

高等数学

(基础部分)

湖北高等数学教材编组选编

湖北人民出版社

· 工業專科，一校試用教科書



高等數學

(基礎部分)

湖北省三年制工業專科學校
高等數學教材選編組選編

湖北人民出版社



內 容 提 要

本书是适应三年制工业专科学校的教学需要而选編的。其内容包括：解析几何（包括行列式初步、矢量代数、平面和空間解析几何）；一元函数微积分学（包括微分学、积分学、级数和微分方程初步），多元函数微积分学（重积分和曲线积分）。其中以一元函数微积分学为主干。全书教学时数估計約140学时（其中习题課30学时）。

本书也可作为二年制工业专科学校的高等数学教材。

工业专科学校試用教科书

高 等 数 学

（基 礎 部 分）

湖北省三年制工业专科学校

高等数学教材选編組选編

*

湖北人民出版社出版（武汉解放人路332号）

武汉市书刊出版业营业許可證新出字第1号

湖北省新华书店发行

武汉市国营武汉印刷厂印刷

*

787×1092毫米 $\frac{1}{32}$ × 18 $\frac{9}{16}$ 印張 · 431,000字

1961年7月第 1 版

1961年 1 月第 1 次印刷

印 数 1—13,350

統一書号：13106·22

定 价：1.70元

选 編 說 明

本書是为三年制工业专科学校高等数学（基础部分）的教学需要而选編的。所依据的主要蓝本是：

【1】 陈惠民著高等数学教程第一、二、三卷；

【2】 王渠芳、刘宝三等編高等数学（干部特別班用）。此外还参考了天津大学等27所高等工业学校編的高等数学（基础部分）。

为了适应工业专科学校的需要和当前工业专科学校的实际情况，对主要蓝本作了較大的刪減。例如我們刪去了关于积分存在定理的敘述、綫性微分方程組、三重积分在柱面坐标和球面坐标中的計算法以及第一型曲綫积分等内容。为了避免与中学教材重复，又刪去了二阶行列式。关于数列的极限也未另加敘述。考虑到曲面积分及场論初步并不为工业专科学校各个专业所迫切需要，因此把它們放到无綫电类专业部分去了。此外在內容的敘述上也作了某些簡化和更改以及一些小的次序上的变动。

本書着重于基本概念的闡述与基本方法的訓練，并以一元函数微积分学为主干，俾便帮助讀者能对高等数学中最基本的部分有較深切的了解与較牢固的掌握。

本書是由李修睦、楊善基、夏振东、陈本綺、何耀南、柏盛桃、閻家麟等同志选編的。复經路見可、李修睦、閻家麟等同志审訂修改。大家水平有限，且時間仓促，变动原著的地方也未及和原編著者商討，不当之处在所难免，希望見到和使用本書的同志們尽量提供意見，以便修改提高。

序

为解决工业专科学校基础課和各类专业共同的基础技术課的教材問題。中央教育部責成我們：組織选編高等数学、普通物理、普通化学、俄語、工程力学、画法几何及制图、机械原理及机械零件、电工学、热工学及金屬工艺学等10門課程的19种教材；同时要求在四月全部脫稿，并在質量上比現有教材有所提高。

对于我們的力量來說，这个任务是艰巨的。但我們也認識到，这是貫徹“調整、巩固、充实、提高”的八字方針和提高教學質量的重要措施之一；从当前工业专科学校教材缺乏的严重情况来看，是一项政治任务。應該尽我們最大的努力去完成。为此，我們一面紧紧依靠中央教育部和中共湖北省委宣傳部的領導，一面从我省24所高等院校中抽出91位教师集中力量进行选編工作；并承广东省教育局的协助，选派了四位教师参加。这就使我們的工作既有明确的方向，又有比較可靠的力量，保證了任务的完成。

在选編过程中，我們特別注意了如下几个問題。首先是从工业专科学校的实际出发。由于時間緊迫，而又沒有現成的工业专科学校的教材作为选編基础，我們只好从本科教材中选择一些适当的藍本进行加工。根据这种客观情况，我們一再強調选編教材的分量与質量要从工业专科学校的教學要求出发；要注意到专科和本科的培养目标、每門課程的具体任务和学时数都是不同的。

