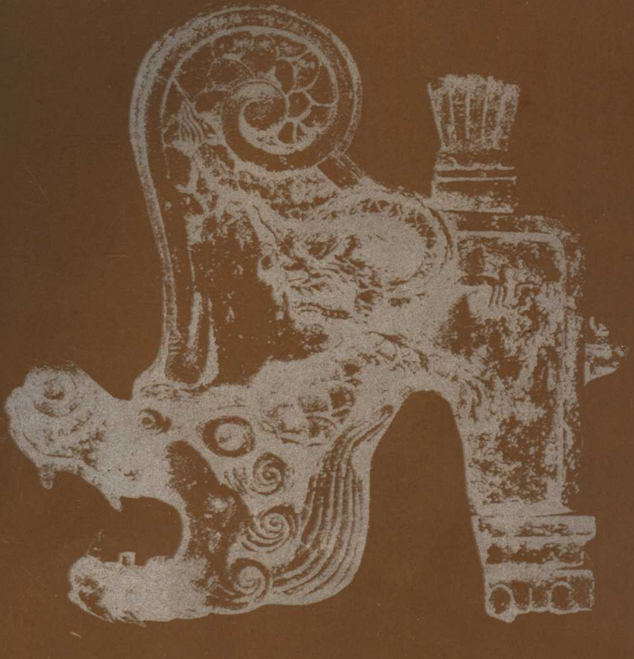
创建世界高水平大学项目资助教材

佟文廷 著

代数 K-理论

Algebraic K-Theory

南京大学出版社



创建世界高水平大学项目资助教材

佟文廷 著

代数K-理论

Algebraic K-Theory

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数K理论/佟文廷著.—南京:南京大学出版社,
2005.6

创建世界高水平大学资助教材

ISBN 7-305-04459-8

Ⅰ.代…　Ⅱ.佟…　Ⅲ.代数K理论-高等学校-教
材　Ⅳ.O154.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第040346号

丛 书 名　创建世界高水平大学教材
书　　名　**代数K理论**
著　　者　佟文廷
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编210093
电　　话　025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子邮件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　南京大众新科技印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张　22　字数　394千
版　　次　2005年6月第1版　2005年6月第1次印刷
印　　数　1-1500
ISBN 7-305-04459-8/O·344
定　　价　34.00

引　言

代数 K-理论是环上(特别是域上)线性代数的推广与深化(尤其是处理"大矩阵"的极限情况，即对一个环 R，将 $A\in R^{n\times n}$ 视作 $\begin{pmatrix}A & \\ & I_\infty\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}A & \\ & O_\infty\end{pmatrix}\in R^{\infty\times\infty}$)。对一个环 R，代数 K-理论给出一系列 Abel 群 K_i，$i\in\mathbb{Z}$，作为环 R 的"不变量"，是刻画环的先进工具之一。事实上，K_i 都是环范畴$\mathfrak{R}$ing 到 Abel 群范畴$\mathfrak{A}$G 的(共变)函子。在这些 K_i 群中最重要的是 K_0 群、K_1 群及 K_2 群，而最基本的是 K_0 群(可看作是域上线性空间维数理论的推广，它是由有限生成投射模范畴中元素的同构类定义的 Abel 群，本书中将给出三种等价的定义)。K_1 群可看作是环上可逆矩阵的行列式研究的深化，事实上是环上可逆矩阵群(一般线性群)在极限情况下的 Abel 化。而从范畴的角度上看，它又可由 K_0 群导出，至于 K_2 群则可看作是环上的初等矩阵群(在极限情况下)泛中心扩张的核。从同调的角度上看，K_1，K_2 群又都是相应群的同调群。对这些内容，本书中都给出详细的介绍。

代数 K-理论在代数数论、代数拓扑、代数几何及算子代数等学科中起着重要的作用。比如，代数数论中起源于 Fermat 大定理研究中的因子分解问题的代数数域(有理数域$\mathbb{Q}$的有限扩张域)F 的类数计算，这事实上已归为 $K_0(O_F)$的研究，这里的 O_F 为 F 的代数整元环。作为五维以上流形分类的主要工具，拓扑学中的 Whitehead 挠(torsion)，实质上是所研究的拓扑空间之基本群 π 的整群环$\mathbb{Z}\pi$ 的 K_1 群 $K_1(\mathbb{Z}\pi)$的元素。在研究连通拓扑空间何时同伦等价于一个有限 CW-复形的问题中，1965 年 C. T. Wall 进一步地研究了由有限复形支配的拓扑空间 X(即 X 的奇异复形 $S(X)$链同伦等价于一个有限长的有限生成投射模的复形)，他定义了广义 Euler 示性数(特征标)$\chi(X)\in K_0(\mathbb{Z}\pi)$，其中 π 为 X 的基本群。而通常的 Euler 示性数即 Betti 数(X 的系数在某一环 R 中的第 i 个同调群 $H_i(X;R)$之秩)的交错和。对广义 Euler 示性数，Wall 证明了：X 存在有限自由复形的同伦型等价于$\chi(X)\in\mathbb{Z}$，即在约化 K_0 群 $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi)$中 $\chi(X)$为 0，用拓扑语言来说，即

