高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷　第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路　见　可　译

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人民教育出版社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著《微积分学教程》（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第三卷1949年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微积分学教程

第三卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

路见可译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0111 开本 850×1168 1/32 印张 8

字数 200,000 印数 65,601—123,600 定价（6） 0.80

1957年4月第1版 1980年1月北京第9次印刷

第一分册目录

第十五章　曲綫积分·斯底尔吉斯积分

第十六章　二重积分

第十五章　曲綫积分·斯底尔吉斯积分

§1　第一型曲綫积分

517　第一型曲綫积分的定义　为了很自然地得出这一新的概念，我們来考察一个能导出它的力学問題。

設已給一連續的可求长平面* 曲綫(K)(图 1)，在它上面分布有质量，且在曲綫上所有的点 M 处其綫性密度 $\rho(M)$为已知，要求确定整个曲綫(K)的质量 m。

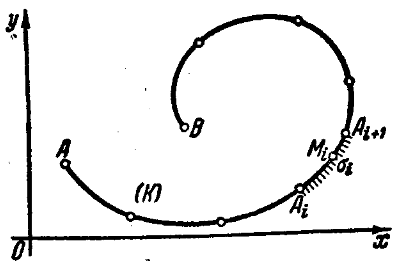

图　1

为达此目的，在曲綫端点 A 与 B 間任意地插入一列点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$(为使記号对称，命 A_0 与 A 相合，A_n 与 B 相合)。为了明确起見，我們认为这些点是自 A 到 B 記数的[参看 **317****]，但是，将它們以相反的方向記数也可以。

在曲綫的弧 A_iA_{i+1} 上任取一点 M_i，算出这一点处的密度 $\rho(M_i)$。近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的，并以 σ_i 表弧 A_iA_{i+1} 的长，对这一弧的质量 m_i 我們将有近似表示式

* 今后为簡单計，我們只討論平面曲綫，整个所述的东西不必改变就可移到空間曲綫的情形。

** 参看关于本书第一卷及第二卷时，均以原书的中譯本为准——譯者。

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

而对整个所求的质量，将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

这一式子的誤差与上面所作的近似假定是有关的；如所有小段的长 σ_i 趋近于零时，这誤差也将趋近于零。因此，如以 λ 表长 σ_i 中最大的一个，只要变到极限就得到准确的公式：

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

現在开始一般地来研究这一类型的极限。丢开上面的問題不談，取一任意"点函数" $f(M)=f(x,y)$，它是在一連續的可求长平面曲綫 (K) 上給出的*，并重复上述手續：分曲綫 (K) 为許多弧元 A_iA_{i+1}，在它們上面任取点 $M_i(\xi_i,\eta_i)$，計算出在这些点处的值 $f(M_i)=f(\xi_i,\eta_i)$，并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)\sigma_i;$$

它亦代表一定类型的"积分和"。

当 $\lambda=\max\sigma_i$ 趋近于零时，如这一积分和有一确定的有限极限 I，既与曲綫 (K) 細分的方法无关，又与小段 A_iA_{i+1} 上点 M_i 的选擇无关，則这一极限称作函数 $f(M)=f(x,y)$ 沿曲綫或道路 (K) 上所取的(第一型)曲綫积分**，并以記号

$$I = \int_{(K)} f(M)\,ds = \int_{(K)} f(x,y)\,ds \tag{1}$$

来表示(其中 s 是曲綫的弧长，ds 就象征长度元 σ_i)。极限过程的精确說明留給讀者。

因此，上面所得曲綫质量的式子可重写为：

---

* 这里假定某一直角坐标系取作基础。

** 以示与下面[521]所討論的第二型曲綫积分不同。

$$m=\int_{(K)}\rho(M)ds. \tag{2}$$

特别注意，給道路(K)所加的方向在所介紹的定义中不起任何作用。例如若这一曲綫不是閉的，且以(AB)及(BA)作为不同方向的曲綫，則

$$\int_{(AB)}f(M)ds=\int_{(BA)}f(M)ds.$$

类似地，我們可以引导散布在空間曲綫(K)上的积分概念：

$$\int_{(K)}f(M)ds=\int_{(K)}f(x,y,z)ds.^{*}$$

由于沒有什么新的原則性东西，沒有必要在这里詳談。

518　約化为普通定积分　假定在曲綫(K)上任意取定一方向(两个可能方向之一)，曲綫上点M的位置可由从一点A量起的弧长$s=\overset{\frown}{AM}$来确定。那末曲綫(K)可表为参数方程的形状：

$$x=x(s),\quad y=y(s)\qquad (0\leqslant s\leqslant S),$$

而在曲綫上給出的函数$f(x,y)$便化成变量s的复合函数$f(x(s),y(s))$。

对应于在AB弧上所选取的分点A_i，其弧的值如表为s_i($i==0,1,\cdots,n$)，則显然$\sigma_i=s_{i+1}-s_i=\Delta s_i$。以$\bar{s}_i$表定点$M_i$的$s$值(而且显然，$s_i\leqslant\bar{s}_i\leqslant s_{i+1}$)，可以看到曲綫积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(x(\bar{s}_i),y(\bar{s}_i))\Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和，所以立刻有：