其次，由于目前专科学校的教學条件（比如教师和学生的水准、教學仪器設備等等）还比較差，学生負担也比較重，因此我

們特別強調貫徹“少而精”的原則，吸收几年来各校對課程內容精簡、加深、更新的經驗，反對不適當地“求多、求全、求深、求新”的思想。

第三，由於我們選編的是通用的基礎課程和基礎技術課的教材，為了使學生獲得比較廣博和鞏固的基礎理論知識，對於基礎課，我們特別注意了貫徹“在保持科學系統性、基本內容的前提下，密切聯繫實際和適當結合專業”的原則。對於基礎技術課，雖然具體課程都經過具體分析，但基本上也都是根據上述原則進行選編的。

為達到上述目的，參加選編工作的教師同志們曾進行多次調查訪問，對原稿進行反復討論、修改和審查。但由於任務重，時間緊，特別是經驗不足，水平有限，我們這次選編的教材，只是解決了“有無”的問題。缺點和錯誤是在所難免的。懇切希望使用這些教材的全體師生同志們，多多給我們提供意見，以便今後進行修改，使這些教材的質量逐步得到提高。

湖北省教育廳

1931年5月10日

緒 論

高等数学是高等学校的一門基础課。学习高等数学，不只是使讀者在学习其他基础課，基础技术課与专业課时，有必备的基础知識，給讀者在用教学方法解决生产实际中不断出现的新問題时打下一定的基础，更能使讀者进一步建立辯証唯物主义观点，帮助讀者鍛炼思維能力。在学习高等数学之前，首先要弄清楚，它的研究对象是什么？它的发展过程怎样？它的发展和生产实践有什么关系？

一、数学研究的对象及其特点

伟大的导师恩格斯曾这样講过：“純数学是以现实世界的空間的形式和数量关系——这是非常现实的資料——为对象的”。①

大家在中学所学过的数学里，几何学是以研究空間形式为主要对象的一門学科，算术和代数以研究数量关系为主，三角学则二者兼而有之。初等数学固然如此，高等数学亦莫不如是，无论那門数学，不論它的理論有多深，計算有多繁，总脱离不了空間形式与数量关系这两种内容。

欧洲工业革命以后，变动的概念引入数学，大大丰富了数学的内容。为了方便起見，乃把过去以研究离散的、靜止的常量为主的那些数学知識，叫做初等数学（如初等几何、代数、三角等），而把以研究变动的相互制約的变量为主的那些数学知識，

① 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社，1957年版，37頁。

叫做高等数学（如解析几何、微积分、微分方程等）。高等数学和初等数学是有它们的内在的密切联系的；二者一脉相通，不能截然分开。

由于数学研究的具体对象和其他学科不同，数学有其自身的特点。它的第一个主要特点是高度抽象性。它研究的空間形式和数量关系不只是存在于某一种特定的物質形态或某一种特定的运动形式。譬如 $3+5=8$ 这一量的关系它不只是表达了三头牛加五头牛等于八头牛这样的数量关系，它同时表达了一切三个单位加五个单位等于八个单位的数量关系。又如某一微分方程，它可以用来描述許多自然现象，因此数学所表现出来的抽象程度是很高的。

数学的另一主要特点是它的应用广泛性。微积分与微分方程以及分析系統的許多分支，广泛地应用于自然科学和工程技术的各个部門，成为研究这些学科必不可少的工具。目前这些分支又正被引用到社会科学某些部門。比如概率論既用以解决工程技术上因随机现象而出現的問題，也用以解决国民經济事业中的同样問題，計算数学同时解决工程技术上和国民經济中大工作量的計算問題；几何代数的某些分支也正应用于各方面。总之比起其他的科学来，不管是自然科学还是社会科学，数学的应用是更有其广泛性的。