Wall 定义的有限性障碍(Obstruction)消失。现在 K_0 群也常称为 Grothendieck 群,是为了纪念在代数 K-理论中作出奠基性贡献的 Grothendieck。1957 年他关于代数几何中著名的 Riemann-Roch 定理的推广是他从事 K-理论工作的源泉。Riemann-Roch 定理给出了两个上同调空间的维数差公式,这些维数差都可在(一般)环的 K_0 群中对有限生成投射模得到优美的类比。对于群论,研究算术群(李群中带有算术性质的一类离散子群,如实数域中$\mathbb{R}$的整数加群$\mathbb{Z}$,$GL_n(\mathbb{R})$ 中的 $GL_n(\mathbb{Z})$,$SL_n(\mathbb{R})$ 中的 $SL_n(\mathbb{Z})$,或更一般地代数数域 F 中代数整元环 O_F 上的 $SL_n(O_F)$,$GL_n(O_F)$ 等都是,这里 GL_n 表 n 阶一般线性群(n 阶可逆矩阵群),SL_n 表特殊线性群(行列式为 1 的 GL_n 之子群)中是否每一个有限指数的子群都包含一个同余子群,即著名的同余子群问题(比如,对交换环 R 上的 $SL(R)\equiv\varinjlim SL_n(R)$。任取 $J\lhd R$,则称 $SL(R,J)\equiv\{A\in SL(R)\mid A\equiv I(\mathrm{mod}\ J)\}$ 为 $SL(R)$ 关于理想 J 的同余子群)。同余子群问题在单群分类中有重要的意义,它与 K_1 群的计算也是密切相关的。关于 K_2 群,目前在代数数论中计算或估计代数数域 F 之代数整元环 O_F 的 K_2 群,仍是热门的前沿课题之一,有大量的问题尚待研究。至于高阶 K 群(K_i 群,$i\geqslant 3$),尤其是域与整数环的高阶 K 群,因与 L-函数的特殊值有密切关系,因而能反映出数论中的一些信息,已受到数论研究者的重视。对于算子代数,代数 K-理论(尤其是 K_0 群与 K_1 群)已成为有力的工具之一。近期的成果十分丰富,二十世纪八十年代即已出现精彩的算子代数的 K-理论专著。

在二十世纪五十年代尚无代数 K-理论这一术语出现,第一本代数 K-理论专著[Bass,1968]是 H. Bass 在 1968 年完成的(R. S. Swan 1968 年的专著[Swan,1968]以 Bass 的书作参考文献),1978 年数学的 Fields 奖授于 1976 年解决 Serre 猜测的 D. Quillen 后,这一学科更加引人注目。1990 年之前在美国《数学评论》(Math. Rev.)与德国《数学文摘》(Zbl)的分类中,代数 K-理论还只是隶属于同调代数的小分支。1985 年作者在美访问时,不少同行告知,他们已强烈要求将代数 K-理论单列为大学科,在 1991 年,这两家权威杂志的分类(2000 年分类也是)中已将代数 K-理论列为与数论、复变函数、泛函分析、几何学、偏微分方程等并列的大学科)(19××)。由此也可看出代数 K-理论的发展速度与重要性。

代数 K-理论对拓扑学与几何学中的向量丛理论的应用特别引人注目。设 E,B 为两个拓扑空间,$p:E\to B$ 为连续(满)映射。$\forall b\in B$,原象 $p^{-1}(b)$

