

中等專業學校教科書

工業、農林、財經性質專業適用

三 角



高等教育出版社

中等專業學校教科書

三角

工業、農林、財經性質專業適用

高教教育出版社

說 明

我們組織中等專業學校數學教師汪良材、張子千、張永平、章景星、曹安禮、楊英明、駱鳳和七位先生，根據我部1955年批准的300小時和410小時的中等專業學校數學教學大綱，採取分工編寫、集體討論的辦法，編出了中等專業學校工業、農林、財經性質專業適用的代數、幾何、三角、高等數學教科書。這些書對醫藥性質專業也能作參考用。

這本三角教科書是章景星先生參照蘇聯柯仁烏若夫所著三角學教程編寫的。初稿曾於1955年年底印發部分中等專業學校征求意见。今年春天，根據各校寄來的許多建議意見，作了較大的修改。本書初步定稿後，曾請北京師範大學程廷熙教授審閱。程先生在百忙中抽時間給本書提供了進一步修改的寶貴意見，使本書在付印前可能由編者再作一次修正。在這里，對程先生的熱忱幫助表示感謝。

由於時間倉促，匆匆付印，缺點在所難免。希望中等專業學校教師以及使用本書讀者多提意見（意見請寄北京高等教育出版社轉我們），以便再版時一併修正。

高等教育部中等專業教育司

1956年5月

三 角

高等教育部中等專業教育司編

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

中華書局上海廠印刷 新華書店總經售

書號 12010-90 開本 850×1168 1/32 印張 5 16/16 字數 144,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—400,000

定價(8) 0.70

目 錄

緒言	7
第一章 銳角三角函數 直角三角形解法	9
§ 1 銳角三角函數定義	9
§ 2 由銳角的已知三角函數值, 求作這個角	11
§ 3 同一銳角的三角函數間的關係	14
§ 4 根據銳角的一個三角函數, 計算此角的其他三角函數值	16
§ 5 30° 、 45° 和 60° 各角的三角函數	18
§ 6 互余兩角的三角函數	19
§ 7 角由 0° 變化到 90° 時三角函數的變化	20
§ 8 三角函數表	21
§ 9 直角三角形中邊與角的關係	24
§ 10 直角三角形解法的四種基本情形	25
§ 11 直角三角形解法的应用問題	27
習題	29
第二章 角的概念的推廣 角的測量法	35
§ 12 角的概念的推廣	35
§ 13 角的弧度法	36
§ 14 角的度與弧度的互換	37
§ 15 圓弧長	39
習題	42
第三章 三角函數概念的推廣 三角函數的週期性	44
§ 16 任意角三角函數的定義	44
§ 17 三角函數符號	46
§ 18 三角函數值在單位圓上的表示法	47
§ 19 三角函數的週期性	51
§ 20 0 , $\frac{\pi}{2}$, π 和 $\frac{3\pi}{2}$ 各角的三角函數值	52
§ 21 三角函數的遞增和遞減	55
§ 22 基本恆等式	58
§ 23 根據角的一個三角函數計算其餘各三角函數	59

§ 24	由角的已知三角函数值作該角	63
§ 25	最簡單的三角方程	67
	習題	70
第四章 任意角三角函数的簡化公式 三角函数的圖象		74
§ 26	負角的三角函数的簡化公式	74
§ 27	角的形狀为 $90^\circ + \alpha$ 的三角函数的簡化公式	76
§ 28	角的形狀为 $90^\circ - \alpha, 180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 270^\circ - \alpha, 270^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha$ 的簡化公式	78
§ 29	三角函数的圖象	85
§ 30	最簡單三角方程的通解公式	92
§ 31	解三角方程的一般步驟	95
§ 32	含同一自变量的同一三角函数的方程	96
	習題	97
第五章 余弦定理 加法定理 二倍角及半角的三角函数		101
§ 33	余弦定理	101
§ 34	關於正弦、余弦的加法定理	102
§ 35	關於正切、余切的加法定理	105
§ 36	二倍角的正弦、余弦及正切	108
§ 37	半角的正弦、余弦和正切	110
§ 38	含同一自变量的不同函数的三角方程	114
§ 39	含未知角及其倍角或半角的函数的三角方程	115
	習題	117
第六章 变换三角函数的和与差为乘積		121
§ 40	变换两个角的正弦或余弦的和与差为乘積	121
§ 41	变换两个角的正切或余切的和与差为乘積	123
§ 42	將表示式化为適於对数計算形式的例	124
§ 43	可化为左边为乘積右边为零的三角方程	126
	習題	128
第七章 反三角函数		131
§ 44	反三角函数概念	131
§ 45	關於反三角函数的例	138
§ 46	解三角方程的其他例子	139
	習題	143
第八章 斜三角形各元素間基本关系式 斜三角形解法		145