二、数学的发生、发展及其与生产实践的关系

数学的发生是比較早的。它是一门有悠久历史的科学。随着时代的不断进步和社会生产力的不断发展，数学也不断地获得新的生命力。

在紀元前由于农业和建筑业的需要，人类积累了大量有关几何图形的知識，后来发展成为几何学。欧几里得的“几何原

本”，是一部有名的總結性的著作，一直流傳到今天。隨着人類社會制度的變革，社會分配方式發展，商業來往逐漸頻繁，算術和代數，也就逐漸發展起來了。三角學的發展，則起源於測量和天文曆算，直至十六世紀，數學的發展比較緩慢。十六世紀末葉到十七世紀，由於生產和技術需要的刺激，數學的發展呈現出蓬勃的氣象。因機械工業的誕生和成長，航海、造船、採礦等事業的迅速發展，引出了有關幾何學和力學方面的大量新問題（如運動的速度、曲線的切綫、圖形的面積等等）；在大量解決這些問題的過程中，引入了運動和變化的概念，形與數的結合，誕生了解析幾何，接着又誕生了微分學與積分學^①。解析幾何與微積分的誕生，开辟了數學發展的一個嶄新時代。此後兩百年內，由於生產力的迅速發展，由於運動學、水力學、電學等學科的需要，在微積分學的基礎上建立和發展了一系列的新的分支，如微分方程、復變函數等。同時，由於這些分支的建立和發展，由於新方法的引進，代數和幾何，也得到了新的發展，形成了很多分支。

這一時期，數學的發展快，分支多，理論基礎是不夠鞏固的。十九世紀到二十世紀的初葉，一些數學工作者轉而從事整理和系統化的工作，取得了很大的成績。

二十世紀三十年代以後，尤其是最近十多年來，由於原子能、高速飛行、無線電技術、自動控制、大型水利工程和土建工程以及國民經濟事業的日益發展，都需要較高深或者新的數學理論做工具，因此，一些新的數學分支，如計算數學、信息論、排隊論、規劃論等便迅速建立和發展起來；一些老的分支如微分方程、概率論等也獲得了新的發展。

十月革命以後，蘇聯的數學，有了巨大的發展，取得了輝煌

① 笛卡兒是解析幾何的奠基人，牛頓和萊布尼茲同時發表微分學。

的成績。人造卫星、火箭、导弹、宇宙飞船上天，尤其载人飞船上天后又安全返回大地，都是和苏联的先进数学水平分不开的。

我国农业发展比较早，建筑事业和天文历算也发展比较早，纪元前一千多年，我們祖先便已累积了很丰富的数学知識。那个时候，我們祖先便已知道了勾、股、弦的关系。流传下来最古老的数学著作“周髀算經”和“九章算术”都是紀元前一百年前后的作品。其中总结了我们祖先在生产斗争中所积累的有关算术、代数、几何、三角的宝贵知識。公元四、五世紀时，我們祖先对圓周率的計算已达到相当精密程度，当时祖冲之已求得 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之間，并定 $\pi = \frac{355}{113}$ 为密率， $\pi = \frac{22}{7}$

为約率。一直到十三世紀，我們祖先在代数方面也不斷地获得杰出的成就，就中較著名的如同余式的問題，二項式 $(a+b)^n$ 展开式系数的求法，以及高次方程近似解法等，其发现时代都比其他国家早數百年甚至千年以上。所可惜的，我們国家曾长期停留在封建社会，生产力发展迟緩，数学的发展受到了很大的限制。

在中国人民革命胜利以前，百多年間，我們国家沦为半封建半殖民地，生产力受到了严重的束縛，数学談不上有什么发展，只是少数人从资本主义国家輸入一些残缺不全的理論，和从事一些依賴性的研究。

解放以后，在党的领导下，我国的生产力得到了空前的解放，数学和其他科学一样，有了蓬勃的发展。一些重要的、但基础薄弱甚至空白的部門，如微分方程、概率論、数理統計、数理邏輯、計算数学、运筹学等都已开始发展和填補起来。特別是1958年在党的总路綫的光輝照耀下，全国各地各部門掀起了大跃进的高潮，工业、交通运输业等許多主要建設事业都飞跃前进，給祖国数学的发展，开辟了广闊的园地，数学工作者正和工农群

众以及有关从业人员在一起，研究解决或已解决了工程技术 与 国民經济中所提出来的許多問題（如水壩应力分析、气象預报、工业产品質量控制、物資調运、农业劳力安排、工业合理下料等），取得了許多成績，尤以运筹学里的綫性规划，有比較独特的成就。

优越的社会制度，給数学的发展，开辟了无限美好的远景，只要我們沿着党所指示的方向前进，密切联系生产实际，不断提高理論水平，在較短的时间內，我国数学是可以取得更大、更多的成就的。

从以上数学的历史发展来看，无论在东方或西方，数学的发展，都是和当时人們的生产实践密切相联系的。

毛主席在实践論中写道：“馬克思主义者認为人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西。人的認識，主要地依賴于物質的生产活动，逐漸也了解自然的现象，自然的性質，自然的規律，人和自然的关系；而且經過生产活动，也在各种不同程度上逐漸也認識了人和人的一定的相互关系。一切这些知識，离开生产活动是不能得到的。”^①数学作为一种科学，作为人类知識部門之一，当然不能例外。

