中等專業学校教科書

工業、農林、財經性質專業適用

三　角

高等教育出版社

中等專業学校教科書

三　　角

工業、農林、財經性質專業適用

高等教育出版社

說　　明

我司組織中等專業学校数学教师汪良材、張子千、張永丰、章景星、曹安礼、楊英明、邱鳳和七位先生，根据我部1955年批准的300小时和410小时的中等專業学校数学教学大綱，采取分工編寫、集体討論的办法，編出了中等專業学校工業、農林、财經性質專業適用的代数、几何、三角、高等数学教科書。这些書对医藥性質專業也能作参考用。

这本三角教科書是章景星先生參照苏联柯仁烏若夫所著三角学教程編寫的。初稿曾於1955年年底印發部分中等專業学校征求意見。今年春天，根据各校寄來的許多宝貴意見，作了較大的修改。本書初步定稿后，曾請北京师范大学程廷熙教授審閱。程先生在百忙中抽时間給本書提供了進一步修改的宝貴意見，使本書在付印前能由編者再作一次修正。在这里，对程先生的热忱帮助表示感謝。

由於时間倉促，匆匆付印，缺点在所难免。希望中等專業学校教师以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我司），以便再版时一併修正。

高等教育部中等專業教育司
1956年5月

三　　角

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）
中华書局上海廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·90　開本 850×1168 1/32　印張 5 15/16　字數 144,000
一九五六年七月上海第一版
一九五六年七月上海第一次印刷
印數 1—400,000　定價(8) ¥ 0.70

目 錄

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

緒　言

三角学的俄文名詞 тригонометрия, 是由希臘文 τριγουου 和 μετρειυ 二詞構成的,它的原义是三角形的測量。

所謂三角形的測量,改用一般的說法就是解三角形,也就是根据三角形的部分已知元素(边和角)來求其他未知元素的問題。

在古代的生產实踐中,由於農業上的需要(編著正确的曆書),以及航海上的需要(根据星宿的位置來确定船在大海中的航程),引起了天文学的發生和發展,而解三角形是研究天文学的不可缺少的工具。

在現代建設事業中,基本建設的正确設計,就要依靠地形的測量和計算,無論在那一个建設工地上,測量隊伍往往是一切建設隊伍的先鋒。測量工作归根結底也是解三角形。

因此,解三角形的問題,从古代起就構成了三角学的实用基礎,直到現在它仍然是三角学的一个重要内容。

三角学,是用几种随着角的变化而变化的三角函数來建立三角形各元素間的关系的。有了这些函数,就能使三角形的性質研究得比純粹几何上更加深入和具体。三角函数也廣泛的应用到物理学以及其他的各种应用技術科中,对数学本身來說,三角函数是研究高等数学的不可缺少的基礎知識。

因此,三角函数性質的研究,就成为三角学中另一个重要内容。

三角学和其他科学一样,是在解決具体問題的过程中,由人类的实踐而成長起來的。它創始於古希臘时代,它的最初知識是和天文学密切联系的,其后經过不少学者的研究和創造而日益發展,到十五世紀中叶才脫离天文学而成为独立的科学,在十六世紀法

國数学家韋达 (Vieta) 开始用文字符号表示三角公式后三角学才具有現代的形式。

三角函数近代理論的建立，才不过二百年左右，著名的彼得堡科学院院士尤拉(Eüler, 1707—1783)应推为近代理論的創始人。尤拉在他的著作"分析引論"中，把三角学進行了解析的敍述，从不多的一些基本公式推出所有的三角公式，他提出三角函数是表示对应的三角線和圓半徑的比值的数，把三角函数引入了代数的領域。

在我國古代算書中載有重差術，它起源於"周髀"，到三國时代就很完备。

"周髀"大約是公元前一世紀的作品，在这本書內載有陈子应用相似三角形比例測量太陽的高、远、星宿的行度等問題。

三國时代(公元三世紀)魏刘徽在"九章算術"序言里說："凡測高而欲兼知其远的，必須用兩表。"，表就是竿，这句話的整个意思是說：用同样長的兩根竿直立在地面，就能測得目的物的高和远。刘徽举了九个測量題附在"九章算術"后面，並用双重勾股及兩股差数作比例項的方法加以解出，所以称为重差術。

