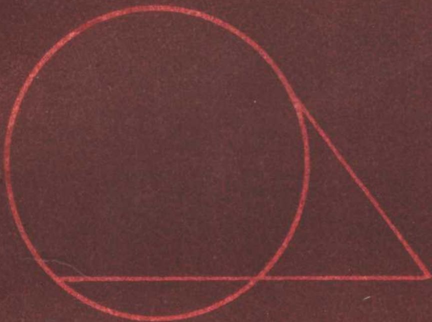

中学数学中的反证法

FZF

黑龙江科学技术出版社

中学数学中的反证法

Zhongxue Shuxuezhong de Fanzheng fa

曾广钦　庄益君　张志芳　编

黑龙江科学技术出版社

一九八四·哈尔滨

封 面 设 计： 岳大地

中学数学中的反证法

曾广钦 庄益君 张志芳 编

黑龙江科学技术出版社出版
(哈尔滨市南岗区分部街28号)
黑龙江新华印刷厂附属厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32·印张 3·字数 40 千
1984 年 9 月第一版·1984 年 9 月第一次印刷
印数：1—34,150

书号：7217·017 定价：0.38 元

内 容 提 要

本书讲述了反证法的基本概念和它在中学数学中的应用。为了便于读者掌握这一简单易行的证题方法，列举了大量的例题。书后的习题，则留给读者作为检验掌握反证法的尺子。

本书适合中学生阅读，亦可供中学数学教师参考。

目　　录

一 反证法及其原理

去掉大米中的砂粒，有两种方法。一种是直接从大米中把砂粒一粒一粒地拣出来；一种是用间接的方法——淘洗法，把砂粒残留下来。这两种方法虽然形式不同，结果却一样，都能达到去掉砂粒的目的。但直接方法困难得很，间接方法却容易得多。在数学上，也常用间接的方法来证题，当用直接的方法不容易或根本无法证明时，就用间接的方法去证明。

例 1 如果一个整数 n 的平方是偶数，那么这个整数 n 本身也是偶数。

根据"整数 n 的平方是偶数"这个条件，很难直接证明"整数 n 本身也是偶数"这个结论成立。但是，如果我们从间接方面来证明却是很容易的。

证明 假设整数 n 不是偶数，那么 n 可以写成

$$n=2K+1,\ K\in J\ (J \text{ 为整数集})$$

且有：

$$n^2=(2K+1)^2=(2K)^2+4K+1$$

因为 K 是整数，所以 $(2K)^2$，$4K$ 为偶数，即：

$$(2K)^2+4K$$

也是偶数，而

$$(2K)^2+4K+1$$

是奇数，这与已知条件 n^2 是偶数相矛盾。这就说明 n 不是偶数是错误的。故当整数 n 的平方是偶数时，整数 n 本身也是偶数。

这种间接证题的方法有一个特点：它不是直接证明结论正确，而是通过否定结论的反面来证明结论的正确。

这种推理的思想方法，在日常生活中也常用到。

例 2 某中学接到一封表扬信，信中说："八月一日上午，在火车站，你校一名学生拾到一块手表，交给了我们。他不告诉叫什么名字，边走边说：'这是我们二年一班学雷锋小组应该做的'，…希望学校调查一下该生是谁？并给予表扬…"

火车站值班室

二年一班学雷锋小组共有甲、乙、丙三人，到底是谁呢？有人说是甲拾到的，但由于某种原因要直接证实是甲拾到的确实有困难。学校是通过下面的分析，找到拾表人的：

①如果拾表的是乙，那么八月一日上午乙必在火车站，但是，这天上午乙根本不在火车站，而是帮助军属张大娘干活去了，所以，不能是乙。

②如果拾表的是丙，那么八月一日上午丙必在火车站，事实上丙到部队参加慰问演出去了，所以，拾表的也不可能是丙。

综合①、②所述，拾表的既不是乙也不是丙，而又是甲、乙、丙三人之一，当然就是甲了。

在分析过程中，首先否定甲是拾表的，从而导致与事实相矛盾的结论，进而肯定拾表的人是甲。

上面两个例子用的是反证法。

那么什么是反证法呢？

反证法不是运用论据从正面证明某一命题，而是用间接的方法去证明。先假设一个与要证明的命题相对立的反命题，使得原命题与反命题形成一对对抗性的矛盾判断，然后以反命题为前提，进行正确的充分条件假言推理，得出一个荒谬的结果(即假判断)，然后依充分条件假言推理的规则，既然结果荒谬（是假判断），必然是前提（那个反命题）是假判断，再根据排中律，与反命题相对抗的原命题就是真判断了，也就是说原命题是正确的了。