§ 47 斜三角形各元素間的相互关系.....	145
§ 48 正弦定理.....	145
§ 49 斜三角形解法.....	149
§ 50 三角函数对数表.....	152
§ 51 利用对数表进行计算的例子.....	153
§ 52 利用对数表解直角三角形的例子.....	154
§ 53 利用对数表解斜三角形的例子.....	157
§ 54 应用三角形解法的问题.....	158
習題.....	160
补充題.....	164
附錄.....	187

緒 言

三角學的俄文名詞 *тригонометрия*，是由希臘文 *τριγωνου* 和 *μετρειν* 二詞構成的，它的原義是三角形的測量。

所謂三角形的測量，改用一般的說法就是解三角形，也就是根據三角形的部分已知元素（邊和角）來求其他未知元素的問題。

在古代的生產實踐中，由於農業上的需要（編著正確的曆書），以及航海上的需要（根據星宿的位置來確定船在大海中的航程），引起了天文學的發生和發展，而解三角形是研究天文學的不可缺少的工具。

在現代建設事業中，基本建設的正確設計，就要依靠地形的測量和計算，無論在那一個建設工地上，測量隊伍往往是一切建設隊伍的先鋒。測量工作歸根結底也是解三角形。

因此，解三角形的問題，從古代起就構成了三角學的實用基礎，直到現在它仍然是三角學的一個重要內容。

三角學，是用幾種隨着角的变化而变化的三角函數來建立三角形各元素間的关系的。有了這些函數，就能使三角形的性質研究得比純粹幾何上更加深入和具體。三角函數也廣泛的應用到物理學以及其他的各種應用技術科中，對數學本身來說，三角函數是研究高等數學的不可缺少的基礎知識。

因此，三角函數性質的研究，就成為三角學中另一個重要內容。

三角學和其他科學一樣，是在解決具體問題的过程中，由人類的實踐而成長起來的。它創始於古希臘時代，它的最初知識是和天文學密切联系的，其後經過不少學者的研究和創造而日益發展，到十五世紀中葉才脫離天文學而成為獨立的科學，在十六世紀法

國數學家韋達 (Vieta) 开始用文字符号表示三角公式后三角学才具有現代的形式。

三角函数近代理論的建立,才不过二百年左右,著名的彼得堡科学院院士尤拉 (Euler, 1707—1783) 应推为近代理論的創始人。尤拉在他的著作“分析引論”中,把三角学進行了解析的敘述,从不多的一些基本公式推出所有的三角公式,他提出三角函数是表示对应的三角線和圓半徑的比值的数,把三角函数引入了代数的領域。

在我國古代算書中載有重差術,它起源於“周髀”,到三國时代就很完備。

“周髀”大約是公元前一世紀的作品,在這本書內載有陳子應用相似三角形比例測量太陽的高、遠、星宿的行度等問題。

三國时代(公元三世紀)魏劉徽在“九章算術”序言里說:“凡測高而欲兼知其遠的,必須用兩表。”表就是竿,這句話的整個意思是說:用同樣長的兩根竿直立在地面,就能測得目的物的高和遠。劉徽舉了九個測量題附在“九章算術”後面,並用雙重勾股及兩股差數作比例項的方法加以解出,所以稱為重差術。

