近世數學史談

高木貞治 著

楊備致
陳建群 譯

臺灣商務印書館發行

中華民國五十七年九月初版

近世數學史談 一冊

基本定價壹元貳角

原著者 高木貞治

譯者 楊備欽 陳建韓

發行者 臺灣商務印書館股份有限公司
臺北市重慶南路一段三十七號

印刷及發行所 臺灣商務印書館股份有限公司

登記證：內版臺業字第○一號

原書作者序

本書是作者在暑假裡，在數學座談會演講時，忽促中隨手寫成的。現在居然能夠再版大出作者預料之外。重讀這些史跡，不能不叫我回憶起十多年前在歐洲留學的那一段日子。

飛騰、飛騰，科學！奮起，奮起，科學！這是一支雄壯的進行曲。面對着這本待修改的再版本，就無由來地湧起這些念頭。——數學到底靠什麼興起的呢？除了高斯（Gauss）和亞倍爾（Abel）等人之外，我們還能夠期待誰呢？還有，在國難中產生出來的巴黎工藝學校眞是值得做爲我們的他山之石。只要談到數學的興隆史怎不叫人提起這些地方和那些人物呢？

又，在書中插入一些英雄的風采肖像。用意非在惹起讀者的興趣，無非是半世紀來 Gauss，Abel 諸人相繼去逝。端詳他們的肖像總會令人感傷。若不是見了這些人的肖像，筆者也許無法尋找到一些靈感。

高木貞治

譯 者 序

本書作者高木貞治先生是當代有數的幾位大數學家之一，早年留學歐洲，歐洲爲近代數學的生產中心，以他這樣的身份來寫著有關近世數學史的書籍，該是比較恰當些吧！

這本書主要是在介紹近代九位大數學家的生平，他們的研究經過，以及研究成果。其中較爲重要的三個人物：高斯（Gauss）、柯希（Cauchy）和亞倍爾（Abel），高木先生可說是將這三個人的傳記的精華都濃縮到這本書裡來，亞倍爾雖然離開人世間很早，可是，他在數學園地裡的貢獻卻是很大的，正如陳省身先生所說的「在數學史上留下痕跡」了。

原書後面有兩篇附錄，都僅是討論有關日本數學界的事，對於我們沒有什麽用處，將它略去。另自「數學解法事典」（旺文社版，角返正等篇）上取些有關數學史的資料附於篇末，做爲附錄。原書中的人名、地名等都用日文，除一些爲我們所熟悉的外，都將它改用英文、法文或德文，而不用中文，以免使得看慣外文書籍的人，對已經很熟知的名詞，反而感到陌生。有些法文及德文的句子或詩歌，在原書中沒有譯成日文的，我們都儘量的將它們譯出來，還有，在翻譯這本書的時候，我們並參考了一些有關的書籍，如「The Great Mathematicians」，「The Development of Mathematics」，「What is Mathematics」，「Mathematics Dictionary」，以及「數學解法事典」等。

在一個偶然的機會裡，我們得到高木先生的這本書，它像是興奮劑一般，鼓舞著我們興致濃厚地進習一些數學書籍。有時，夜色早已深沉了，可是，我們似乎並不覺得疲憊，我們渴望著有更多的人能夠由這本書得到些啓發，進而能在數學的園地裡播下些種子，這就是我們爲什麽那麽不自量力地敢奮勇起來翻譯這本書的初衷。倘若，這本書能像顯影劑一般，將隱藏在讀者心中的那股數學潛力，浮現出來，這該是我們最大的期望了。

末了，我們十分感激林華先生在翻譯工作上，給予我們指導與幫助，這是我們要特別感謝他的。

楊備欽 於 臺灣大學
陳建韓 於 輔仁大學

目　　錄

一、正十七角形的作圖法

1796 年 3 月 30 日的早上，張着眼睛躺在床上的一位十九歲少年 Gauss， 他突然從床上跳起來，這一刹那間居然把正十七角形的作圖法想出來。這段值得紀念的事詳載在「Gauss 日記」上。

〔根據圓等分的基本原理，推出幾何學的十七等分原理……。1796年 3 月30日於 Braunschweig〕

同年 6 月 1 日這項定理刋登在耶拿（Jena）的 allgemeine Literaturzeitung 雜誌上。

「正多角形之中，三角形、五角形、十五角形及偶數邊數的作圖，這些都是初步的幾何學，爲家所周知的事實。直到今天的幾個世紀以來，人們一直不相信能夠從這些初等幾何學上推出更多的新理論。我也還沒聽過在這方面下了努力的研究工作，而得到成功的學者。

