证明两个角相等、线段相等、三角形全等，等等。但在实际工作中，我们常常需要把图形缩小或放大来研究。例如研究中国的交通情况，我们就需要绘制一张中国交通图。这时我们一方面从图形上可以清楚地看到交通的大致情况，另一方面也可以查出两城市之间的距离。当然，如果地图只告诉我们图上的距离比实距小得多，那是不够的，我们必须知道，小多少？相当于原来实际距离的几分之几？再来计算实际距离就是简而易行之事了。象中国地图与中国实际版图这类仅大小不同但形状完全相同的图形，在几何上称之为相似形。

在相似形这一章中，首先学习有关线段度量、比例线段等知识，为学习相似形打下基础，进而研究相似三角形，最后研究特殊位置的相似形——位似形。

线段度量是比较抽象的，但如果思路清晰，掌握了讨论问题的方法，问题是可以解决的。相似三角形的判定和性质是本章的正题，自然是重点。

一、比　例　线　段

1．比例的性质

（1）比例的最基本性质是若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（A式），则$ad=bc$。

反过来，若 $ad=bc$，则有$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

由这个性质可以得到比例的其他形式：$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.〔A式交换内项〕，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$〔A式交换外项〕，$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$〔A式的内项及外项一齐交换〕；还可以把上述四个比例式的前一个比式及后一个比式一齐取反比，而得到另外四个比例式：$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$，$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$，$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$。

讲比例的不同形式是为了今后在思考证明问题时，需要什么形式，便可以用什么形式。以上内容不要求大家死记硬背。

（2）合比定理和等比定理

若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则有$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$；（合比）

若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{m}{n}$，则有$\frac{a+c+e+\cdots+m}{b+d+f+\cdots+n}=\frac{a}{b}$（等比）。要注意等比定理中，分子、分母虽然是“+”号相连，但是由于$\frac{-c}{-d}=\frac{c}{d}$，所以，$\frac{a-c+\cdots+m}{b-d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$，就是说，只要对应项前面所取“+”或“-”号相同即可。

由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，还可以得到$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$，这个性质叫做合分比定理，大家可自证之。

（3）注意灵活运用等比定理

例如：已知$x:y:z=4:7:11$，$x-2y+3z=46$，求$x+y+z$。

解法1：$x:y:z=4:7:11$这种形式就是$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}$。

不妨设$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}=a$，将$x=4a$、$y=7a$、$z=11a$代入已知式，

$\therefore\quad x-2y+3z=4a-2\times7a+3\times11a=23a=46, a=2$。

故$x+y+z=4a+7a+11a=22a=22\times2=44$。

解法2：$\because\quad \frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}$，把已知与求证对照，会发现它们可以由等比定理相联系：

$$\frac{x+y+z}{4+7+11}=\frac{x}{4}=\frac{x-2y+3z}{4-2\times7+3\times11}=\frac{46}{23}=2$$

$\therefore\quad x+y+z=(4+7+11)\times2=44$。

分析 解法1与解法2看起来是两种思路，实际区别只是有没有利用等比系数a来解题，因此这两种方法实际上还是同一种方法，后者灵活、简单些，前者易于理解。

2. 比例线段

(1) 两条线段的比及比例线段

首先来看看线段的度量。度量一个量是需要确定单位的，用单位长去度量一条线段，所得的数值称为在这个单位下的"量数"。例如，用尺为单位去度量一线段，若结果是3，那么量数就是"3"；而用米为单位去度量，当然量数就是"1"；再用厘米为单位去度量，量数就是"100"了。故量数与所取度量单位是有关的。用同一单位去度量两条线段所得的量数的比（即课本上所说的长度的比），叫做两条线段的比。这个比值显然与度量单位无关。例如用1尺为单位去度量两条线段a、b，分别得到$a=45$尺，$b=33$尺，那么$\frac{a}{b}=\frac{45}{33}=\frac{15}{11}$，若改用1米为单位去度量线段$a$、$b$，那么$a=15$

米、$b=11$米，∴ $\frac{a}{b}=\frac{15}{11}$，与前者相同。

两条线段的比与另两条线段的比相等，就说它们是成比例线段，或简称比例线段。注意这里是用量数的比例式来研究比例线段的。

（2）黄金分割（中外比）

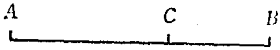

图 6-1

如图6-1，若$\frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB}$，则点$C$把线段$AB$黄金分割，或分成中外比，上述比值是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

