成人高等教育试用教材

线性代数

李永乐 编

清华大学出版社

线 性 代 数

（成人高等教育试用教材）

李永乐 编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书是根据作者在清华大学继续教育学院多年来的教学实践编写的.符合成人教育对本科"线性代数"教学的基本要求,具有成人教学的特点.

本书概念清楚,对基本要求部分叙述详细充实,重点突出,层次清晰,说理浅显,各种类型的例题丰富,坡度较小,适于自学.内容包括:行列式,矩阵,线性方程组,向量空间,特征值与特征向量,二次型及线性代数应用举例的附录.每章之后备有适量的练习题,书末有习题答案及提示.

本书可作为成人高等院校,继续教育学院专升本,夜大学教材,也可作为大学专科的教材及工程技术人员自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李永乐编.—北京:清华大学出版社,1996
成人高等教育试用教材
ISBN 7-302-02385-9

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23307 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
印刷者:密云胶印厂
发行者:新华书店总店北京科技发行所
开　本:850×1168 1/32　印张:8 1/8　字数:212 千字
版　次:1997 年 2 月 第 1 版　1997 年 2 月 第 1 次印刷
书　号:ISBN 7-302-02385-9/O·174
印　数:0001—5000
定　价:8.90 元

前 言

线性代数是一门重要的基础课，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用于各学科，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法更显重要．

考虑到成人教学的特点和规律，为了适应今后成人教育发展的需要，在清华大学继续教育学院的领导下，特别是康静安先生的鼓励和帮助，编写了这本“线性代数”教材．在编写本书时，注意了以下几点：

根据教学基本要求，突出重点及基本方法，对矩阵、线性方程组及特征值阐述详细透彻，力求学后能熟悉现代科技中常用的矩阵方法．

对难度较大的某些基础理论，例如“线性相关”、“秩”、“矩阵对角化”、“惯性定理”等，未作过份严密的论证和推导，有的以二、三维为例介绍基本思想方法，有的用打 * 号形式给出一个论证供有兴趣有余力的读者自学参考，也有的只是罗列出结果．

教材中注重例题的选择匹配，有些是介绍基本概念和基本运算的，以帮助读者正确理解概念及运算法则，有些是澄清初学者易犯错误之处，有些是介绍线性代数中常用技巧，一些题目给出一题多解，以求开阔思路，活跃思维，还有一些超出要求的提高题，这些灵活的综合题打上 * 号供读者选用．

为了便于自学，本书力求条理清晰，深入浅出，循序渐近，例题丰富，利于理解和掌握．对于打 * 号的加深内容，略去之后不会影响后面的学习．

本书可作为成人高等院校及大学专科的教材，也可作为少学

时工科院校的本科教材，并可供工程技术人员自学参考.

在编写本书的过程中，胡冠章教授详细审阅了全稿，提出了许多宝贵的建议，附录线性代数应用举例就是在他提议下增写的.

编写本书时，主要参考书有：栾汝书编著的《线性代数》，居余马、胡金德等编的《线性代数》，G · Strang 著，侯自新等译的《线性代数及其应用》，И. В. 普罗斯库烈柯夫著，周晓钟译的《线性代数习题集》.

感谢清华大学继续教育学院，清华大学应用数学系对编者的关心信任，感谢康静安先生，及两年来支持帮助我的所有同仁.

由于水平所限，疏漏错误难免，恳请读者批评指正.

编　者

1996 年 6 月清华园

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具,在微积分的学习中已经看到:向量的叉积与混合积可以用二、三阶行列式来表示,直线及平面的一些问题如果运用行列式是较简捷的,在重积分的计算中,也出现过 Jacobi 行列式.

在线性代数中,行列式是一个不可缺少的工具,它在方程组、矩阵、特征值及二次型中有许多重要应用.

1.1 二、三阶行列式

对二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法,可以得到

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1,$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时,方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

为了方便,如果引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

我们称其是**二阶行列式**. a,b 是行列式的第 1 行；c,d 是行列式的第 2 行；a,c 是行列式的第 1 列；b,d 是行列式的第 2 列，这个行列式的值是 $ad-bc$.