爲了這原因，除了以上的正多角形之外，對於正十七角形作圖的可能性，我認爲是值得討論的一件事。而這種發明實際上不過是對理論上的體系更加廣泛的研究、討論，如此而已。

對於理論中一些比較不成熟的部份，一俟弄得完善當儘速再加以發表。

K. F. Gauss

於 Cöttingen 大學數學系

上文的一般理論正是 Gauss 的整數論（Disquisitiones Arithmeticae, 1801）中第七篇，敍述有關圓周的等分論。即是指使用方程式 $x^n-1=0$ 這項理論而言。正十七角形的作圖法是在 $n=17$ 的場合中，根據上面那個方程式做爲基礎，解開得到的結果。這項事實我們現在都早已經知道了。Gauss 在寫信給友人 Gerling 時曾經提到：

「……〔前略〕。我很想對你詳細解說關於多角形的數學理論。同時，我也非常想把我對橢圓環的引力這項見解告訴你，遺憾的是找不到足夠的空閒時間。我相信這些論文大概會引起閣下的注意與興趣。例如我的算術平均論的初步原理。雖然在幾個星期前我已把原稿校正好了，可是還未能出版。因此我不得不用信函對你說個大概。

……〔中略〕。你說對我的 D. A.（整數論）中，關於多角形的理論，思前想後了一番，還有一些地方弄不清楚。其實這也難怪，這項理論並不是那麼容易懂。今天偸得小閒就爲你解說一二吧！附帶說明的是單單正十七等分這項理論，實際上是無法把整數論窺得全貌的。不過我希望你能由此吸收，啓發不少靈感。高等整數論可以算是目前數學中最上乘的一種。天文學上縱然再有更大的新發現，也不會比得上我這次發現高等整數論這般快樂。

若單單爲證明正十七角形作圖的可能性，大概可以用以簡單明瞭的方法來做：

現在作

$$360°=17\varphi$$

將此關係代入下式中：

$$\begin{array}{l|l} \cos\varphi+\cos4\varphi=a & a+b=e \\ \cos2\varphi+\cos8\varphi=b & c+d=f \\ \cos3\varphi+\cos5\varphi=c & \text{由此可得} \\ \cos6\varphi+\cos7\varphi=d & 1)\ e+f=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

根據簡單的計算可以得到。但須注意：

$$\cos n\varphi=\cos(17-n)\varphi$$

而

$$\begin{array}{l|l} 2ab=e+f=-\dfrac{1}{2} & 2bc=a+2c+d \\ 2ac=2a+b+d & 2bd=a+2b+c \\ 2ad=b+c+2d & 2cd=e+f=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

所以

$$2ac+2ad+2bc+2bd=4a+4b+4c+4d$$

即

$$2ef=-2$$

又

$$2)\quad ef=-1$$

因(1)與(2)，所以e與f的方程式的根爲：

$$x^2+\frac{1}{2}x-1=0$$

由此得其中之一根

$$=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{17}{16}}$$

另一根爲

$$=-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{17}{16}}$$

設前式爲e，後式爲f代入。到此，只要一看就明白多了。但若不以這種數值代入，那麽就要困難多了（特別在一般多角形）（並請參照我的論文——［特種級數的總和法］）

還有a與b的方程式

$$x^2-ex-\frac{1}{4}=0$$

由此根得其值爲

$$\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2\right)}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}\pm\frac{1}{8}\sqrt{(34-2\sqrt{17})}$$

設取上面的符號爲a，下面的符號爲b，那麽就清楚了。然而

$$a-b=(\cos\varphi-\cos2\varphi)+(\cos4\varphi-\cos8\varphi)$$

總而言之，本式爲正。同樣地

$$c=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{(34+2\sqrt{17})}$$

$$d=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{(34+2\sqrt{17})}$$

最後，由$\cos\varphi$與$\cos4\varphi$能求得下列二次方程式之根（積$\cos\varphi\cdot\cos4\varphi=\frac{1}{2}c$）

$$x^2-ax+\frac{1}{2}c=0$$

因此

$$\cos\varphi=+\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c\right)}$$

$$\cos 4\varphi=+\frac{1}{2}a-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c\right)}$$