黄金分割有一定的实用价值，优选法中的0.618法就是一例。

在生产和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目的，需要对有关因素的最佳点进行选择，所有这些选择最佳点的问题，都称之为选优问题，这类问题常通过实验方法来解决。例如为了达到某种产品质量指标，已知某种元素的最佳加入量是1000克到2000克之间的某一值。如果我们用做试验的方法来考察，在每个整数点都做试验，那就需要1000次，不仅浪费了人力、物力，也浪费了大量的时间。采用0.618法，则可在试验范围的0.618处做第一次试验，第一点加入量为$(2000-1000)\times0.618+1000=1618$（克）。在这一点的对称点处（如图6-2）做第二次试验，这一点加入量可

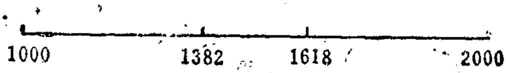

图 6-2

由公式，大－中＋小＝第二点得到．所以第二点加入量为$2000-1618+1000=1382$，比较两次试验结果，若第二点结果较第一点为好，则舍去1618以上部分，在1000—1618这段找1382的对称点做第三次试验。这一点加入量为1236克，如果仍是1382克为好，就丢掉1236克以下的一段，在留下部分1236—1618找出1382的对称点1472做第四次试验……，如此下去，直到得到满意的结果为止。这种做法，每次都可缩小试验范围的0.382，以较少的试验次数，较迅速地找到最佳点。

（3）平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。见图6-3。

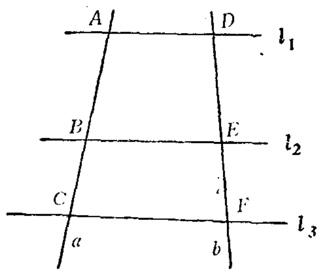

图 6-3

①在平行线分线段成比例定理中(图6-3)，若A、D在l_1上重合为一点，就得到了它的推论：平行于三角形一边的直线，截其它两边所得对应线段成比例。

平行线分线段成比例的定理的意义还在于：它把原来的平行线等分线段定理进一步推广，从而使平行(位置关系)与线段成比例(数量关系)在一定条件下互相转化。有平行线，就有可能有比例线段。但是，要注意，有比例线段不一定有

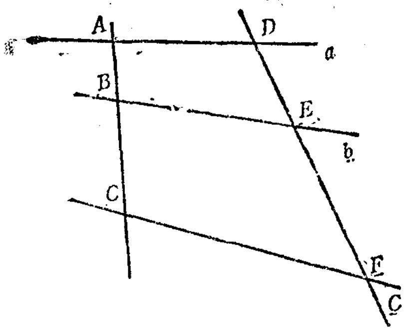

图 6-4

平行线。如图6-4，$AB=1$，$BC=2$，$DE=1.5$，$EF=3$，显然有$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}=\frac{DE}{EF}$，但是$AD$、$BE$、$CF$并不是彼此平行的。

那么在什么条件下，有比例线段一定就平行呢？这正是下一部分所要研究的内容。

(4) 三角形中平行线段的判定

①定理：如果一条直线截三角形的两边，其中一边和这边上截得的一条线段，与另一边和另一边上截得的对应线段成比例，那么这条直线平行于第三边。

分析 如图6-5，设直线DE与AB交于D，与AC交于E。把D看成定点，那么$\frac{AB}{AD}$是一个固定值，因此若有$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$，$\frac{AC}{AE}$也是一个固定值，故$E$也是一个定点。同时，过$D$作$DE' \parallel BC$交$AC$于$E'$，那么这条平行线也是唯一的。由此可知，命题符合同一法则。正因为如此，可以采用同一法加以证明。

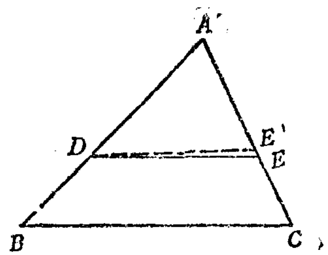

图 6-5

已知：$\triangle ABC$中，$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$（图6-5）。

求证：$DE \parallel BC$。

证明：过D作$DE' \parallel BC$交AC于E'，则$\frac{AC}{AE'}=\frac{AB}{AD}$。

又∵ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，∴ $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{AE'}$，∴ $AE=AE'$，

即E、E'互相重合。

∵ $DE'/\!/BC$，∴ $DE/\!/BC$。

将(3)的①与(4)的①加以比较，可以看到，在适当的条件下，线段成比例的条件可转化为有关直线的平行。

②课本通过例题证明了：平行于三角形一边并且和其它两边相交的直线，所截得的三角形三边与原三角形三边对应成比例。

仔细审查定理，就会发现它与前边定理的区别（如图6-6）。若 $AB/\!/CD/\!/EF$，平行线分线段成比例时，只讲 $\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BD}{DF}$，这四条线段在两条已知直线上，而与平行线上被两条直线所截线段AB、CD、EF等无关。