用重差術解測量問題虽不用三角函数，但能直接度量相似直角三角形的兩边，用其比值代替三角函数，在一部分应用上可得相同的效果。

由此可見我國在公元前几世紀，就能用类似三角学的方法來解測量問題了，只是以后研究的人很少，以至在这个問題上未能取得更大的成就，这是非常可惜的。

第一章　銳角三角函数
直角三角形解法

§1. **銳角三角函数定义** 取任意銳角 α (圖 1)。从角的任一边上不与頂点 A 重合的 B 点，引另一边上的垂線 BC，構成含銳角 α 的直角三角形 ABC；分别用 a, b 和 c 表示三边 BC, AC 和 AB 的長。对於这三边所組成的六个比：

$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$，有下面的定理：

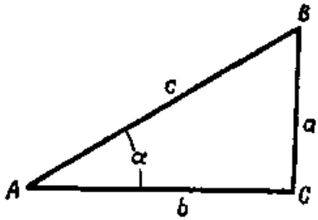

圖 1

定理 比值 $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$，僅决定於銳角 α，与作直角三角形时，B 点位置的选擇無关。

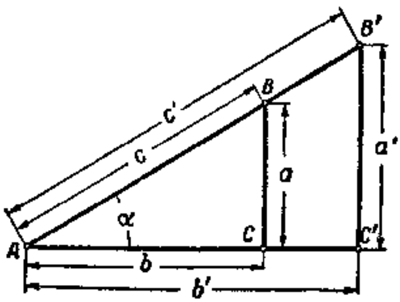

圖 2

証明 在銳角 α 的任一边上任取兩点 B 和 B' (圖 2)，作直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$，分别用 a, b, c 及 a', b', c' 表示它們的三个边。

由於这兩直角三角形都含銳角 α，

因此
$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C',$$

所以
$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},\quad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\quad \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},\quad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}。$$

这个定理的証明，說明了对於每一个已知銳角 α，有完全确定的六个比值 $\frac{a}{c}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$ 与之对应；所以这些比值都是銳角 α 的函数。

現在我們給出下面四个定义①：

定义 1 銳角 α 所对直角边 a 和斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的**正弦**；用記号 $\sin\alpha$ 來表示；即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}。$$

定义 2 与銳角 α 相鄰的直角边 b 和斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的**余弦**；用記号 $\cos\alpha$ 來表示；即

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}。$$

定义 3 銳角 α 所对的直角边 a 和与此角相鄰的直角边 b 的比值，叫做銳角 α 的**正切**；用記号 $\operatorname{tg}\alpha$ 來表示；即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}。$$

定义 4 与銳角 α 相鄰的直角边 b 和此角所对的直角边 a 的比值，叫做銳角 α 的**余切**；用 $\operatorname{ctg}\alpha$ 來表示；即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}。$$

从前面的分析，可知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$ 都是 α 角的函数，这些函数叫做**三角函数**。

下面我們用例說明，如何用度量方法，求出任一銳角的三角函数的近似值。

例：求角 48° 的正弦，余弦，正切和余切的近似值。

利用直尺，圓規和量角器作出直角三角形 ABC 使 $\angle BAC=$

---

① 比 $\frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$ 分別叫做銳角 α 的正割和余割，本章暫不研究。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$=48°$。为了計算上方便起見取斜边 $AB=100$ 毫米(圖 3, 按实际長度縮为三分之二)。由圖上量得:

$BC\approx 74$ 毫米,

$AC\approx 67$ 毫米。

所以

$$\sin 48°\approx\frac{74}{100}=0.74;$$

$$\cos 48°\approx\frac{67}{100}=0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48°\approx\frac{74}{67}=1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48°\approx\frac{67}{74}=0.90。$$