简言之，反证法是一种具有“反设——归谬——结论”三个步骤的一种证明方法。

用图例显示反证法的原理和步骤如下图(1)

记原命题若 A 则 B 为 $A\Rightarrow B$，反命题若 A 则非 B 为 $A\Rightarrow\overline{B}$。

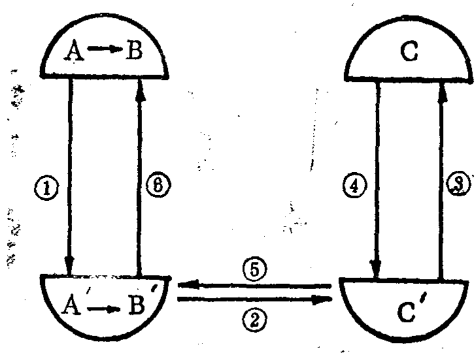

图 1

①否定结论 $\overline{B}$，作出对抗性矛盾判断 $\overline{B}$，形成反命题 $A\Rightarrow\overline{B}$；

②进行正确的充分条件假言推理，得到判断$\overline{C}$，

③为断定$\overline{C}$是假判断，把它与真判断C相比较；

④比较后得知$\overline{C}$是假判断；

⑤根据充分条件假言推理的规则，得知反命题$A\Rightarrow\overline{B}$是假判断；

⑥从而得知原命题是真判断，即原命题成立。

对以上原理和步骤的理解须注意以下几点

1. 反证法的本质核心是$\overline{B}\Rightarrow\overline{C}$。若不从$\overline{B}$出发进行推理论证，无论如何不成其反证法；若得不到假判断$\overline{C}$，即得不到矛盾，也不成其为反证法。

2. 这里的C可以是任一公理，定义、法则，明显的事实或已证明过的定理，还可以是证明过程中新构造出来的某一结果，还可以是题设条件。总之，C可以是任一真判断，因此反证法的目的就是要寻找一个明显的确凿的假判断$\overline{C}$。

3. C可以是A，这时反证法成为$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$的形式，这正是原命题的逆否命题，由于逆否命题与原命题等效，故原命题必成立。可见通过证逆否命题来证明原命题仅是反证法的一种特例，是一种简单的情形。

4. 不允许$\overline{C}$就是B。若产生这种情形，可能是原命题本身有矛盾，也可能是推理过程不正确，这时要重新审查题目，重新正确推理；还可能是原命题本身是无法证明的悖论，反证法亦无能为力了。

二　反证法的基本思想

从例1，例2可以看出，反证法的基本思想是：否定结论就会导致矛盾。这种基本思想可以用下面的公式来表示：

"否定——推理——矛盾——肯定。"