然而

$$2a^2=2+b+2c$$

則

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}c\right)}$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})}^{*}+\frac{1}{8}\sqrt{\left\{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}\right\}}$$

上面這些步驟都和 D.A. 裡所發表的公式相同。祇不過上面記號處誤印成一（負號）而已。即 D.A. 的公式沒有 $\cos\varphi$，而 $\cos 4\varphi$ 爲 $\sin\frac{90^\circ}{17}$D 由此把 34角形的邊分成一半就能得證正十七角形。其他的 cos. 也可以用同樣的式子表示出來。

我在D.A中，代入 $\cos n\varphi$

$$\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

即用方程式 $x^{17}-1=0$的根。如此一來就棒極了（zierlich）

上式（十七等分）以P爲素數，把圓周分爲P等分。將

$$\frac{360}{P},2\cdot\frac{360}{P},3\cdot\frac{360}{P},\cdots\cdots,\frac{1}{2}(P-1)\cdot\frac{360}{P}$$

$\frac{P-1}{2}$個所〔度〕的弧的cos適當地加以分組。 也能收到與上式同樣的效果。這些是我在 D. A. 第三篇中所討論到的理論基礎 。 在此$\frac{1}{2}(P-1)$數的因數十分重要。若此數是 2 的冪次，例如

$P=3，5，17，257，65537$

就能做出二次方程式。相反的以 $P=31,\frac{1}{2}(P-1)=3\cdot5$ 的話，則無法迴避三次與五次方程式。

這些演變的經過，我雖然沒把它做爲公式，不過我還能記得很清楚。這就是我在1796年 3 月29日的僥倖了（Gauss 日記爲 3 月30日。）

方程式

$$\frac{x^p-1}{x-1}\doteq0$$

的根分爲二組。由此可以引出 D. A. 第637頁下方的定理。

在1796年的下半學期（我在 Cöttingen 大學最初的那個學年。）假期中我回到故鄉渡假，終於在那天想出這套理論。在假期中我把全付精神放在思考、研究根與根之間在整數論上的作用。也因爲如此才能特別地將根適用在正十七角形上，算出它的數値。並且也補充了D. A.第七篇的理論。這就是爲什麽我雖然很快把這項理論寄給耶拿學 會

雜誌（Allgemeine Literaturzeitung），而遲到1796年5月或6月時〔其實應該是6月1日〕才刊登出來的原因了。Disq. Arith. 在1798年4月開始印刷，可是並沒有馬上印成。中止了不少次（由於印刷廠遷移廠址，再加上改用新字體的緣故）所以最遲要到1801年夏天才能夠印好。

1798年，也許是1799年吧。有一位名叫 Huguené 的，是一位駐紮在我故鄉的普魯士軍官，他從 Zimmermann 口中得知我的理論。並表示他對這個問題相當感興趣。我信賴他，把正十七角形的作圖理論說明送一份給他做爲參考（該文與本文內容差不多。或許要更詳細一點。）參考了我的理論之後，他居然厚臉皮地把它收在他的作品中。也居然發表了一篇發現的前後經過。幸運地，那本書在我把D.A.發表之後經過了數年才印出來。眞叫人爲他可恥，無聊。

1819年1月6日於 Cöttingen 大學

K. F. Gauss

P.S. D.A.一書不久就能隨信奉上，敬請笑納。

以上是 Gauss 的信函。在後段裡，Gauss 指責的那位砲兵上尉 von Huguenin，在1803年出版他的初等幾何學。書中作者 H 君對正十七角形的介紹大致如下：

「根據二次方程式，在圓中求得正十七角形作圖法的理論是 Braunschweig 地方一位年青數學家發明的。他的名字好像是 Gaus。他把這個發現請教了不少位數學家。他們在驚訝中表示不相信。所以在

此我把這項理論概略地發表並介紹。那時候（1796年）我因趁在 Braunschweig 駐守之便，對這項令人半信半疑的理論略有所聞*。因此我開始追尋解法的過程，並加以詳細地理解。不過我在此所發表的方法可以說是經過了自己的努力，與原解法全異其趣。這就是我為什麼敢把它當做自己的作品的理由了。原解法大概已為發現者公開刊登過了。」