称为 p 在 b 上的纤维(fibre),三元组(E,p,B)称为 B 上的一个丛(bundle),B 称为此丛的基空间,E 称为此丛的全空间,p 则称为其丛投射。若又有连续映射 $s:B\to E$ 使 $ps=I_B$(B 上的恒同映射),则称 s 为此丛的一个截面(section)。一般地,截面未必存在,如二维球面 S^2 上不存在连续的切向量场。当丛(E,p,B)的每一个纤维都有某固定域 F 上的有限维向量空间结构且它们的维数连续(即 $\forall b\in B$,都有 b 的邻域 $U(b)$使 $U(b)$上的纤维都有同一维数(对 F-向量空间))时,(E, p, B)又称为向量丛。1930年,这个概念首次出现在流形的拓扑与几何问题中。1950 年有较完美的形式与理论。1960 年,M. F. Atiyah 与 F. Hirzebruch 沿 Grothendieck 的研究方向作出了出色的工作,发展了这一理论。1955 年,J. P. Serre 得到了一个关键性的结果:仿射簇(affine variety)(代数曲线、代数曲面的抽象与概括)上的向量丛与此簇的坐标环上的有限生成投射模之间有一一对应的等价关系,后来,当域 $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$(复数域)、$\mathbb{H}$(四元数体),以 $\mathrm{C}(X)$表示 X 到域 F 的连续函数环时,此结果被推进为:紧致 CW-复形 X 上的 F-向量丛范畴自然等价于 $\mathrm{C}(X)$上的有限生成投射模范畴。1962 年,R. W. Swan 又将此结果更进一步地推广为:当 $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$ 时,紧致 Hausdorff 空间 X 上的 F-向量丛范畴自然等价于 $\mathrm{C}(X)$上的有限生成投射模范畴。由此建立了一座大桥,沟通了拓扑 K-理论与代数 K-理论的许多结果与方法。作为一个例子,我们来简述一下拓扑学中 K^0 群与代数 K-理论中的 K_0 群的一个优美关系。对 B 上的两个丛 $\xi_1=(E_1,p_1,B)$与 $\xi_2=(E_2,p_2,B)$定义它们的直和(也称 Whitney 和,纤维积)为 $\xi_1\oplus\xi_2=(E_1\oplus E_2,q,B)$,其中 $E_1\oplus E_2=\{(e_1,e_2)\mid p_1(e_1)=p_2(e_2),e_1\in E_1,e_2\in E_2\}$,$q(e_1,e_2)=p_1(e_1)(=p_2(e_2))$。对两个丛$(E,p,B)$与$(E',p',B')$,其丛同态定义为$(u,f):(E,p,B)\to(E',p',B')$,其中 $u:E\to E'$,$f:B\to B'$为使 $p'u=fp$ 的连续映射。

当 $B=B'$,$f=I_B$ 时 u 即 B 上丛范畴中的态射(morphism),由此可定义丛同构。并用$[E]$表示丛(E,P,B)所在的同构类。不难看出$\oplus$对同构类诱导一个相容的运算(仍记为$\oplus$,与代表元选取无关)。于是

$\mathcal{B}\mathrm{un}(B)=\{[E],\oplus\mid(E,p,B)$为丛$\}$,

$\mathcal{V}\mathrm{ec}(B)=\{[E],\oplus\mid(E,p,B)$为向量丛$\}$

都是 Abel 半群(且有零元素,因而又是带幺半群(monoid))。在§1 中我们将对每一个 Abel 半群进行“(群)完备化”得到同构意义下惟一的 Abel 群。将$\mathcal{V}\mathrm{ec}(B)$的(群)完备化记为 $\mathrm{K}^0(B)$,将有限生成投射 $\mathrm{C}(B)$-模的同构类所

成的 Abel 半群的群完备化记为 $K_0(C(B))$。由上述的 Swan 的结果可知，当 B 为紧致 Hausdorff 空间时，$K^0(B)\simeq K_0(C(B))$（事实上还是环同构）。因此拓扑学中 K^0 群的计算常可归为代数计算。

本书是作者在南京大学近二十年讲稿的基础上写成，主要立足于介绍代数 K-理论及其应用的基础性内容，其中包含了作者及学生们在业师周伯埙先生指导下所得的部分结果，也包含着作者本人尚未发表的一些结果，前12（或前 10）节可作为数学系硕士或博士研究生（或学习代数方向的高年级本科生）一学期讲课内容（对本科生必要时补一点投射模基础即可）。后 19（或后 21）节即可作为博士生进一步学习的内容。

从另一角度看，本书又是一本代数 K-理论的入门性专著。阅读本书的读者（只要求学过线性代数与近世代数）当有能力在各节中解答一些问题，比如补上未加详述的证明；从各节设立的一些注中找出研究性的问题；也可从自己熟悉的学科出发去找应用，或参考[Silvester，1981]与[Rosenberg，1994]等书中的习题进行练习。因此，为了不约束读者的思路，本书不再另设习题。此外，我们认为在阅读或学习本书之前读一下[周伯勋，1988]与[佟文廷，1998]将是有益的。

按照惯例，本书中的环均指有单位元的结合环，（左、右）环模均指酉模，本书的参考文献中，外语论文的作者按字典序排列。同一作者的论著将用作者（或第一作者）的姓（名）（而不是姓的第一字母）后加发表年代作序号按发表期排列，同一作者同一年发表的不同论著则在年代后再标下足码 1，2，…。中文作者的文献则按笔划序，这将会给读者带来方便。