用重差術解測量問題雖不用三角函数,但能直接度量相似直角三角形的兩邊,用其比值代替三角函数,在一部分應用上可得相同的效果。

由此可見我國在公元前幾世紀,就能用類似三角學的方法來解測量問題了,只是以後研究的人很少,以至在這個問題上未能取得更大的成就,這是非常可惜的。

第一章 銳角三角函数

直角三角形解法

§ 1. 銳角三角函数定义 取任意銳角 α (圖 1)。从角的任一边上不与頂点 A 重合的 B 点, 引另一边上的垂線 BC , 構成含銳角 α 的直角三角形 ABC ; 分別用 a, b 和 c 表示三边 BC, AC 和 AB 的長。對於这三边所組成的六个比:

$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$, 有下面的

定理:

定理 比值 $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$

和 $\frac{c}{a}$, 僅決定於銳角 α , 与作直角三角形时, B 点位置的选择無关。

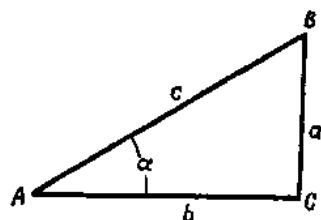


圖 1

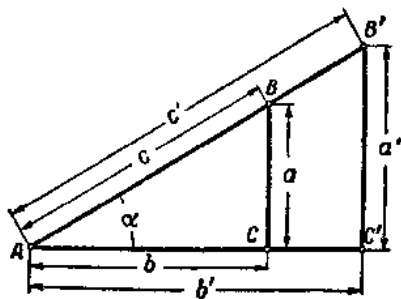


圖 2

証明 在銳角 α 的任一边上任取兩点 B 和 B' (圖 2), 作直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$, 分別用 a, b, c 及 a', b', c' 表示它們的三个边。

由於这两直角三角形都含銳角 α ,

因此

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

所以

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

这个定理的证明,说明了对于每一个已知锐角 α , 有完全确定的六个比值 $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$ 与之对应; 所以这些比值都是锐角 α 的函数。

现在我们给出下面四个定义^①:

定义 1 锐角 α 所对直角边 a 和斜边 c 的比值, 叫做锐角 α 的正弦; 用记号 $\sin \alpha$ 来表示; 即

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}。$$

定义 2 与锐角 α 相邻的直角边 b 和斜边 c 的比值, 叫做锐角 α 的余弦; 用记号 $\cos \alpha$ 来表示; 即

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}。$$

定义 3 锐角 α 所对的直角边 a 和与此角相邻的直角边 b 的比值, 叫做锐角 α 的正切; 用记号 $\operatorname{tg} \alpha$ 来表示; 即

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}。$$

定义 4 与锐角 α 相邻的直角边 b 和此角所对的直角边 a 的比值, 叫做锐角 α 的余切; 用 $\operatorname{ctg} \alpha$ 来表示; 即

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}。$$

从前面的分析, 可知 $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ 与 $\operatorname{ctg} \alpha$ 都是 α 角的函数, 这些函数叫做三角函数。

下面我们用例说明, 如何用度量方法, 求出任一锐角的三角函数的近似值。

例: 求角 48° 的正弦, 余弦, 正切和余切的近似值。

利用直尺, 圆规和量角器作出直角三角形 ABC 使 $\angle BAC =$

^① 比 $\frac{c}{b}$ 和 $\frac{c}{a}$ 分别叫做锐角 α 的正割和余割, 本章暂不研究。

$=48^\circ$ 。为了計算上方便起見取斜边 $AB=100$ 毫米(圖 3, 按实际長度縮为三分之二)。由圖

上量得:

$$BC \approx 74 \text{ 毫米},$$

$$AC \approx 67 \text{ 毫米}.$$

所以

$$\sin 48^\circ \approx \frac{74}{100} = 0.74;$$

$$\cos 48^\circ \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ \approx \frac{74}{67} = 1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48^\circ \approx \frac{67}{74} = 0.90.$$

