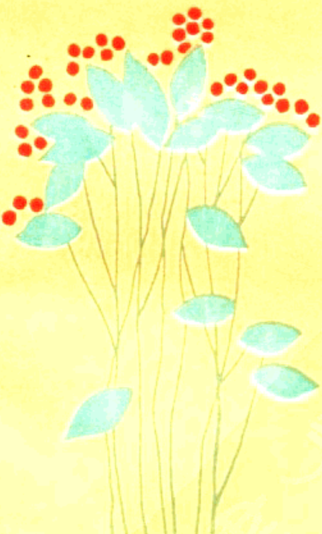
中学教与学指导丛书

高中数学例题选析及系列练习

崔冠之　郝德魁　杨兆一
范登宸　吴祈英　薛光伟　编著



学术书刊出版社

中学教与学指导丛书

高中数学例题选析及系列练习

崔冠之　郝德魁　杨兆一
范登宸　吴祈英　薛光伟　编著

学术书刊出版社

内 容 提 要

本书按现行高中数学教材的章节顺序，围绕知识的重点、难点、关键选编了供教师在教学中选用的例题、习题和供学生课后使用的自测题及综合题，可作为对课本的补充和提高。各章都分为例题与解析、练习与自测两部分，书末附有全部习题的答案和提示。书中选设的题目具有典型性和概括性、针对性和多样性、科学性和指导性，题型新颖，并尽量选用了标准化试题。

中学教与学指导丛书

高中数学例题选析及系列练习

崔冠之　郝德魁　杨兆一
范登宸　吴祈英　薛光伟　编著

责任编辑：沈国峰

*

学术书刊出版社出版（北京海淀区学院南路86号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32　印张：14.375　字数：320 千字
1990年2月第1版　1990年2月第1次印刷
印数：1—6 210册　定价：6.40元
ISBN 7-80045-612-9/G·158

前　言

《中学教与学指导丛书》是根据国家教委颁发的全日制中学教学大纲的要求及课堂教学的需要，并结合作者多年的教学经验编写的。本丛书按现行教材的章节顺序，围绕知识的重点、难点、关键选编了供教师在教学中选用的例题、习题和供学生课后使用的自测题及综合练习题，可作为对课本的补充和提高。各章都分为例题与解析、练习与自测两部分，书末附有全部习题的答案与提示。书中选设的题目具有典型性和概括性，针对性和多样性，科学性和指导性，题型新颖，并尽量选用标准化试题。各类题目在重视培养学生掌握基础知识、基本能力的同时，还特别注意培养和提高学生灵活地综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力。对于每个例题，书中不但给出解答过程，还作一定的分析和总结，分析解题思路，总结解题方法，并指出学生在解题时易出现的错误，对有些题目，还给出了多种解法，以便开阔学生的解题思路。为了便于学生较全面地掌握知识，各册书后都备有几套综合练习题，可作为总复习时的模拟试题选用。

本丛书由十几位多年从事教学工作，有丰富教学经验的重点中学教师和部分大学教师编写，又邀请了北京师范大学、北京师范学院和北京教育学院等的有关专家、教授审阅。

我们期望该丛书能成为中学生的良师益友，特别是能对中学教师起到参谋和助手的作用。

为了配合高考复习，目前先出版该丛书的以下五个分册：《高中数学例题选析及系列练习》、《高中物理例题选析及系列

练习》、《高中化学例题选析及系列练习》、《高中生物例题选析及系列练习》、《高中英语例句，例题选析及系列练习》。

本册为《高中数学 例题选析及系列练习》，分为代数、三角、立体几何、平面解析几何和综合题等五大部分，由崔冠之、郝德魁、杨兆一、范登宸、吴祈英、薛光伟等六人联合编写。北京师范大学数学系教授钟善基先生对本书进行了审阅，在此表示感谢，并欢迎读者对本书提出批评和建议。