定理、命题、推论与引理的编码中第一数字为其所在节数，第二个数字为在该节中的序号。比如定理 2.1 表示 §2 中的第 1 条定理，这样，读者在阅读后文用到前面的结果时是会感到方便的，因为本书中的节次（虽然分到各章）统一编号，无重复。

在本书中除（外国）人名及环类缩写字母外，凡是可作为函子（或与函子有密切联系）的字母也都用正体，以求醒目。为方便读者，本书后面列有常用符号表，以备读者查阅。

本书是在南京大学的支持与鼓励下完成并出版的。在本书稿的多年使用中，听课的研究生（如今已有十余位在教授岗工作，其中七位在博士生导师岗工作）提出了许多宝贵意见。这两年听课的研究生（欧阳柏玉，唐高华，周德旭，黎奇升，张良云，祝家贵，卢丹诚，吴俊，肖光世，陈卫星，张洪波，毛

立新，王永铎，石小平，张国印等）还对打印稿作了极为细心的校正，在此也一并致谢。

本书尽管经过了多年的努力，限于著者的水平，不妥之处，甚至错误之处，仍难以免除。敬请专家、学者以及本书的读者们不吝指正。

佟文廷

2003年5月于南京大学

目　　录

第一章　K_0 群的基础理论

本章是 K_0 群的最基本的理论，主要是介绍 K_0 群的三种等价定义。第一种定义立足于半群的完备化，将环 R 的 K_0 群定义为有限生成投射(左) R-模同构类对加法所成的交换半群的(群)完备化，一个由 R 确定的 Abel 群；第二种定义立足于自由 Abel 群的商群；第三种定义则立足于在线性代数中早已为读者熟悉的幂等矩阵。我们证明了这三种定义的等价性以及 K_0 的函子性。作为应用，本章还介绍了一些 K_0 群结构或性质反映出的环性质。对不带单位元的环，也给出了 K_0 群的定义，并且证明了这种定义对有单位元环(本书中除特别声明外，所用到的环都指有单位元的结合环)使用所得的 K_0 群与上述的三种定义是一致的(同构的)。对概括广的重要环类——半局部环，在§3 中证明了半局部环的 K_0 群必为 $\mathbb{Z}^n$ 形的有限生成自由 Abel 群，同时给出了对群环的应用。在这一节中从 K_0 的函子性出发，又给出了一类 IBN 环(特别是交换环)以约化群作直和项的 K_0 群分解。在§2 中，用 K_0 的函子性还给出了多项式环及群环的 K_0 群的分解。在§4 中介绍交换环的局部化及有限生成投射模的局部秩，利用 K_0 群给出了环连通性及拓扑空间连通性方面的有意义的结果，更显示了 K_0 群的应用价值。

§1　环的 K_0 群(Grothendieck 群)

先从半群的(群)完备化谈起，以给出 K_0 群的第一种定义法。事实上，由非负整数加法半群 $\mathbb{N}$ 得到整数加群 $\mathbb{Z}$，或由乘法半群 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 得到有

理数乘法群 $\mathbb{Q}^*$ 都是半群完备化的结果。知道交换整环(无零因交换环)的分式域或更进一步地知道交换环局部化的读者将会看出,下面用到的方法实质上是构作分式域或局部化方法的特殊化(这里只牵扯到一种运算)。

设 S 为交换(加法)半群,但未必有单位元(零元)。在 $S\times S$ 上定义关系

$$(x,y)\sim(u,v)\Leftrightarrow \exists\ t\in S$$

使

$$x+v+t=y+u+t,\quad \forall\, x,y,u,v\in S$$

(当 S 为可消半群时,t 可省去)。显然,这是一种等价关系,记 $[(x,y)]$ 为 (x,y) 所在的等价类。并定义运算

$$[(x,y)]+[(x',y')]=[(x+x',y+y')],\forall\, x,y,x',y'\in S$$

不难看出,这是与上述等价关系相容(即与代表元选取无关)的且满足结合律与交换律的加法运算。同时

$$[(x,x)]=[(y,y)],\qquad \forall\, x,y\in S$$

即为此运算下的零元素(简记为 0)。于是由

$$[(x,y)]+[(y,x)]=[(x+y,x+y)]=0$$

知

$$[(x,y)]=-[(y,x)],\qquad \forall\, x,y\in S$$

这样,我们就由 S 得到一个加法 Abel 群,记为 $G=S\times S/\sim$。对 S 与 G 可定义一个标准的半群同态(建议读者自证:此标准同态为单同态 $\Leftrightarrow$ S 为可消半群)

$$\varphi\colon S\to G;\quad x\mapsto[(x+x,x)]$$

显然 φ 的象 $\mathrm{Im}\varphi$ 生成 G(记为 $\langle\varphi(S)\rangle=G$ 或 $\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle=G$)。现在来证明标准同态 $\varphi\colon S\to G$ 或者说 (G,φ))有如下的泛性质(universal property),记为 $(G,\varphi)\in\mathrm{UP}$ 或简记为 $\varphi\in\mathrm{UP}$,有时也记为 $G\in\mathrm{UP}$。