"否定"——假设所要证明的结论不成立，而结论的反面成立。即首先否定结论。

"推理"——从原条件和假设出发，引用一系列的论据进行推理。

"矛盾"——通过推理，导致矛盾，即得出与已知条件，定义，公理，定理或明显的事实相矛盾的结果。

"肯定"——由于推理过程正确，矛盾产生的原因是由假设所引起，因此假设是错的，从而肯定原结论的正确。

三　怎样否定结论和导致矛盾

否定结论是反证法的第一步，它的正确与否，对于反证法有着直接的影响。初学者往往对于反证法的基本思想不理解，不是首先去否定结论，而是否定已知，所以无法导致矛盾。

那么，怎样否定结论呢？一般说来，有以下三步：

1. 分清结论本身的情况。

2. 分清结论反面的全部情况，既不能多，也不能少。

3. 否定时，在结论前面加一个“不”字（或“不是”）。

例 3　求证三角形中最多有一个鈍角。

结论本身的情况：“三角形中最多有一个鈍角”。

结论反面的全部情况：三角形中有两个鈍角或有三个鈍角。

在证明开始时，可在结论前面加一个“不”字（或“不是”）。即假设三角形中最多不是有一个鈍角，也就是说有两个或三个鈍角。

导致矛盾是反证法的第二步，能否导致矛盾，是反证法的关键。

怎样导致矛盾呢？一般来说，根据条件和假设，通过推理导致出下列矛盾之一即可：

1. 与题设相矛盾

2. 与定义相矛盾

3. 与公理相矛盾

4. 与定理相矛盾

5. 与客观事实相矛盾

6. 自相矛盾

导致矛盾就是通过结论被否定暴露出相反判断的不相容性。

例 4 有四个口袋，每个口袋最多可以装两个球。试证明，至少有两个口袋里装的球的个数相等。

结论本身的情况：至少有两个口袋里装的球的个数相等。即有两个口袋里装的球的个数相等，或三个口袋里装的球的个数相等，或四个口袋里装的球的个数相等。

结论反面的全部情况：每个口袋里装的球的个数都不相等。

证明 假设不是至少有两个口袋里装的球的个数相等，即每个口袋里装的球的个数都不等，那么每个口袋里装的球的个数分别为零个，一个，二个，三个（或三个以上），这样至少有一个口袋里装的球的个数有三个，（或以上），显然与“每个口袋里最多可以装两个球”相矛盾，因此，假设“每个口袋里装的球的个数不相等”是不成立的。从而，至少有两个口袋里装的球的个数相等是正确的。

注意在推理过程中，必须抓住结论的反面成立这个前提，才能导致矛盾。

四　反证法的步骤

从上面的例子，我们可以看出，应用反证法证明数学命题时，一般分以下几步：

1. 分清原命题的条件和结论。

2. 否定原结论，即假设原命题结论的反面成立。

3. 由原命题的条件和“否定原结论”这个新的条件出发，应用正确的推理方法，导出矛盾的结果。

4. 断定产生矛盾结果的原因，在于“否定原结论”这个新的条件不正确，于是肯定原结论成立。

在运用反证法证题时，必须周密考察原命题的结论，并找出结论反面的所有情况，因为结论的反面可能只有一种情况，也可能有多种情况，当结论的反面只有一种情况时，只要否定这一种情况就能证明原结论正确，这种反证法叫归谬法；当结论的反面有多种情况时，必须一一予以否定才能证明原命题的正确，这种反证法又叫穷举法。

例 5　一条直线如果与两个平行平面中的一个相交，必定和另一个也相交。

已知　平面 $\alpha // $平面 β，直线 $l \cap \alpha = A$ 如图 2。

求证　直线 l 与平面 β 也相交。

证明　假设直线 l 与平面 β 不相交，那么直线 l 与平面 β 的位置关系有两种可能：①直线 l 在平面 β 内；②直线 l 与

平面 β 平行.

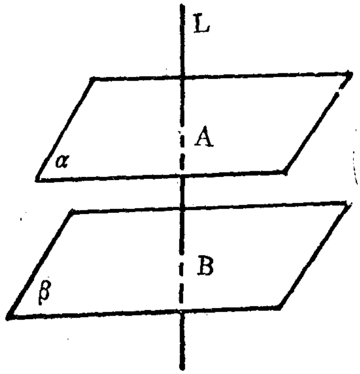

图 2

①如果直线 l 在平面 β 内，那么直线 l 与平面 α 的交点也在平面 β 内，也就是说平面 β 与平面 α 有一个公共点，根据平面公理，这两个平面必相交于过这点的直线，这样与题设条件"平面 α 与平面 β 平行相矛盾"，因此直线 l 不可能在平面 β 内.

②如果直线 l 与平面 β 平行，因为 $\alpha//\beta$，所以直线 l 与平面 α 平行，或者在 α 内，这与题设条件"直线与平面 α 相交于 A 点"相矛盾，因此，直线 l 不可能与平面 β 平行.

由①、②可知，直线 l 与平面 β 相交.

本题的结论反面有两种情况，必须将它们一一否定，才能获得结论的正确.