但当出现三角形时，如图6-7，涉及的比例线段范围扩大了：$AB/\!/CD \Longrightarrow \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{CD}$，这时把平行线被两条直线所截的线段$AB$、$CD$引入了比例式，同时还应特别注意，此时构成比例式的各条线段必须是三角形的三边。

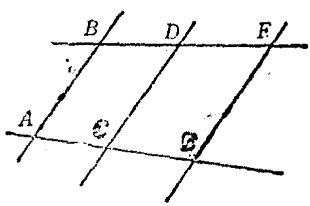

图 6-6

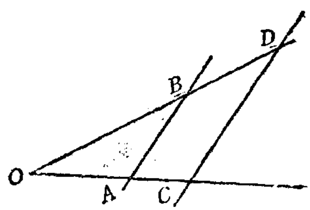

图 6-7

(5) 三角形的内(外)角平分线的性质

①三角形内(外)角平分线的性质定理证明过程，是由直线平行向线段成比例转化的一个应用。课本上已给出证明，这里不再列出。

不过，在第五章，我们已学过了面积。三角形的角平分线把三角形分割成两部分，它们是等高的三角形，故证明角平分线的性质还可用下法。

已知：$\triangle ABC$，AD平分$\angle BAC$。

求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

证明：如图6-8.

设D到AB的距离为h_1，

$\because AD$平分$\angle BAC$，$\therefore D$到AC的距离也是h_1。

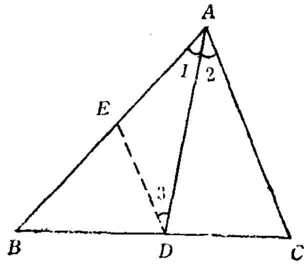

图 6-8

再设A到BC的距离是h_2，则$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot h_1}{\frac{1}{2}AC\cdot h_1}$ $=\dfrac{AB}{AC}$，$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot h_2}{\frac{1}{2}CD\cdot h_2}=\dfrac{BD}{DC}$.

$$\therefore\quad \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

②这个定理本身符合同一法则，因此可以知道它的逆命题也是正确的。可以证明如下。

已知：$\triangle ABC$中，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$(图6-8)。

求证：AD平分$\angle BAC$。

证明：过D作$DE \parallel CA$交AB于E，则$\angle 2=\angle 3$，且
$\frac{BD}{DC}=\frac{BE}{EA}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{DE}$.

$\because \quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$（已知），$\therefore \quad \frac{BE}{EA}=\frac{BE}{DE}$，$\therefore \quad EA=DE$，

$\therefore \quad \angle 1=\angle 3$，$\angle 1=\angle 2$，即$AD$平分$\angle BAC$。

同理，可以证明三角形外角平分线性质定理的逆定理。

由于定理本身符合同一法则，可用同一法证之，大家可以自己证明。

（6）关于第四比例项的作图及引申

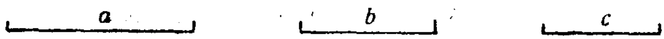

图 6-9

已知：线段a、b、c（如图6-9）

求作：线段x，使$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

分析 x叫做a、b、c的第四比例项，由于平行线与比例线段的紧密关系，可以想到如图6-10安排，x是可作的。

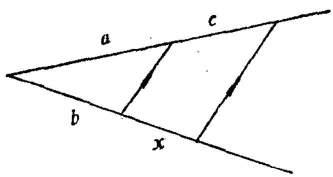

图 6-10

第四比例项的作图可以看成一个基本作图，在较复杂的问题中，需作第四比例项可以直接引用，不需再写出详细过程。应特别提出的是，a、b、c线段的位置关系，图中若b、c互换也是对的，但若将c截在b的同边上，那就错了。

与其类似的还可以利用勾股定理作出线段$x=\sqrt{a^2+b^2}$，$x=\sqrt{a^2-b^2}$（$a>b$）。这在第五章已经见到，它们的共同点

是求作的线段 x 是用一个代数式表示的。一些可用代数式表示的线段的作图，常常是较复杂作图问题的基础，以后还会多次遇到。

〔例1〕 求证顶角是36°的等腰三角形，底边与腰长之比为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

分析 由于比值恰为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，立即想到黄金分割．若是把腰分成两部分，一部分等于底的长，那么分点该是腰的黄金分割点．可是，如何在腰上取与底等长的线段才有助于问题的证明呢？题中给了36°的顶角，这里必定有文章，从这儿想一下，会发现底角为72°，恰为36°的2倍，我们自然想到了底角的平分线，那就不妨试一试。

〔证明〕 如图6-11，在$\triangle ABC$中，$\angle A=36°$，$AB=AC$，过B作$\angle B$的平分线交AC于D，则$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}$。