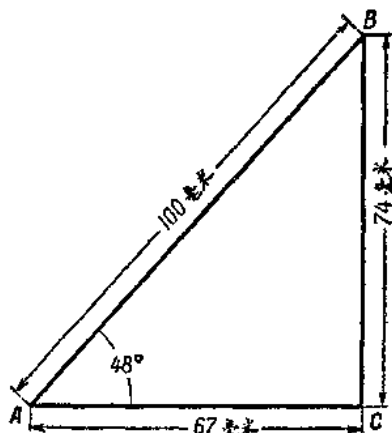


圖 3

用同样方法可以求得任一銳角的正弦、余弦、正切和余切。

从正弦和余弦的定义推得：銳角 α 的正弦和余弦的函数值是小於 1 的正数。

从正切和余切的定义推得：銳角 α 的正切和余切的函数值可为任何正数。

§ 2. 由銳角的已知三角函数值, 求作这个角 在上節明确了三角函数的定义, 並知道如何用度量方法求出三角函数的近似值。現在我們來研究相反的問題, 即如何根据已知三角函数值作出和它对应的銳角。为了这个目的, 我們提出下列定理:

定理 1 如果 y 是小於 1 的正数, 那么一定有一个正弦等於 y 的銳角 α , 而且这样的角只有一个。

証明: 作出直角三角形 ABC (圖 4) 使它的一个直角边等於 y , 而斜边等於 1。於是

$$\sin \angle BAC = \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{1} = y.$$

这就証明了正弦等於 y 的銳角是存在的。

假設另外有一个銳角 β ，它的正弦也等於 y ，那么我們一定能夠作出一个直角三角形 $A'B'C'$ 使 $\angle B'A'C' = \beta$ (圖 5)。

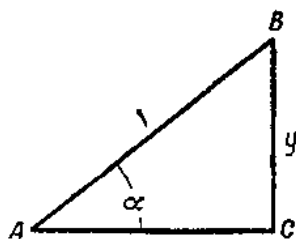


圖 4

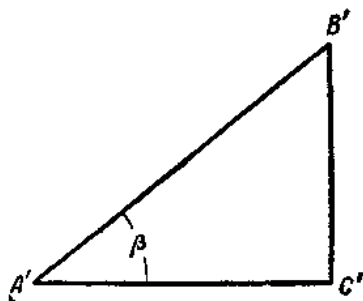


圖 5

於是

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \sin \beta = y.$$

但

$$\frac{BC}{AB} = y,$$

所以

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}.$$

因此，

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C';$$

由此得出，

$$\alpha = \beta.$$

這就是說，如果有一个銳角 β ，它的正弦也等於 y ，那么这个銳角必定和銳角 α 相等。所以正弦等於 y 的銳角是唯一的。

同樣可以証明下列定理：

定理 2 如果 x 是小於 1 的正数，那么一定有一个余弦等於 x 的銳角 α ，而且这样的銳角只有一个。

定理 3 如果 p 是任何正数，那么一定有一个正切等於 p 的銳角 α ，而且这样的銳角只有一个。

定理 4 如果 q 是任何正数，那么一定有一个余切等於 q 的銳角 α ，而且这样的銳角只有一个。

下面是这种問題的实例：

例 1. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, 求作銳角 α 。

解: 在任意直線上取線段 $DE=3$ (圖 6)。

過 E 點作直線 $EF \perp DE$ 。

以 D 點為中心, 用等於 4 的半徑畫弧交 EF 於 K 。連結 DK 。

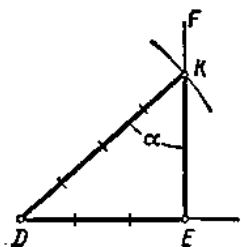


圖 6

因為 $\sin \angle EKD = \frac{DE}{DK} = \frac{3}{4}$, 所以 $\angle EKD$ 就是所求的銳角 α 。

例 2. 已知 $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, 求作銳角 α 。

解: 在任意直線上取 $BC=2$ (圖 7)。

過 C 點引直線 $CM \perp BC$ 。

以 B 點為中心用等於 5 的半徑畫弧交 CM 於 A 。連結 AB 。

因為 $\cos \angle ABC = \frac{2}{5}$, 所以 $\angle ABC$ 就是所求的銳角 α 。

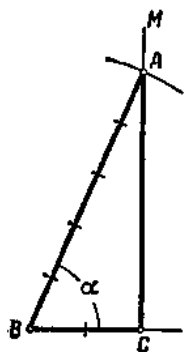


圖 7

例 3. 已知 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, 求作銳角 α 。

解: 作直角 MON , 並在它的一邊 OM 上截取線段 $OA=3$ (圖 8)。

在另一邊上截取線段 $OB=2$ 。連結 AB 。

因為 $\operatorname{tg} \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{3}$, 所以 $\angle OAB$ 即為所求的銳角 α 。