$$\int_{(K)}f(M)ds=(R)\int_0^S f(x(s),y(s))ds^{**}, \tag{3}$$

且这两积分中只要有一个存在，另一个就也存在。

当然，这种直接由第一型曲綫积分約化为普通的积分会降低了它

* 某一直角坐标系將取作基础。函数f仅在曲綫(K)的点处有定义。

** 符号(R)表示，积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分。

的理論价值,但在方法上的价值它仍全部保存着。

我們以后将假定函数 $f(M)$是連續的*,显然在这种情形下积分是存在的。

令設一曲綫(K)由任意的参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

所給出,其中函数 φ 及 ψ 与它們的导数 φ' 及 ψ' 都連續; 此外, 假定曲綫上无重点。那么曲綫就是可求长的,且若弧 $s=\overset{\frown}{AM}=s(t)$的增加对应于参数 t 的增加,則

$$s'_t=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[320, 321]。在(3)的右端的积分中换变数,立刻得到:

$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{4}$$

因此,在計算第一型曲綫积分时,在积分号下的函数中,变量 x 及 y 应該用坐标的参数表示式来代替,至于因子 ds,应該把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替。特别指出,定积分(4)的下限必須小于上限。

在曲綫以显方程

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

給出时,公式(4)的形状是:

$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \tag{5}$$

这一关系式也可有另一形式。在函数 $y(x)$与它的导数 $y'(x)$連續的假定下, 曲綫(K)在每一点处都有一不平行于 y 軸的确定切綫。以

---

* 我們是指在曲綫(K)上的点处連續, 也就是指沿着曲綫連續。用“ε-δ”的說法,这就是說:对$\varepsilon>0$能找到这样的$\delta>0$,使当$\overline{MM'}<\delta$时就有$|f(M')-f(M)|<\varepsilon$(M及M'是曲綫上的点)。在这一假定下, 复合函数$f(x(s),y(s))$, 由于$x(s)$及$y(s)$是連續的緣故, 也同样是s的連續函数。

α 表切綫与 x 軸的夹角，我們得到：

$$\operatorname{tg}\alpha=y'(x),\ |\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

故
$$\int\limits_{(K)} f(M)ds=\int_a^b\frac{f(x,y(x))}{|\cos\alpha|}dx. \tag{6}$$

如用 S 表示整个曲綫 (AB) 的长，因为显然

$$\int\limits_{(K)} ds=S,$$

所以特别地有

$$S=\int_a^b\frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附注　公式(7)是經形式的变换得来的。如果我們定义曲綫弧长为外切(不是內接)折綫周长的极限，則这一定义——在曲綫以显式給出时——立即可得出公式(7)。讀者不妨自己来证实这一点。

519 例 1) 若 (K) 是橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限內的部分，計算积分 $I=\int\limits_{(K)} xyds$.

解　(a)我們有

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

所以由公式(5)，

$$I=\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot xdx.$$

进行积分，得：

$$I=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

应該注意，上面做的計算事实上还要有所說明才行，因为当 $x=a$ 时切綫斜率变为无穷

大。下一解法就沒有这一缺点。

(6) 如变到椭圆的参数表示 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, 故

$$x'_t=-a\sin t,\ y'_t=b\cos t,\ \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

則可按公式(4)来进行計算:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

这里令 $\cos 2t=z$, 則 $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}dz$, 且

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2) 計算积分 $I=\int\limits_{(K)} y\,ds$, 其中 (K) 是抛物綫 $y^2=2px$ 上自坐标原点到点 $(x_0,\ y_0)$ 的一段。

解 由曲綫的方程,我們有 $yy'=p$, 所以

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx,$$

且
$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3].$$

3) 計算积分 $L=\int\limits_{(A)}(x^2+y^2)\,ds$, 其中 (A) 是联結点 (a,a) 及 (b,b) 的直綫段 $(b>a)$。

提示 直綫方程: $y=x$. 答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$.

4) 計算积分 $K=\int\limits_{(C)} ye^{-x}\,ds$, 其中 (C) 是曲綫

$$x=\log(1+t^2),\ y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t+3$$

在点 $t=0$ 及 $t=1$ 間的一段。

提示 $\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=1$,

$$K=\int_0^1\frac{2\operatorname{arc\,tg}t-t+3}{1+t^2}dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi}{4}.$$

5）常見曲綫中一大部分（橢圓、双曲綫、正弦曲綫、双紐綫等）其弧长不能表作初等函数，因为它們的 ds 不能积分为有限型。然而，对这种曲綫，积分 $\int\limits_{(K)}f(x,y)ds$ 往往算出来是初等函数［例如，参看例1)］，因为与因子 $f(x,y)$ 联在一起时，积分号下微分式的整个构造改变了。讀者不妨做一些积分 $\int\limits_{(K)}f(x,y)ds$ 的例題，积分取在正弦曲綫 $y=\sin x$ 或双曲綫 $xy=1$ 上但又可表作初等函数者。