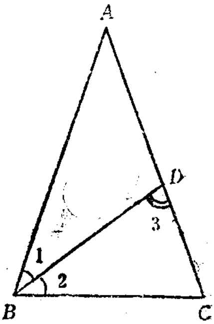

图 6-11

$$\because\quad \angle B=\angle C=\frac{180°-36°}{2}=72°,$$

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 2=\frac{72°}{2}=36°.$$

又$\angle 3=180°-\angle 2-\angle C=180°-36°-72°=72°$，$\therefore$ $AD=BD=BC$。

设$AB=AC=a$，$BC=x$，则$AD=x$，$CD=a-x$。

于是$\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{a-x}$，$x^2+ax-a^2=0$ $(x>0)$。

$$\therefore\quad x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$\therefore\quad BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a,\quad \frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

〔例2〕 如图6-12，$\triangle ABC$的高为AD，BC边的垂直平分线是EF。若$BD:DC=5:9$，$AC=45$，求AF和FC。

分析 由于F是AC上一点，故可知$AF+FC=AC=45$；又易证$AD/\!/FE$，于是可推出$\frac{AF}{FC}=\frac{DE}{EC}$．已知两线段$AF$、$FC$的和，若再能求出$\frac{AF}{FC}$的值，则$AF$、$FC$可求．已知$\frac{BD}{DC}=\frac{5}{9}$，则$\frac{DE}{EC}$可求．因此问题归结为如何求出$\frac{DE}{EC}$的值．

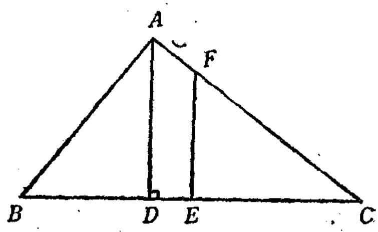

图 6-12

〔解〕 $\because$ EF是BC的垂直平分线，$\therefore$ $EF\perp BC$，且$BE=EC$。

$\because$ $\frac{BD}{DC}=\frac{5}{9}$，故可设$BD=5a$，$DC=9a$，于是

$EC=\frac{5a+9a}{2}=7a$，$\therefore$ $DE=9a-7a=2a$，

$\therefore$ $\frac{DE}{EC}=\frac{2}{7}$。

$\because$ $AD\perp BC$，$\therefore$ $FE/\!/AD$。$\therefore$ $\frac{AF}{FC}=\frac{DE}{EC}=\frac{2}{7}$。

设$AF=x$，则$FC=45-x$，$\frac{x}{45-x}=\frac{2}{7}$。

解得$x=10$，即$AF=10$；$45-x=35$，

即$FC=35$。

说明 求$\frac{DE}{EC}$的值，还可借助于合分比．$\frac{BD}{DC}=\frac{5}{9}$，即$\frac{BE-DE}{CE+DE}=$

$=\dfrac{CE-DE}{CE+DE}=\dfrac{5}{9}$，于是$\dfrac{(CE-DE)+(CE+DE)}{(CE-DE)-(CE+DE)}=\dfrac{5+9}{5-9}$. 即$\dfrac{EC}{DE}=\dfrac{7}{2}$，故$\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{2}{7}$.

想一想，如果已知中不给"如图"二字，那么画图时，还可能出现什么情况，结果又如何呢？

〔例3〕点E在线段AB上，且$AE:EB=5:3$，由A、E、B向和线段AB不相交的直线XY引垂线，垂足分别是A'、E'、B'。求证：$8EE'=3AA'+5BB'$。

分析 $\because$ $AA'/\!/BB'/\!/EE'$，$\therefore$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{A'E'}{E'B'}=\dfrac{5}{3}$. 求证的是$BB'$、$EE'$、$AA'$这些线段间的关系，它们在平行线上，为把它们和有关的比例线段定理挂上钩，显然需要把梯形化为三角形来解决.

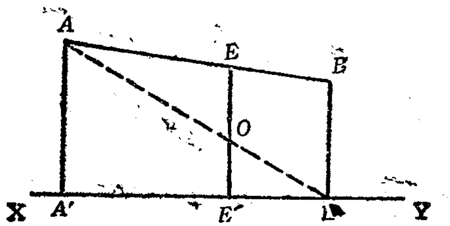

图 6-13

〔证明〕连AB'交EE'于O（如图6-13）。

$\because$ $AA'\perp xy$，$EE'\perp xy$，$BB'\perp xy$，

$\therefore$ $AA'/\!/EE'/\!/BB'$。

$\because$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{5}{3}$，$\therefore$ $\dfrac{AO}{OB'}=\dfrac{A'E'}{E'B'}=\dfrac{5}{3}$，$\therefore$ $\dfrac{OE}{BB'}=\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{OE'}{AA'}=\dfrac{3}{8}$. 于是$8OE=5BB'$，$8OE'=3AA'$，

二式相加：$8(OE+OE')=8EE'=3AA'+5BB'$。