UP:对任意的群 H 与任意的半群同态 $\psi\colon S\to H$,$\exists$(存在惟一)群同态 $\theta\colon G\to H$ 使右图为交换图:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\forall\psi"'] & G \arrow[dl, dashed, "\theta\ \exists 1"] \\ \forall H & \end{tikzcd}$$

即 $\theta\varphi=\psi$(用范畴语言来说,即 $S\xrightarrow{\varphi}G$ 为范畴 $\{S\xrightarrow{\psi}H\mid H$ 为群,ψ 为半群同态$\}$(其中的态射用交换图常规地定义))中的始对象。

事实上,定义 $\theta([(x,y)])=\psi(x)-\psi(y)$,$\forall\, x,y\in S$,可直接验知 θ 为群同态且

$$\theta\varphi(x)=\theta([(x+x,x)])$$

$$= \psi(x+x) - \psi(x) = \psi(x), \forall x \in S$$

因此 $\theta\varphi=\psi$。而 θ 的惟一性则由 $G=\langle \mathrm{Im}\varphi\rangle$ 即知，于是我们可得：

引理 1.1（交换半群完备化(completion)定理） 设 S 为交换(加法)半群(未必有零元)，则

(1) 有 Abel 群 G(S 的完备化，也称为 S 的 Grothendieck 群，常记为 $G(S)$)与半群同态 $\varphi: S\to G$ 使 $\varphi\in \mathrm{UP}$(即具有上述的泛性质)；

(2) 在同构意义下，(G,φ) 是惟一的，即若又有 $\varphi': S\to G'$ 使 $\varphi'\in\mathrm{UP}$，则有群同构 $\alpha: G\to G'$ 使右图为交换图，即 $\varphi'=\alpha\varphi$。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & G \arrow[dl, dashed, "\alpha", "\exists 1"'] \\ G' & \end{tikzcd}$$

证 由前段构作与说明知，这里只需证(2)。下面用常规证法(凡是具有某类泛性质的对象，若存在，都可用此法证其(同构意义下的)惟一性)。

由 $(G,\varphi)\in\mathrm{UP}$ 知同态 $\alpha: G\to G'$ 存在，使 $\varphi'=\alpha\varphi$。由 $(G',\varphi')\in\mathrm{UP}$ 知同态 $\beta: G'\to G$ 存在，使 $\varphi=\beta\varphi'$，于是有 $\beta\alpha\varphi=\varphi$。但取 $H=G,\psi=\varphi$，由上知存在惟一的 $\theta: G\to G$ 使 $\varphi=\theta\varphi$。另一方面，显然恒同同态 $I_G: G\to G$ 也使 $\varphi=I_G\varphi$。于是由上知 $I_G=\theta=\beta\alpha$。同理知 $\beta\alpha=I_{G'}$。故 α 为同构。 □

注① 若在环 R 的定义中只要求 R 对加法为交换半群(有零元时，是幺半群)，则称 R 为半环(semiring)，仿前再定义乘法为(将$[(a,b)]$视作 $a-b$ 容易理解此定义)

$$[(x,y)][(x',y')] = [(xx'+yy', xy'+yx')], \forall x,y,x',y' \in R$$

即得半环的完备化，在纤维丛理论中常会用到。

下面对一般的环 R，记 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 为有限生成投射(左)R-模范畴，且记集合

$$\mathrm{Proj}(R) = \{\langle X\rangle(X \text{ 的同构类}) \mid X\in \text{f. g. } \mathrm{P}_R\mathfrak{M}\}$$

再定义运算

$$\langle X\rangle + \langle Y\rangle = \langle X\oplus Y\rangle, \qquad \forall X,Y\in \text{f. g. } \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

则易见 $\mathrm{Proj}(R)$为交换半群(且有零元 0)。于是有 K_0 群的第一种定义法：

定义 1.1 设 R 为任意环，称交换半群 $\mathrm{Proj}(R)$的完备化为 R 的 K_0 群(也称为 R 的 Grothendieck 群)，记为 $\mathrm{K}_0(R)$或 K_0R，即 $\mathrm{K}_0(R)=G(\mathrm{Proj}(R))$。