所以，虽然数学研究的对象是现实世界的空間形式和数量关系，但如果片面夸大数学的抽象性，以为数学特殊，可以脱离实践独自发展，那是非常錯誤的。

三、學習高等数学对应注意的几个問題

这本适用于三年制工业专科学校的高等数学，包含基础部分和专业部分。基础部分包括解析几何、微积分学的系統理論知識

① 毛泽东选集，第一卷，人民出版社1951年版，281面。

及微分方程初步；其中以微积分学为主体。微积分学研究变量的数学理論，它提供了对各种运动变化过程中量与量之間相互約制规律的研究方法——极限法，它是工程技术及其他自然科学研究中必講的基础理論知識。专业部分分三种，适用于无綫电、土建、化工三个类型专业。它們与专业需要配合比較密切。基础部分与专业部分虽各自成册，但前者与后者的每个部分实构成一个統一的整体。

要学好高等数学，無論是基础部分或专业部分，有几个問題都必須注意。首先要很好地理解基本概念，然后再系統地掌握基本理論，决不能以为学习数学，就只是为了学习专业知識；而認為某些概念与我无关，某些理論可以置之不管。这样是学不好高等数学的。

其次，要掌握熟練的計算技术。計算不熟練，要想运用自如地把数学作为学习其他科学和解决实际問題的有力工具，是十分困难的。

第三，要学会把实际問題描述成数学問題的能力，这是运用数学解决实际問題的第一步。尤其从事工程技术的人，将来会經常遇到这样問題。所以在学习高等数学时要經常注意学会这个本领。当然，高度的技巧，还有待于在实际工作中不断地学习。

第四、初学高等数学的人，理解数学的抽象概念，运用数学的理論，一开始会遇到一些困难。因此，必須經常注意数学方法論上某些特有的技巧，来克服所遇到的困难。

最后，在运用数学这一工具时，大家要解放思想，敢于大胆創造。特別要虛心学习劳动人民群众丰富的生产經驗，这是根本，这是源泉。沒有这种“根本”或“源泉”，大胆創造便沒有巩固的基础，往往会走弯路，尤其是走不出新路来。

目 次

緒 論

第一章 行列式及綫性方程組	1
第一节 三阶行列式的定义及其展开法	1
§ 1.1.1 三阶行列式的定义	1
§ 1.1.2 三阶行列式的展开法	5
第二节 三阶行列式的性質	6
第三节 三元綫性方程組	10
第四节 齐次綫性方程組	16
§ 1.4.1 两个方程的情形	16
§ 1.4.2 三个方程的情形	19
第二章 平面解析几何	26
第一节 直角坐标法	26
§ 2.1.1 数軸	26
§ 2.1.2 平面上点的直角坐标	27
§ 2.1.3 几个簡單問題	29
第二节 曲綫与方程	31
§ 2.2.1 把曲綫作为动点的軌迹以建立方程	32
§ 2.2.2 方程的軌迹的描法	33
第三节 直綫	36
§ 2.3.1 由已知条件建立直綫方程	36
§ 2.3.2 由方程作图	41
第四节 二次曲綫	42
§ 2.4.1 橢圓	42
§ 2.4.2 双曲綫	47

§ 2.4.3 拋物綫	52
§ 2.4.4 坐标变换	53
第五节 极坐标系	61
§ 2.5.1 极坐标	61
§ 2.5.2 极坐标方程	62
§ 2.5.3 直角坐标与极坐标之间的关系	67
第六节 参数方程	69
§ 2.6.1 几何上常用的参数方程	70
§ 2.6.2 参数方程的作图法	73
第三章 空間解析几何	90
第一节 空間直角坐标	90
§ 3.1.1 坐标的規定	90
§ 3.1.2 空間解析几何中的几个簡單問題	91
第二节 有向綫段及其投影	93
§ 3.2.1 有向綫段	94
§ 3.2.2 投影	94
§ 3.2.3 綫段的方向余弦	97
第三节 矢量代数	101
§ 3.3.1 矢量的綫性运算	101
§ 3.3.2 矢量的分解	103
§ 3.3.3 矢量的乘法	106
第四节 曲面与方程以及曲綫与方程	110
§ 3.4.1 曲面与方程	110
§ 3.4.2 柱面	111
§ 3.4.3 曲綫与方程	114
第五节 平面与直綫	116
§ 3.5.1 平面与方程	116
§ 3.5.2 空間直綫的方程	119
第六节 二次曲面的标准形式	122