丛书编者

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　三　　角

第三部分　立 体 几 何

第四部分　平面解析几何

第五部分　综　合　题

第一部分　代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

例题与解析

例1　下列几组对象是否构成集合：

(1) 抛物线$y=x^2$上所有的点；

(2) 很大的实数；

(3) 方程 $x+1=x+2$ 的解的集合；

(4) 大于-3的负整数；

(5) 著名歌唱家。

解：(1)、(3)、(4) 是集合，因为它们是具有某种共同属性的元素的全体，任意的一个点或实数属不属于这个集合是确定的。(2)、(5)不构成集合，“很大”、“著名”的含意不确切，即一个实数或人属不属于这个集合不能确定。

分析与总结：集合是个不定义的概念，通过下面的练习可以加深同学们对“集合”的理解。

例2　用列举法表示下列集合：

(1) 方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$ 的解的集合；

(2) 被5除余2的自然数；

(3) 20以内的质数；

(4) 方程$(x-3)(x^2-x-6)=0$的解的集合；

(5) 不等式$x^2-6x-16<0$的整数解。

解：(1) $\{(1, 3)\}$；

(2) $\{2, 7, 12, 17, \cdots\cdots\}$；

(3) $\{2, 3, 5, 7, \cdots, 19\}$；

(4) $\{-2, 3_{(2)}\}$；

(5) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.\}$.

分析与总结：此例题是针对学生在学习列举法表示集合时常犯的错误而出的。(1) 中的元素是数对，并且是有序的数对，因此不能写成$\{1, 3\}$，这个二元一次方程组只有一个解，因此其集合也只有一个元素，当然也不能写成$\{(3, 1)\}$。(2) 容易丢掉2这个元素（即商数为0的情形）。(3) 有些学生对质数的概念不清楚，把1也写在这个集合中。(4) 是注意集合中的元素是互异的，方程有两个相同的根3，不应把集合写成$\{2, 3, 3\}$，3算集合中的一个元素，可写成$3_{(2)}$表示3是方程的二重根。(5) 要注意审题，根据求正整数解、整数解、实数解的不同要求，正确地写出答案来。

例3 用描述法表示下列集合：

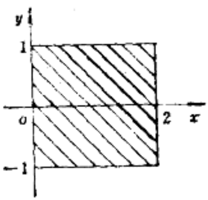


图 1-1

(1) 所有的五边形；

(2) 全体正奇数；

(3) 图 1-1 中阴影部分（包括周界）中所有点的集合；

(4) 设a、b、c为三角形三边，且$a:b:c=a:a:\frac{1}{a}$，写出a的集合A；

（5）直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形（包括周界）内的点的集合（图1-2）。

解：（1）{五边形}；

（2）$\{x \mid x=2n-1,\ n\in N\}$；

（3）$\{(x,\ y) \mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$；

（4）∵ 三角形两边之和大于第三边，

$$\therefore \begin{cases} 2a>\frac{1}{a} \\ a+\frac{1}{a}>o \end{cases} \quad 解得 \quad a>\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$A=\left\{a \mid a>\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}；$$

（5）设 $x^2=\frac{1}{2}x+3$，解得 $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=2$，

∴ x 的取值范围为 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$。

所求的集合为：

$$\left\{(x,\ y) \mid x^2\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}x+3,\ -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}。$$

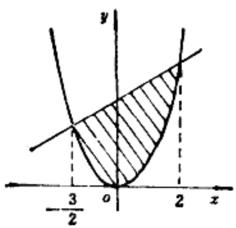


图 1-2

例4 根据已知条件求 $A\cap B$。

（1）$A=\{(x,\ y) \mid y=x^2-1\}$，$B=\{(x,\ y) \mid y=\sqrt{x^2+1}\}$

（2）$A=\{y \mid y=x^2-1,\ x\in R\}$，$B=\{y \mid y=\sqrt{x^2+1}\ x\in R\}$

解：（1）A、B 分别是两条曲线上的所有点的集合，$A\cap B$ 是两条曲线交点的集合。

$$A \cap B = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (-\sqrt{3},\ 2),\ (\sqrt{3},\ 2) \right\}$$

（2）A、B 分别是两个函数值的集合，即函数的值域，$A \cap B$是两函数值域的公共部分。

$$A \cap B = \{y \mid y \geqslant -1\} \cap \{y \mid y \geqslant 1\} = \{y \mid y \geqslant 1\}$$