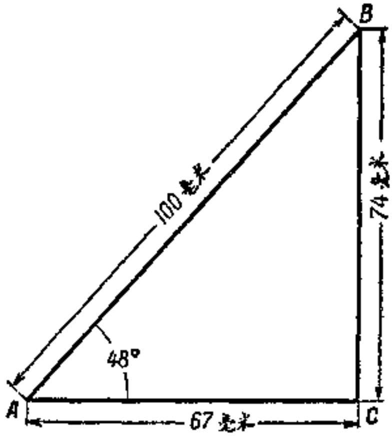

圖 3

用同样方法可以求得任一銳角的正弦、余弦、正切和余切。

从正弦和余弦的定义推得: 銳角 α 的正弦和余弦的函数值是小於 1 的正数。

从正切和余切的定义推得: 銳角 α 的正切和余切的函数值可为任何正数。

§2. 由銳角的已知三角函数值,求作这个角 在上節明确了三角函数的定义,並知道如何用度量方法求出三角函数的近似值。現在我們來研究相反的問題,即如何根据已知三角函数値作出和它对应的銳角。为了这个目的,我們提出下列定理:

定理 1 如果 y 是小於 1 的正数,那么一定有一个正弦等於 y 的銳角 α,而且这样的角只有一个。

証明: 作出直角三角形 ABC (圖 4) 使它的一个直角边等於 y,而斜边等於 1。於是

$$\sin\angle BAC=\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{y}{1}=y。$$

这就証明了正弦等於 y 的銳角是存在的。

假設另外有一个銳角 β，它的正弦也等於 y，那么我們一定能夠作出一个直角三角形 $A'B'C'$ 使 $\angle B'A'C'=\beta$（圖 5）。

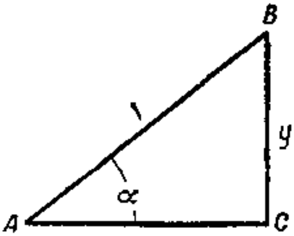

圖 4

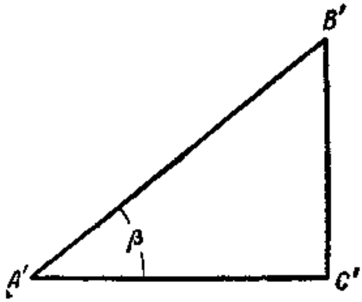

圖 5

於是

$$\frac{B'C'}{A'B'}=\sin\beta=y。$$

但 $$\frac{BC}{AB}=y,$$

所以 $$\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{BC}{AB}。$$

因此， $$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C';$$

由此得出， $$\alpha=\beta。$$

这就是說，如果有一个銳角 β，它的正弦也等於 y，那么这个銳角必定和銳角 α 相等。所以正弦等於 y 的銳角是唯一的。

同样可以証明下列定理：

定理 2 如果 x 是小於 1 的正数，那么一定有一个余弦等於 x 的銳角 α，而且这样的銳角只有一个。

定理 3 如果 p 是任何正数，那么一定有一个正切等於 p 的銳角 α，而且这样的銳角只有一个。

定理 4 如果 q 是任何正数，那么一定有一个余切等於 q 的銳角 α，而且这样的銳角只有一个。

下面是这种問題的实例：

例 1. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$，求作銳角 α。

解：在任意直線上取線段 $DE=3$（圖 6）。

过 E 点作直線 $EF\perp DE$。

以 D 点为中心，用等於 4 的半徑画弧交 EF 於 K。連結 DK。

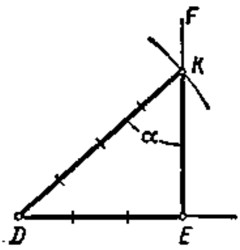

圖 6

因为 $\sin\angle EKD=\frac{DE}{DK}=\frac{3}{4}$，所以 $\angle EKD$ 就是所求的銳角 α。

例 2. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{5}$，求作銳角 α。

解：在任意直線上取 $BC=2$（圖 7）。

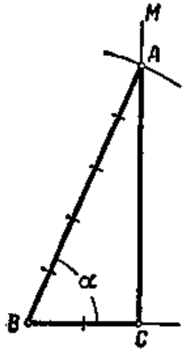

圖 7

过 C 点引直線 $CM\perp BC$。

以 B 点为中心用等於 5 的半徑画弧交 CM 於 A。連結 AB。

因为 $\cos\angle ABC=\frac{2}{5}$，所以 $\angle ABC$ 就是所求的銳角 α。

例 3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$，求作銳角 α。

解：作直角 MON，並在它的一边 OM 上截取線段 $OA=3$（圖 8）。

在另一边上截取線段 $OB=2$。連結 AB。

因为 $\operatorname{tg}\angle OAB=\frac{OB}{OA}=\frac{2}{3}$，所以 $\angle OAB$ 即为所求的銳角 α。