五　反证法的应用

反证法是一种重要的证题方法，在中学数学的证题中经常用到它。

以下我们举例说明反证法在中学数学各分支中的应用。

（一）反证法在平面几何中的应用

因为反证法的关键是找矛盾，所以我们从导致什么样的矛盾角度出发，来谈谈反证法在平面几何中的应用。

1. 导致与已知矛盾的例子.

例 6　试证　两条直线相交只有一个交点.

已知　直线 a 与直线 b 相交

求证　直线 a 与直线 b 只有一个交点

证明　假设直线 a 与直线 b 有两个交点，根据直线的基本性质“经过两点有一条直线，并且只有一条直线”，直线 a 与直线 b 就互相重合，成为一条直线，这与已知两条直线相矛盾，所以两条直线相交有两个交点是错误的．故两条直线相交，只有一个交点.

例 7　同底的两个三角形，若另一个顶点都在底的同侧，且顶角相等，则两三角形有公共外接圆.

已知　在图 3 中

$\angle ACB = \angle ADB$

求证 A、B、C、D四点共圆

证明 过A、B、C三点作圆O，若D点不在圆O上，则D点与圆O的位置有以下两种情况：

①D点在圆O内，则$\angle ADB$为圆O的圆内角，故$\angle ADB > \angle ACB$，这与已知条件$\angle ADB = \angle ACB$相矛盾，所以D点不能在圆O内。

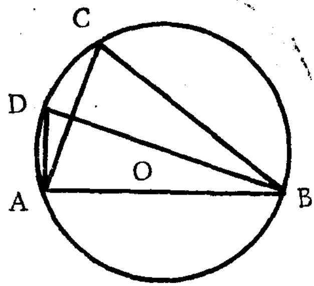

图 3

②D点在圆O外，则$\angle ADB$为圆O的圆外角，故$\angle ADB < \angle ACB$，这与已知条件$\angle ADB = \angle ACB$相矛盾，所以D点不能在圆O外。

由①、②可知，D点必在圆O上。

$\therefore$ A、B、C、D四点共圆。

例8 求证 三角形两顶点分别到对边的线段不能互相平分。

已知 AD、BE分别是从A、B到对边BC、AC的线段。

求证 AD、BE不能互相平分。

证明 假设AD、BE互相平分于O点，即

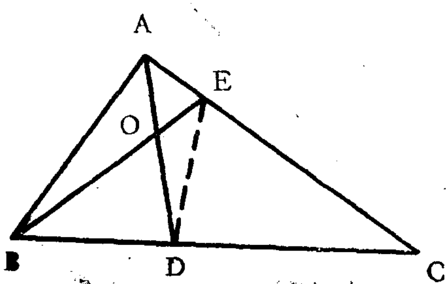

图 4

$AO=OD$, $BO=OE$

连 DE，则 $ABDE$ 是平行四边形，$AC//BC$ 这与已知 AC、BC 是$\triangle ABC$ 的两边相矛盾，所以，AD、BE 不能互相平分。

2 导致与公理相矛盾的例子

例 9 求证 在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线不能相交。

已知 直线 a、b、c 在同一平面内，且 $a\perp c$，$b\perp c$

求证 直线 a、b 不能相交

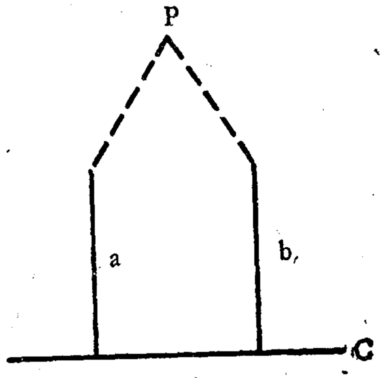

图 5

证明 假设直线 a、b 相交于 P 如图（5），那么，在同一平面内过 P 点有两条直线 a、b 同时垂直于同一直线 C，这和垂直公理"经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线"相矛盾，所以直线 a、b 不能相交。

例 10 在平面内如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

已知 直线 a、b、c

$a//b$，$c//b$

求证 $a//c$

证明 假设直线 a、c 相交于 P 如图(6)，那么过 P 点有两条直线 a、c 都与直线 b 平行，这和平行公理"经过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行"相矛盾，即直线