所以，我們可以看出 Gauss 對 H 君的非難有些誤解。讀者對初等幾何學一書中，正十七角形作圖法為 H君所發明並不會有多大的疑異。當時正十七角形作圖法除 Gauss 外還有許許多多的數學家也略有發現，發表的人也不在少數。這一點似乎可以用來為 H君辯護。上面的非難恐怕是 Gauss 聽了別人的話才有所發吧！

在1802年 3 月22日 Pfaff 教授（當時是 Helmstedt 大學的教授，Gauss 之友，微分方程式學的權威）寄給 Gauss 一封信：『在德意志有一位有名的純幾何學家某某先生，從我的口中略略知道你的理論。不過他表示他也能用自己的方法和你一樣求得正十七角形作圖法。』Pfaff 教授也向 Gauss 提醒過他也有自己的方法做出正十七角形。

無論如何，Gauss 用三個二次方程式求出的正十七角形作圖法，尚無人能夠修改他的理論。H君的理論和 Pfaff 教授的理論，二者相去不遠。

---

* 根據H君的小文，是否有 Gauss 信中所說的那位 Zimmermann 先生，我們無法知道。

二、近世數學的開始

據說，Gauss 由於發現了正十七角形作圖法，才下定決心專攻數學的。Gauss 是否能成爲數學家？以及對十九世紀以後的數學發展是否能有十分重大的影響？其關鍵皆在於1796年3月30日。不管怎樣，傳說與事實免不了有一段距離。稍後我們會介紹他的許多作品。Gaus 並不單單因發現了正十七角形就欣喜若狂。這大概會叫製造傳說的那批人感到失望的！如果有人要說這是打破二千年來的數學紀錄，這話又未免太過份了一點。Gauss 日記中記載的「圓周等分的基本原理」，此項理論應該是 Disq Arith 最後一篇中最重要的部份。若是我們把 Gauss 當做十九歲年青數學家中的第一把交椅，良不誣也。

我們若以「時代的函數」來討論「數學的進步」時，不用說數學是大有進步的。若是劃條曲線來表示，一般說來所求得的曲線並非像我們想像的那般平滑。因爲每一點的躍進都是呈現一種不連續的現象。事實上，在點附近之曲線表示出急激的上升率。在這樣急速上昇之後，接着又做小角度的上升。所以曲線都是階段性的進步。

例如就以微積分法的發現做爲近代數學的起源吧。對這點，人們大概不會有什麽異議的。不過到底是何年何月何日微積分法從地下突然湧滾出來，又難免要有一場舌戰。在 Newton 及 Leibnitz 之前，自 Archimedes 以降，到底那一個人才是微積分法的先驅者，史學家

無法下定論。所以關於圓周計算問題的先驅者是何人，在近代數學家間又有一個繁榮的市場，各賣各的貨，紛亂無比。

從 Archimedes 到 Newton 之間的年代不可不謂長矣。在這段期間內，數學史家若是碰到了無法下決論的場合，只要借智慧而行，敷衍一下，亂定先驅者，亦無傷大雅。我們對 Newton 之後的數學史要比較關心些，而這正是十八、九世紀的數學。Bernoulli 一家， Euler, Lagrange, Laplace等諸輩均是這個時代裡，數一數二的人物。是個微積分法擴張發展的時代。在中古時代播種下去的種子，現在一齊開花，一齊結果，手忙脚亂地摘下這一串繁華的果實。這個時代所劃出來的曲線是平滑而向上的。

可以收穫的東西都被收成之後，緊接着而來的必定是衰落的時代嗎？繁榮之後必是不景氣，是耶？非耶？所幸的，我們的曲線在十八世紀末十九世紀初所佔的長度還算短。接着就是配合着政治、社會、經濟的大變動時代。也不知是偶然或是非偶然，居然跑出了一條急速上昇的曲線。這些不連續做點狀跳躍曲線之後，就來到現在我們所說的近世數學時代了。不久我們就可以從本書中，把近代數學史上的一切看個清楚。

我們以 Newton 爲近代數學史的鼻祖，如果就近代數學的勃興期中，推出一位最著名的代表人物，人們毫不加思索馬上指 Gauss 爲首。天賦奇材，天降長壽，他是橫貫十九世紀前半期，超越一切，不可一世的泰斗。當他死後，靈柩入土之際，那時的國王也爲他在所豎的石碑上寫着：「數學家的元首」(Mathematicorum Princeps)。