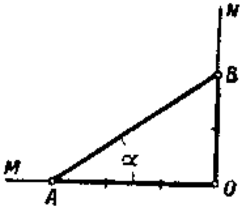

圖 8

例 4. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=3$，求作銳角 α。

解：作直角 MKL，並在它的一边 KM 上截取線段 $KC=1$

(圖 9)。在另一边上截取線段 $KA=3$。連結 AC。

因为 $\operatorname{ctg}\angle CAK=\frac{AK}{CK}=\frac{3}{1}=3$，所以 $\angle CAK$ 即为所求銳角 α。

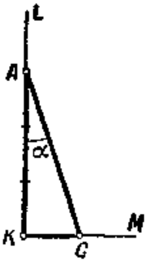

圖 9

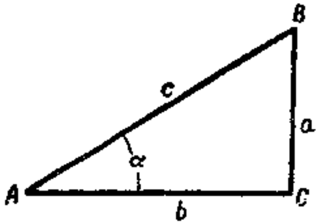

圖 10

§3. **同一銳角的三角函数間的关系** 取任意銳角 α。作出直角三角形 ABC 使 $\angle A=\alpha$ (圖 10)。設 $BC=a$，$CA=b$ 和 $AB=c$。

1. 根据勾股定理得：

$$a^2+b^2=c^2。$$

用 c^2 除等式的兩边得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1。$$

但 $$\frac{a}{c}=\sin\alpha,\quad \frac{b}{c}=\cos\alpha;$$

因此得： $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

即 一銳角的正弦和余弦的平方和等於 1。

2. 由 $$\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b} \text{ 和 } \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b},$$

可得： $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

即 一銳角的正切等於它的正弦和余弦之比。

3. 由 $$\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a} \text{ 和 } \operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a},$$

可得：
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
即　一銳角的余切等於它的余弦和正弦之比。

4. 由
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$
可得：
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;$$
即　一銳角的正切和它的余切互为倒数。

上面的等式表示出同一銳角的三角函数間的关系，对於任何銳角都能成立，所以它們是**三角恆等式**。上面的四个恆等式表示了三角函数間的基本关系。我們可以利用它們証明其他恆等式或化簡含三角函数的式子。下面就是这样的例：

例 1. 証明恆等式 $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$。

第一法改变左边：
$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha。$$

第二法改变右边：
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}。$$

例 2. 証明恆等式
$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)。$$

改变这个等式的左边：
$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha。$$

改变这个等式的右边：
$$\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha。$$

由於这个等式的兩边都能化为同一等式，我們可以断定已知恆等式成立。

例 3． 化簡：$\dfrac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}$。

$$\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha : \sin^2\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} : \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^4=\operatorname{ctg}^4\alpha。$$

§4． 根据銳角的一个三角函数，計算此角的其他三角函数值

根据前一節的公式，可以由一个銳角的三角函数值，計算此角的其余三角函数值。举例説明如下：

例 1． 已知 $\sin\alpha=\dfrac{20}{29}$，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解：从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

把 $\sin\alpha$ 的已知值代入，得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{29^2-20^2}{29^2}}=\sqrt{\frac{49\times 9}{29}}=\frac{21}{29}。$$

根据公式 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，可得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{29} : \frac{21}{29}=\frac{20}{21}。$$

再根据公式 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$，可得

$$\operatorname{ctg}\alpha=1 : \frac{20}{21}=\frac{21}{20}。$$

例 2． 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{45}{28}$，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解：从公式 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$，可得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{28}{45}。$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com