值得注意的是，前面已要求读者证明：对交换半群 S，标准同态 $\varphi: S\to G(S)$为单同态的充要条件是 S 为可消半群。而 $\mathrm{Proj}(R)$通常都不是可消半群，因此 $\varphi: \mathrm{Proj}(R)\to \mathrm{K}_0(R)$通常都不是单同态。这里牵扯到一个著名的难题——模的直和消去问题(即由模同构 $M\oplus A\simeq N\oplus A$ 何时蕴含着 $M\simeq$

N 的问题)，这也是近二十年来的一个重要热门课题，但所得结果离人们期望的相差甚远。值得一提的是 1993 年 R. Camps 与 W. Dicks 在[Camps, 1993]中证明了：一切 Artin 模都可在直和中消去。这是一个十分引人注目的结果，由此可推出对 Artin 环 R，$\mathrm{Proj}(R)$是可消的。在模的直和消去问题中，武同锁在他(1994 年)的博士论文中定义了环的弱稳定度等概念，在此基础上给出了一系列有价值的结果(后已整理成论文数篇在国内外发表，见[武同锁，1994]等)。

现在再给出 K_0 群的第二种定义法。

对任意环 R，取 $\mathscr{F}=\mathscr{F}(R)$为以 $\mathrm{Proj}(R)$的全体元素作基的自由 Abel 群，记

$$\mathscr{R} = \langle\{\langle P\rangle + \langle Q\rangle - \langle P\oplus Q\rangle \mid P,Q \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}\}\rangle$$

(注意，这里的$\langle P\rangle+\langle Q\rangle-\langle P\oplus Q\rangle$是 $\mathscr{F}$ 中的运算，而非 $\mathrm{Proj}(R)$中的运算，因此一般地并不等于 0)。显然 $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{F}$ 的正规子群，因此商群 $\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 存在(惟一)，将标准同态 $\pi:\mathscr{F}\to\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 下$\langle P\rangle$的象记为$[P]$，即 $\pi(\langle P\rangle)=[P]$。我们证明下述的定理 1.1 后即看到：取 $\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 为 R 的 K_0 群即给出与第一种定义法等价的定义(定理 1.1 中的 $\mathrm{K}_0(R)$暂且表示第一种定义给出的 R 之 K_0 群)。

定理 1.1 对任意环 R，

$$\mathrm{K}_0(R) \simeq \mathscr{F}/\mathscr{R} = \langle\{[P] = \overline{\langle P\rangle}(\mathrm{mod}\ \mathscr{R}) \mid P \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}\}\rangle$$

即 $\mathrm{G}(\mathrm{Proj}(R))\simeq\mathscr{F}/\mathscr{R}$。

证 由 $\mathscr{F}$，$\mathscr{R}$ 的构作知，$\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 中显然有

$$[P\oplus Q] = [P] + [Q], \qquad \forall\, P,Q \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M} \tag{1}$$

由此合并 $\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 各元素中形式上的正、负项知

$$\mathscr{F}/\mathscr{R} = \{[P]-[Q] \mid P,Q \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}\} \tag{2}$$

而

$$\mathrm{K}_0(R) = G(\mathrm{Proj}(R)) = \{[(\langle P\rangle,\langle Q\rangle)] \mid P,Q \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}\}$$

于是定义映射

$$\begin{aligned}\theta:\mathrm{K}_0(R) &\to \mathscr{F}/\mathscr{R}\\ [(\langle P\rangle,\langle Q\rangle)] &\mapsto [P]-[Q]\end{aligned}$$

容易看出 θ 为满映射，且为群同态。又可证 θ 为单射，因此为群同构。 □

按定理 1.1，今后我们不再区分 $\mathrm{G}(\mathrm{Proj}(R))$与 $\mathscr{F}/\mathscr{R}$，统一记为 $\mathrm{K}_0(R)$，从而有：

命题 1.1 对任意环 R，

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_0(R) &= \{[P]-[Q] \mid P,Q \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}\}\\ &= \{[P_1]-[R^n] \mid P_1 \in \mathrm{f.g.\,P}_R\mathfrak{M}, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

$$=\{[P_1]-n[R]\mid P_1\in \text{f. g. }\mathrm{P}_R\mathfrak{M}, n\in\mathbb{N}\}$$

证　由定理 1.1 之证中的(1)，(2)知，只需证第二等式。

事实上，由 $Q\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知可设 $Q\oplus Q_1\simeq R^n$，于是有

$$\begin{aligned}[P]-[Q]&=[P]+[Q_1]-([Q]+[Q_1])\\&=[P\oplus Q_1]-[R^n]\end{aligned}$$

取 $P_1=P\oplus Q_1$ 即得欲证。　□

对于 $K_0(R)$中的元素我们有揭示其相等本质的如下结果：

命题 1.2　对任意环 R，在 $K_0(R)$中

$$[P]=[Q]\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N} \text{ 使 } P\oplus R^n\simeq Q\oplus R^n$$