分析与总结：本题要通过求交集来加深对集合表示法的理解。在描述法中，大家很注意右边描述的元素的属性，而忽视左边代表元素所起的作用。（1）（2）两小题中，虽然描述的内容相同，但由于代表元素不同，集合就完全不同了。（1）中A、B都是点集，$A \cap B$表示两条曲线交点组成的集合。（2）中A、B是数集，$A \cap B$表示两函数值域的公共部分。因此看一个集合首先要看它的代表元素是什么。

例5 选择题：已知$M = \{0\}$，$N = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}$下列结论中正确的是：

A：$M = N$；B：$M \supset N$；C：$M \subset N$，D：A、B、C结论都不对。

解：选B

分析与总结：$N = \{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x \in R\} = \phi$，空集的概念比较抽象，要抓住“空集中一个元素都没有”的特点去理解它。集合M中有一个元素0，因而不是空集，这样集合N应是M的真子集。

例6 填空：

（1）$A = \{x \mid x^2 - 2x - 1 = 0\}$，$B = \{x \mid x < 2\}$。$A \cap B =$ __________；

（2）$A \subsetneqq B$，$A \cap B = C$，则$A \cup C =$ __________；

(3) $I=\{(x, y) \mid x\in R, y\in R\}$, $A=\{(x,y) \mid \frac{x}{y}=1\}$,

$B=\{(x, y) \mid y=x\}$, 则$\bar{A}\cap B=$ ________;

(4) 满足 $\{a\}\subset A\subseteq\{a, b, c\}$ 的集合 A 有 ________ 个。

解：(1) $\{1-\sqrt{2}\}$；(2) A；(3) $\{(0, 0)\}$；(4) 3 个。

分析与总结：本题要求正确理解和掌握集合的表示法和子集、交集、并集、补集的概念，能识别和使用有关的符号，正确理解题意。例如(3) 题中集合B 是一、三象限角平分线上点的集合，集合A中因为$y\neq 0$，$x\neq 0$，所以集合A除了(0, 0)点之外其余与集合B的元素都相同，即$(0,0)\notin A$，而$(0, 0)\in B$。显然$\bar{A}\cap B=\{(0, 0)\}$，(4) 中集合 A 要包含$\{a\}$，又要作为$\{a, b, c\}$的子集，因此A有三种情况：$\{a, b\}$ $\{a, c\}$，$\{a, b, c\}$。

例7 判断下列各题是否正确：

(1) 如果$A=\{x \mid x\geqslant 4\}$，$B=\{x \mid x\leqslant 4\}$，那么$A\cap B=\{4\}$。 (　　)

(2) 如果$A\cup B=A\cup C$，则$A\cap B=A\cap C$。(　　)

已知：$A=\{(x, y) \mid x+2y=1\}$，

$B=\{(x, y) \mid 2x+4y=2\}$，

则$A\cap B=\{(x, y) \mid x\in R, y\in R\}$

解：(1) 错。$A\cap B$ 是一个集合，不是一个元素，应写成$A\cap B=\{4\}$。

(2) 错。例如$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{1, 2\}$。

$A\cup B=A\cup C$成立，但$A\cap B=A\cap C$不成立。

(3) 错。A、B 两集合表示同一条直线上所有的点，它们的交集应是A或B，不能是平面上所有的点。

例8 已知以下两个集合：$A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，

$B=\{-4,\ a+3,\ a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$ $A\cap B=\{2,5\}$，求实数a的值，并求$A\cup B$。

解：$\because$ $5\in A\cap B$ $\therefore$ $5\in A$，且$5\in B$

令$a^3-2a^2-a+7=5$，解这个方程得：

$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=-1$

当$a=2$时，$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{-4,\ 5,\ 2,\ 25\}$，

$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 25\}$。

当$a=1$时，$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{-4,\ 4,\ 1,\ 12\}$，

$A\cap B=\{4\}$，不符合已知条件，$a=1$舍去。

当$a=-1$时，$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{-4,\ 2,\ 5,\ 4\}$