例如，由行列式定义我们有

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - (-1) \times 3 = 15,$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

把行列式用到方程组(1.1)，我们称

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

为方程组的**系数行列式**，当其值 $\Delta \neq 0$ 时，方程组的解就是：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \end{cases}$$

其中 x 的分子 Δ_1 是把系数行列式中 x 的系数用常数项替换后所得到的行列式，y 的分子 Δ_2 是把系数行列式中 y 的系数换成常数项后所得到的行列式，而 x 和 y 的分母都是系数行列式.

例 1　用行列式解方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

解　由系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

知方程组有唯一解. 又因

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

得到方程组的解是：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3, \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -2. \end{cases}$$ ■

完全类似地，对三元一次方程组也有相应的结果，为了今后便于推广到更复杂的情形，未知数现在用 x_1, x_2, x_3 来表示，未知数的系数用带有两个下标的 a_{ij} 表示，其中第 1 个下标 i 表示该项在第 i 个方程，第 2 个下标 j 表示它是未知数 x_j 的系数. 这样三元一次方程组可写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

利用加减消元法可以得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}$$

这个结果很难记忆，为此引进三阶行列式的定义，我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是一个**三阶行列式**，其值规定为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

它是 6 项的代数和，而每一项都是 3 个元素的乘积. 这 3 个元素取自不同的行不同的列，其中有 3 项前面带正号，另 3 项前面带负号.

为了便于计算三阶行列式的值，这 6 项可以这样来记忆：在图 1.1 中，由左上至右下的实线上 3 个元素的乘积所构成的 3 项都带正号，由右上至左下的虚线上 3 个元素的乘积所构成的 3 项

都带负号.

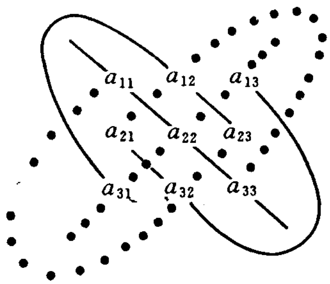

图 1.1

例如，根据行列式定义，可计算出

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+4\times8\times3+2\times6\times7-3\times5\times7-2\times4\times9$$

$$-6\times8\times1$$

$$=45+96+84-105-72-48=0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ -a & 1 & a \\ -a & -a & 1 \end{vmatrix} = 1+(-a)(-a)a+(-a)a^2-a(-a)-a(-a)$$

$$-a(-a)$$

$$=1+3a^2.$$

利用三阶行列式，方程组(1.2)的解就容易记忆了，当系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.2)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}. \end{cases}$$

其中 Δ_j 就是把常数项替代系数行列式 Δ 中第 j 列系数所得到的行列式.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 先计算系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times3\times(-1)+0+(-2)\times2\times3-(-1)\times3\times3-0-2\times1\times1$$

$$= -8,$$

由于 $\Delta \neq 0$,方程组有唯一解.

再计算未知数的分子行列式 Δ_j. 据已知条件,可计算出

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

所以,方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2. \end{cases}$$ ■

对于三阶行列式，我们虽然已会计算，但是数字的计算还是很繁琐的，因此要分析研究行列式的基本性质，以便利用性质来简化我们的计算.

性质 1 行列互换，行列式的值不变. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}}$$

通常把后一个行列式称为是原行列式的**转置**，用记号 D^{T} 或 D' 表示. 这条性质也可叙述为：经转置行列式的值不变.

这条性质表明在行列式中，行与列的地位是对称的，如果行有某个性质，那么列也就有同样的相关性质. 为了简洁，下面只叙述与讨论行的性质. 关于列所具有的性质就不重复了.

至于性质 1 的证明，可以利用行列式的定义把每个行列式展开成六项后经比较得到，在这里把证明略去.