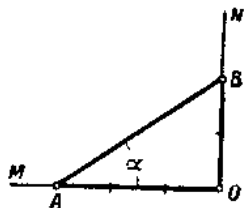


圖 8

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, 求作銳角 α 。

解: 作直角 MKL , 並在它的一邊 KM 上截取線段 $KC=1$

(圖 9)。在另一边上截取線段 $KA=3$ ，連結 AC 。

因为 $\operatorname{ctg} \angle CAK = \frac{AK}{CK} = \frac{3}{1} = 3$ ，所以 $\angle CAK$ 即为所求銳角 α 。

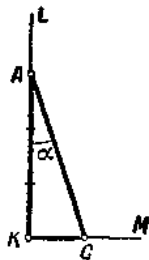


圖 9

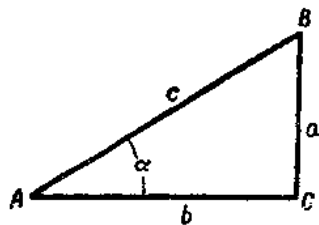


圖 10

§ 3. 同一銳角的三角函数間的关系 取任意銳角 α 。作出直角三角形 ABC 使 $\angle A = \alpha$ (圖 10)。設 $BC = a$, $CA = b$ 和 $AB = c$ 。

1. 根据勾股定理得：

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

用 c^2 除等式的兩边得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

但 $\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha;$

因此得：
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

即 一銳角的正弦和余弦的平方和等於 1。

2. 由 $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ 和 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$,

可得：
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

即 一銳角的正切等於它的正弦和余弦之比。

3. 由 $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$,

可得：
$$\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

即 一銳角的余切等於它的余弦和正弦之比。

4. 由
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

可得：
$$\text{tg } \alpha \cdot \text{ctg } \alpha = 1;$$

即 一銳角的正切和它的余切互为倒数。

上面的等式表示出同一銳角的三角函数間的关系，對於任何銳角都能成立，所以它們是三角恆等式。上面的四个恆等式表示了三角函数間的基本关系。我們可以利用它們證明其他恆等式或化簡含三角函数的式子。下面就是这样的例：

例 1. 証明恆等式 $\frac{1-2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \text{tg } \alpha - \text{ctg } \alpha$ 。

第一法改变左边：

$$\begin{aligned} \frac{1-2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \text{tg } \alpha - \text{ctg } \alpha. \end{aligned}$$

第二法改变右边：

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha - \text{ctg } \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned}$$

例 2. 証明恆等式

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha (1 - \text{tg } \alpha)(1 + \text{tg } \alpha).$$

改变这个等式的左边：

$$\begin{aligned} \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

改变这个等式的右边：

$$\cos^2 \alpha (1 - \text{tg } \alpha)(1 + \text{tg } \alpha) = \cos^2 \alpha (1 - \text{tg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

由於这个等式的兩边都能化为同一等式，我們可以断定已知恆等式成立。

例 3. 化簡： $\frac{(1+\operatorname{ctg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1+\operatorname{tg}^2 \alpha)}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{(1+\operatorname{ctg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha (1+\operatorname{tg}^2 \alpha)} &= \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} : \frac{\sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^4 = \operatorname{ctg}^4 \alpha. \end{aligned}$$

§ 4. 根据銳角的一个三角函数，計算此角的其他三角函数值

根据前一節的公式，可以由一个銳角的三角函数值，計算此角的其余三角函数值。举例說明如下：

例 1. 已知 $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ ，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解：从公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，可得

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

把 $\sin \alpha$ 的已知值代入，得

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{29^2 - 20^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{49 \times 9}{29^2}} = \frac{21}{29}.$$

根据公式 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，可得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{29} : \frac{21}{29} = \frac{20}{21}.$$

再根据公式 $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ，可得

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \frac{20}{21} = \frac{21}{20}.$$

例 2. 已知 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$ ，計算銳角 α 的其余三角函数值。

解：从公式 $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ，可得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{28}{45}.$$