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 5\}$，不符合已知条件，$a=-1$也应舍去。

$\therefore$ a的值为2，$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 25\}$。

分析与总结：本题有助于巩固交集、并集的概念和求法。已知$A\cap B=\{2,\ 5\}$，既说明2和5是两集合的公共元素，又说明除2、5之外两集合没有其它的公共元素，解出a的值来以后，要代入B中的三个代数式去检验，把不符合已知条件的都舍去。再根据并集的定义写出$A\cup B$。

例9 对于集合A、B、C，如果$A\subset B$，$B\subset C$，求证：$A\subset C$。

证明：在集合A中任取一个元素x，

$\because$ $x\in A$，$A\subset B$ $\therefore$ $x\in B$

又$\because$ $B\subset C$，$\therefore$ $x\in C$

再$\because$ $B\subset C$，$\therefore$ C中至少存在一个元素y，$y\notin B$

$\because$ $A\subset B$ $\therefore$ 必有$y\notin A$

根据真子集定义：$A\subset C$。

分析与总结：证明题在本章习题中占的比例很小，但适当选择一些证明题，对学生掌握有关概念、提高分析问题和推理的能力是很有好处的。加强代数证明题的训练，对学好高中代

数很有作用。

例10 判断下列各组函数是否是同一个函数：

(1) $y=x(x\in R)$ $y=\sqrt{x^2}(x\in R)$；

(2) $y=2x^2(x\in Z)$ $y=2x^2(x\in R)$；

(3) $y=2\pi x(x>0)$ $l=2\pi r(r>0)$。

解：(1) 不是，因为当$x<0$时两个函数的对应法则不同。一个是$y=x$，另一个是$y=-x$。

(2) 不是，因为两个函数的定义域不同。

(3) 是，尽管表示自变量和函数的字母不同，但两个函数的定义域、对应法则都相同，根据函数的定义，它们是相同的函数。

分析与总结：初中学习函数时比较突出y与x之间的对应关系，正、反比例函数，一次函数等不同函数是用不同的对应法则（即解析式）来定义的。高中再学习函数时，对函数概念的理解应有所提高，函数概念是由定义域、值域及定义域到值域的对应法则三部分组成，三部分中有一个不同，就不能说是相同的函数。至于表示变量的字母不相同，对问题没有什么影响。

例11 (1) 已知函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求函数$f(x^2)$、$f(x-2)$的定义域。

(2) 已知$f(2x-1)$的定义域是$(0,2)$，求$f(x)$的定义域。

解：(1) 在函数$f(x)$中，$0\leqslant x\leqslant 1$

因而应有$0\leqslant x^2\leqslant 1$，可解出$-1\leqslant x\leqslant 1$。

由$0\leqslant x-2\leqslant 1$，可解出$2\leqslant x\leqslant 3$

$\therefore$ 函数$f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$，函数$f(x-2)$的定义域是$[2,3]$。

(2) $\because$ $0<x<2$

$\therefore$ $-1<2x-1<3$

∴ $f(x)$的定义域为$(-1, 3)$

分析与总结：这种求定义域的题比较抽象，因此变量之间的关系要清楚。在(1)题中，函数$f(x)$的定义域是$[0, 1]$即$0<x<1$，在函数$f(x^2)$和$f(x-2)$中，x^2，$x-2$分别取代了$f(x)$中x的位置，因此$0\leqslant x^2\leqslant 1$，$0\leqslant x-2\leqslant 1$，再从中把$x$的范围解出来。在(2)题中，$f(2x-1)$的定义域是$(0, 2)$，不是说$0<2x-1<2$，定义域总是指自变量$x$本身的取值范围，我们由$0<x<2$，得到$-1<2x-1<3$，$f(x)$中的$x$相当于$f(2x-1)$中的$2x-1$，所以$f(x)$中，$-1<x<3$。

例12 (1) 已知$f(x+1)=x^2-3$，求$f(5)$：

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}3 & x\in(-\infty, 3)\\ \pi & x=3\\ \pi-x & x\in(3, +\infty)\end{cases}$，求$f\{f[f(2)]\}$