此时称 P,Q 为**稳定同构的(准同构的**(stably isomorphic))，记为 $P\overset{s}{\simeq}Q$。

证　$\Rightarrow$：$[P]=[Q]$即$[P]-[Q]=0$，按第一种定义这也等价于$[(\langle P\rangle,\langle Q\rangle)]=0=[(\langle 0\rangle,\langle 0\rangle)]$，即 $\exists\, T\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 使(在 $\mathrm{Proj}(R)$中)

$$\langle P\rangle+\langle 0\rangle+\langle T\rangle=\langle Q\rangle+\langle 0\rangle+\langle T\rangle$$

即

$$P\oplus T\simeq Q\oplus T$$

令 $T\oplus T_1\simeq R^n$，即得 $P\oplus R^n\simeq Q\oplus R^n$。

$\Leftarrow$：若 $P\overset{s}{\simeq}Q$，即有 $n\in\mathbb{N}$ 使 $P\oplus R^n\simeq Q\oplus R^n$，则

$$[P]+[R^n]=[Q]+[R^n]$$

因此$[P]=[Q]$。　□

由上证可得：

推论 1.1　$\forall P,Q\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，$P\overset{s}{\simeq}Q\Leftrightarrow \exists\, T\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 使 $P\oplus T\simeq Q\oplus T$。

值得注意的是：

$$\text{同构}\ \begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}\ \text{稳定同构}$$

（见后面的例 1）

这说明即使在 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 中有限生成投射模，甚至有限生成自由模，也未必可从直和中消去(在向量丛范畴$\mathcal{V}$ec(X)中对应地有：向量丛，甚至平凡丛未必可从直和中消去)。因此直和消去问题与稳定同构何时为同构的问题是密切相关的。对一些特殊的环类可得到比较显见的结果。比如，当 R 为域，更一般地为除环时 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$＝f. g. $\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$(有限生成自由 R-模范畴。在这里即有限维线性 R-空间范畴)。因此

$$P\simeq Q\Leftrightarrow \dim P=\dim Q,\qquad \forall P,Q\in \text{f. g. }\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

当 R 为 PID(主理想整环(类),记为 $R\in$ PID,比如$\mathbb{Z}\in$ PID,域 F 上的一元多项式环 $F[X]\in$ PID)时,自由模的子模仍是自由的。因此 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ = f. g. $\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$ 也成立,再注意到 PID$\subset$IBN(不变基数环类,$R\in$ IBN 即指 $R^m\simeq R^n$ 时必有 $m=n$。如交换环,左(右)Noether 环都是 IBN 环),此时稳定同构即同构。因此(暂将下面的 rank 视作 dim, 即 $\mathrm{rank}P=n \Longleftrightarrow P\simeq R^n$)

$$P \overset{S}{\simeq} Q \Leftrightarrow P \simeq Q \Leftrightarrow \mathrm{rank}P = \mathrm{rank}Q$$

当 R 为局部环时,由于投射 R-模都是自由 R-模,且局部环也是 IBN 环,此时这一结果仍成立。对上述这些环类的 R,将 $P\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 的稳定同构类 $[P]$对应着 $\mathrm{rank}P$,由(1)式与

$$\mathrm{rank}(P \oplus Q) = \mathrm{rank}P + \mathrm{rank}Q$$

得下述的有用结果。

定理 1.2 设 R 为 PID(比如为域,除环)或局部环(未必是交换环),则

(1) $\mathrm{K}_0(R)\simeq\mathbb{Z}$(作为 Abel 群);

(2) 在 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 中稳定同构即同构;

(3) 在 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 中直和消去律成立。

1976 年美国数学家 D. Quillen 与前苏联数学家 A. Suslin 独立地解决了 Serre 问题(见[Quillen,1976]与[Suslin,1976],他们证明了:对 PID 环上的 n 元多项式环 R,f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ = f. g. $\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$。在这之后,众多数学家(比如见[Swan,1990])都认为这方面更深入的问题仍有很大的研究价值。1986 年我们在[佟文廷,1986]中定义了 PF 环的概念,即称使 f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ = f. g. $\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$ 的环 R 为 **PF 环**。在此基础上已有不少研究成果出现(比如[佟文廷,1989],[Tong,1994],[Chen, 1995,1996]及[Liu ,2000]等),对 PF 环显然仿上可得如下推广:

定理 1.2′ 设 $R\in$ IBN$\cap$PF,则定理 1.2 中的(1),(2),(3)成立。

此外可证:对 Dedekind(整)环,定理 1.2 中的(2),(3)仍成立(见[Berrick,2000])。

下面举一个例子说明定理 1.2 中的(1),(2),(3)对一般的环未必成立。

例 1 设 F 为域,V 为 F 上的(可数)无穷维线性空间,则 $R=\mathrm{Hom}_F(V,V)$为环,由 $V\oplus V\simeq V$ 知,作为左 R-模

$$\begin{aligned} R \oplus R &= \mathrm{Hom}_F(V,V) \oplus \mathrm{Hom}_F(V,V) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_F(V \oplus V,V) \simeq \mathrm{Hom}_F(V,V) \simeq R \end{aligned}$$

于是 $R \overset{S}{\simeq} 0$,但显然 $R\not\simeq 0$。因此,对这个环 R,定理 1.2 中的(2),(3)都不成立且 $R\notin$ IBN。

下面再证定理 1.2 中的(1)也不成立。事实上，我们可证 $K_0(R)=0$。

由 $R\oplus R\simeq R\in{}_R\mathfrak{M}$ 知 $[R]+[R]=[R]$（在 $K_0(R)$ 中），因此 $[R]=0$ 且更一般地 $[R^m]=0$，$\forall m\in\mathbb{N}$。

任取 $P\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，则有 $n\in\mathbb{N}$ 与 $Q\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 使

$$P\oplus Q\simeq R^n\simeq R$$

于是可认为 $P\oplus Q=R$。因此有正交幂等元 $p,q\in R$（即 $p^2=p,q^2=q,pq=qp=0$）使 $P=Rp,Q=Rq$ 且 $R=Rp\oplus Rq$。由此易知，作为左 R-模，

$$V=RV=pV\oplus qV$$

这也是 F-线性空间的直和分解。因此由 $\dim_F V=\infty$ 知，不失一般地可设 $\dim_F pV=\infty$，即 $pV\simeq V$（作为 F-线性空间），于是有 $\mathrm{Hom}_F(pV,V)\simeq R$（作为左 R-模）。注意 P 中元素均可表为 $rp,r\in R$ 而 $rp(pv)=rp(v)\ \ \forall v\in V$（即 $rp:pV\to V$ 为 $rp:V\to V$ 在 pV 上的限制），因此有单的左 R-模同态 $P\xrightarrow{i}\mathrm{Hom}_F(pV,V)\simeq R$。使 $i(rp)(v)=rp(pv)$，$\forall v\in V$。下面再证 i 为满同态即知 i 为同构：$P\overset{i}{\simeq}R$，因此 $[P]=0$。

事实上，任取 $\alpha\in\mathrm{Hom}_F(pV,V)$，对 $\forall v\in V$ 定义 $r_1:v\mapsto\alpha(pv)$，则 $r_1\in\mathrm{Hom}_F(pV,V)=R$。注意

$$r_1(qv)=\alpha(pqv)=0,\qquad\forall v\in V$$

蕴含着 $r_1q=0$。因此 $r_1=r_1p+r_1q=r_1p\in P$，即 $r_1\in P$ 且

$$r_1(v)=r_1(pv)=\alpha(pv),\qquad\forall v\in V(\text{即 } r_1|_{pV}=\alpha)$$

即 $i(r_1)=\alpha$，于是 i 为同构且 $[P]=0$。而由 $[R]=[P]+[Q]$ 知 $[Q]=0$，故 $K_0(R)=0$。这是非 IBN 环的一个具体例子。

显然对任意 $R\notin$ IBN 都有 $m>n$，使 $(m-n)[R]=0$。因此在 $K_0(R)$ 中 $\mathrm{Ord}[R]<\infty$，反之，若 $\mathrm{Ord}[R]=t<\infty$，则有 $[R^t]=0$，于是有 $0<s\in\mathbb{N}$ 使 $t+s>0$ 且 $R^{t+s}\simeq R^t$，即 $R\notin$ IBN。于是有：

命题 1.3　$R\in$ IBN $\Leftrightarrow$ 在 $K_0(R)$ 中 $\mathrm{Ord}[R]=\infty$

由此命题可看出：$R\in$ IBN（比如 R 为交换环）时，$K_0(R)$ 必有同构于 $\mathbb{Z}$ 的子群。在§3 中我们将对交换环 R 进一步地证明 $K_0(R)$ 必有同构于 $\mathbb{Z}$ 的直和项。

现在我们用下一命题说明对交换环 R，$K_0(R)$ 也是一个交换环。

命题 1.4　设 R 为交换环，则 $K_0(R)$ 在

$$[P][Q]=[P\otimes_R Q],\qquad\forall P,Q\in\text{f. g. }\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

作为乘法时为交换环，且 $[R]=1$（单位元）。

证　任取 $P,Q\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，则有 $m,n\in\mathbb{N}$ 与 $P_1,Q_1\in$ f. g. $\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，使 $P\oplus$