观察三阶行列式定义中的六项，我们发现可把这六项分成三个小组，每组按行提取公因式后，剩余部分正巧可用二阶行列式描述. 例如按第 1 行的元素来分组，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

如果把每组中第 1 行的元素 a_{1j} 作为公因子提出后，剩余部分记作

A_{1j},则 A_{1j}中不含行列式 D 中第 1 行及第 j 列的元素,它可以用 D 中去掉第 1 行及第 j 列的二阶行列式来表示. 也就是

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

这时行列式 D 的值可写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

完全类似地,D 中的六项也可按第 2 行或第 3 行的元素来分组,这就是

性质 2 $$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

这称为行列式**按行展开公式**,其中 A_{ij}叫做 a_{ij}的**代数余子式**,它是把行列式 D 去掉 a_{ij}所在的 i 行和 j 列后所得到的一个二阶行列式,并带有正负号$(-1)^{i+j}$.

例如,a_{31}的代数余子式 A_{31}是

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

例 3 计算下面行列式的值,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 中第 2 行有两个元素 $a_{22} = a_{23} = 0$,根据性质 2 按第 2 行展开,有

$$D = a_{21}A_{21}$$
$$= 4 \times (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 16. \qquad \blacksquare$$

利用行列式按行展开公式，立即可有行列式的另外三条性质.

性质 3 如某一行的元素全为 0，则行列式的值为 0.

性质 4 如果某一行的元素有公因数 k，则 k 可以提到行列式记号之外.

例如第 3 行有公因数，可写成

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

性质 5 如某一行的元素各为两个数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样.

例如第 1 行是两个数的和，就有

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

性质 6 将行列式的两行互相调换，行列式的值只改变正负号.

例如 1，3 两行互换，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

关于性质 6，可以用行列式定义把其展开成六项的代数和之后来检验其正确. 利用性质 6，又可推导出行列式的 3 条性质.

性质 7 如行列式中有两行元素对应相同，那么行列式的值为 0.

假若 D 中第 1 行与第 2 行元素对应相等，互换 1，2 两行得到行列式 D_1，一方面由性质 6 应有：$D=-D_1$；另一方面由于 1，2 两行相同，互换后的 D_1 其实就是原先的 D. 因此

$$D=-D_1=-D.$$

从而有：$D=0$.

性质 8 如行列式中有两行元素对应成比例，则行列式的值为 0.

例如，D 中 2，3 两行成比例，利用性质 4 和 7 就有

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ km & kn & kp \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

性质 9 若把行列式某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变.

假如把 D 中第 1 行的 k 倍加至第 2 行，利用性质 5 和 8 就可得到

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka+m & kb+n & kc+p \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

这条性质在行列式计算中非常有用，当我们用按行展开公式计算行列式的值时，为了减少计算工作量. 在展开之前一般先用性质 9，把某 i 行的 k 倍加至第 j 行，使得某一列有较多的零，然后再展开，这样计算比较简捷，参看下面的例 7、例 8 等.

性质 10 某行的每个元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和等于 0.

例 4 以二阶行列式为例验证性质 10，如

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}.$$

按代数余子式的定义，有

$$A_{11}=4,\ A_{12}=-3,\ A_{21}=-2,\ A_{22}=1.$$

利用行列式按行展开公式，显然有

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=1\times4+2\times(-3)=-2,\\&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}=3\times(-2)+4\times1=-2.\end{aligned}$$

也容易验证

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=1\cdot(-2)+2\cdot1=0,$$
$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}=3\cdot4+4\cdot(-3)=0.$$

即第 1 行元素与第 2 行的代数余子式乘积之和，第 2 行元素与第 1 行的代数余子式乘积之和均为 0. ■

*__例 5__ 对三阶行列式，证明：第 1 行的元素与第 2 行的代数余子式相应乘积之和为 0.

即 $$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

证 构造一个第 1 行与第 2 行一样的行列式 D(即 $a_{11}=a_{21}$, $a_{12}=a_{22}$, $a_{13}=a_{23}$).

一方面，由性质 7 知 $D=0$；

另一方面，用性质 2 按第 2 行展开有

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},$$

把 $a_{11}=a_{21}$,…及 $D=0$ 代入上式，得

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=D=0,$$

即有第 1 行元素与第 2 行代数余子式乘积之和等于 0. ■

现在综合运用行列式的这些性质来处理行列式问题.

例 6 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{vmatrix}$$