問題和习題

第四章 函数与极限	135
第一节 函数概念及其表示法	135
§ 4.1.1 函数的定义	135
§ 4.1.2 函数的記号	136
§ 4.1.3 函数的表示法、函数的图形	137
§ 4.1.4 区间、函数的定义域	139
§ 4.1.5 反函数及其图形	142
§ 4.1.6 复合函数(函数的函数)	144
§ 4.1.7 基本初等函数与初等函数	145
§ 4.1.8 函数的周期性、奇偶性与单调性	147
第二节 无穷大量与无穷小量	148
§ 4.2.1 有界变量与无穷大量	149
§ 4.2.2 无穷小及其与无穷大的关系	151
§ 4.2.3 无穷小的运算	153
第三节 极限及其运算法则	155
§ 4.3.1 函数的极限定义	156
§ 4.3.2 极限与无穷小的关系	161
§ 4.3.3 极限的四则运算	162
第四节 函数的連續性	165
§ 4.4.1 連續的概念	165
§ 4.4.2 連續函数的运算与初等函数的連續性	167
§ 4.4.3 函数的间断点	170
§ 4.4.4 連續函数在闭区間的特性	173
§ 4.4.5 連續函数的反函数	175
第五节 极限存在准則与无穷小的阶	176
§ 4.5.1 极限存在准則	176
§ 4.5.2 两个重要的极限	177

§ 4.5.3 双曲綫函数及其图形	181
§ 4.5.4 无穷小的阶	184
問題和习題	
第五章 导数及其应用	191
第一节 导数的定义与求法	191
§ 5.1.1 函数的变化率問題与导数定义	191
§ 5.1.2 导数的求法	194
§ 5.1.3 导数的几何意义	195
§ 5.1.4 函数的可导性与連續性	197
第二节 初等函数的导数	199
§ 5.2.1 导数公式第一表	199
§ 5.2.2 常量的导数	200
§ 5.2.3 和的微分法	201
§ 5.2.4 积的微分法	201
§ 5.2.5 商的微分法	203
§ 5.2.6 复合函数微分法	204
§ 5.2.7 举例	205
§ 5.2.8 隐函数微分法	206
§ 5.2.9 导数公式第二表	208
§ 5.2.10 对数函数的导数	209
§ 5.2.11 幂函数的导数公式的証明	212
§ 5.2.12 指数函数微分法	212
§ 5.2.13 三角函数的导数	213
§ 5.2.14 反三角函数的导数	216
§ 5.2.15 反函数微分法	219
§ 5.2.16 高阶导数	220
第三节 导数的应用	223
§ 5.3.1 中值公式	223
§ 5.3.2 函数的增減性	224

目 录

§ 5.3.3 函数的极值	233
§ 5.3.4 函数在区间上的最大值和最小值	233
§ 5.3.5 曲线的凹凸	233
§ 5.3.6 极值的第二判别法	233
§ 5.3.7 研究函数的一般程序举例	233
§ 5.3.8 函数以参数方程给出时的导数	239
§ 5.3.9 广义中值公式	240
§ 5.3.10 不定式的定值法则	241
习题五	
第六章 微分及其应用	257
第一节 微分的定义与计算法	257
§ 6.1.1 近似值与误差	257
§ 6.1.2 微分的定义	259
§ 6.1.3 微分与导数的关系	261
§ 6.1.4 微分形式不变性	264
§ 6.1.5 函数增量的近似值与函数的近似值	266
§ 6.1.6 高阶微分	268
第二节 微分的几何应用	269
§ 6.2.1 弧的微分, 切线的方向余弦	269
§ 6.2.2 曲率	271
§ 6.2.3 曲率半径, 曲率中心, 曲率圆	274
习题六	
第七章 不定积分	278
第一节 不定积分的概念	278
§ 7.1.1 原函数的概念	278
§ 7.1.2 不定积分, 基本积分表	280
第二节 不定积分的求法	286
§ 7.2.1 求积分的基本方法	286
§ 7.2.2 积分表的查法	300