解：(1) 设$x+1=5$，∴ $x=4$

把$x=4$代入$f(x+1)=x^2-3$

$f(5)=4^2-3=13$。

(2) $f\{f[f(2)]\}=f\{f[3]\}=f\{\pi\}=\pi-\pi=0$

分析与总结：求函数值一般的方法是把x的值代入函数关系式，通过计算得到。遇到分段函数时，要根据自变量所在的范围，代入相应的关系式。

例13 (1) 已知$f(x)=x^2-2x+3$，求$f(-x)$，$f(x^2)$，$f(x+1)$，$f[f(x)]$；

(2) 已知$f(\lg x)=x^2$，求$f(x)$

解：(1) $f(-x)=(-x)^2-2\cdot(-x)+3=x^2+2x+3$

$f(x^2)=(x^2)^2-2x^2+3=x^4-2x^2+3$

$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+3=x^2+2$

$$f[f(x)]=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+3$$
$$=x^4-4x^3+8x^2-8x+6$$

(2) 设$t=\lg x$，则$x=10^t$

代入$f(\lg x)=x^2$，得。

$f(t)=(10^t)^2$，即$f(t)=10^{2t}$

$\therefore\quad f(x)=10^{2x}$

分析与总结：在函数的记号 $y=f(x)$中，要理解“f”的含意。“f”体现了对应法则，$f(\quad)$就是对于括号内的量施以法则规定的运算。(2) 题中换元的方法要掌握。这样的练习对后面理解函数的奇偶性、单调性很有帮助。

例14 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$；

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{7}{2}\quad x\in[0,\ 5]$；

(3) $y=\sqrt{6x-x^2-5}$；

(4) $y=\dfrac{1}{(x-1)(2x+1)}$。

解：(1) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-5}{x+1}=2-\dfrac{5}{x+1}$

$\because\quad \dfrac{5}{x+1}\neq 0\quad\therefore\quad y\neq 2$

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$的值域是$\{y\mid y\in R，且y\neq 2\}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}(x-3)^2-1$

当$x=3$时，y有最小值-1

$\because\quad 3\in[0,\ 5]$，$\therefore\quad y$在$[0,\ 5]$上的最小值为$-1$。

$\because\quad x=0$与对称轴$x=3$距离较远

$\therefore\quad f(0)$是$[0,\ 5]$上的最大值，$f(0)=\dfrac{7}{2}$。

∴ 函数 $y=\frac{1}{2}x-3x+\frac{7}{2}$在〔0，5〕上的值域为〔$-1$，$\frac{7}{2}$〕

(3) $y=\sqrt{6x-x^2-5}$

此函数的定义域为〔1，5〕，

$6x-x^2-5$在〔1，5〕上的值域为〔0，4〕

∴ 函数 $y=\sqrt{6x-x^2-5}$ 的值域为〔0，2〕

(4) $y=\frac{1}{(x-1)(2x+1)}$

此函数的定义域是$x\neq1$、$x\neq-\frac{1}{2}$的全体实数。

将函数式化为$2yx^2-yx-(y+1)=0$

x是实数，即关于x的方程

$2yx^2-yx+(y+1)=0$有实数根。

$\Delta\geqslant0$，即$(-y)^2-4\cdot2y(y+1)\geqslant0$

解这个不等式得 $y\leqslant-\frac{8}{9}$或$y\geqslant0$

把 $y=-\frac{8}{9}$，$y=0$代入原函数关系式检验可知$y\neq0$

∴ 函数 $y=\frac{1}{(x-1)(2x+1)}$的值域为$(-\infty,\ -\frac{8}{9})\cup(0,\ +\infty)$。

分析与总结：象(4)题这样使用判别式求函数值域，要注意y的取值范围的端点的情况，如从判别式解出$y\geqslant0$，从函数关系式中看到应把$y=0$舍去。

例15 作下列函数的草图：

(1) $y=\sqrt{(x-3)^2}$；　　(2) $y=2-\frac{|x-1|}{x-1}$；

(3) $y=|x^2+4x+3|$；　　(4) $y=|x|^2-2|x|-1$。