6）計算积分 $I=\int\limits_{(C)}xyz\,ds$，其中$(C)$是曲綫 $x=t$，$y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$，$z=\frac{1}{2}t^2$ 在点 $t=0$ 及 $t=1$ 間的弧。

解　$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=(1+t)dt$,

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7）当曲綫(K)用极坐标方程 $r=r(\theta)(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2)$ 給出时，試求計算积分

$$I=\int\limits_{(K)}f(x,y)ds$$

的一公式。

答　$I=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}d\theta.$

8）若(K)是双曲螺綫 $r\theta=1$ 自 $\theta=\sqrt{3}$ 到 $\theta=2\sqrt{2}$ 的一段，試計算积分

$$H=\int\limits_{(K)}\frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

答　$\frac{19}{3}$.

9）試求曲綫 $y=\log x$ 在有横坐标 x_1 及 x_2 的两点間这一段的质量，設曲綫在每点处的（綫性）密度等于該点横坐标的平方。

解　由公式(2)，因为在我們的情形下 $\rho=x^2$，故有：

$$m=\int_{x_1}^{x_2}x^2ds.\ 但\ ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx,\ 所以$$

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{3}\left[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

10) 試求悬鏈綫 $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ 在点 $x=0$ 及 $x=a$ 間一段的质量，設曲綫在每点的密度与該点的纵坐标成反比。

提示 $\rho=\frac{k}{y}$, $ds=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=\frac{y}{a}dx$, $m=k$.

与連續地分布在曲綫上的质量相关的其它問題，很自然地也可变成上面所考察类型的曲綫积分。

11) 在第十章中 [**340**] 我們討論过平面曲綫对坐标軸的靜矩的計算，以及它的重心坐标的計算，那时假定"綫性密度" $\rho=1$. 讀者不难推广那里所得的公式到质量連續分布的一般情形。如引用曲綫积分概念时，則結果可写作下面形状：

$$M_y=\int_{(K)}\rho x ds,\quad M_x=\int_{(K)}\rho y\,ds,$$

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho x ds}{\int\limits_{(K)}\rho\,ds},\quad y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{\int\limits_{(K)}\rho y ds}{\int\limits_{(K)}\rho\,ds}.$$

12) 我們还說明第一型曲綫积分的一个应用——应用到有质量的曲綫对一质点引力的問題。

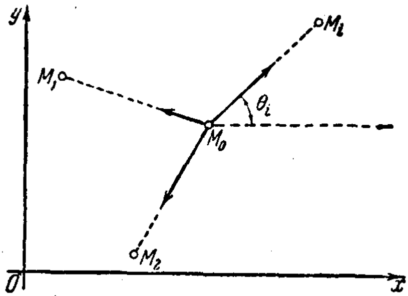

图 2

大家都知道，按牛頓定律，质量 m_0 的质点 M_0 对质量 m 的质点 M 的吸引力，方向是从 M_0 到 M，大小等于 $k\cdot\frac{mm_0}{r^2}$，其中 r 是距离 M_0M，而 k 是与測量的基本单位选擇有关的一系数；并且为了簡单起見，我們常认为它等于一。

設点 M_0 被一质点系 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所吸引，它們的质量是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，則将各个点对 M_0 的吸引力几何地相加，就得到合力。同时，合力在坐标軸上的射影等于各个力射影的代数和。

如以 X 及 Y 表合力在坐标軸上的射影，且以 θ_i 表向量 $\vec{r}_i=\overrightarrow{M_0M_i}$ 与 x 軸間的夹角，則显然，

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0\;m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0\;m_i}{r_i^2}\sin\theta_i$$

(与寻常一样，其中 r_i 表向量 $\overrightarrow{r_i}$ 的长)。

現在設吸引质点的质量連續地分布在一曲綫(K)上。为要找出吸引力，我們分曲綫为許多小段，将每一小段的质量集中在它上面任意取定的一点 M_i 处后，我們就求出合力在坐标軸上射影的近似值:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

因为这时各个小段其质量近似地等于 $\rho(M_i)\sigma_i$. 如令所有的 σ_i 趋近于零，則取极限后就得到准确的等式，且这时和就被积分所代替了:

$$X = m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}ds,\quad Y = m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}ds, \tag{8}$$

这里 r 表向量 $\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$ 的长，而 θ 表它与 x 軸的夹角。

13) 試求一均匀半圓周$(\rho=1)$对位于其中心的一单位质量的吸引力。

解　将坐标原点放在圓心，通过半圓端点作横軸(图 3)。

由对称性，$X=0$，所以只要求出射影Y好了。由公式(8)，

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}ds.$$

但在現在的情况下 $r=R$ (半圓的半徑) 且 $ds=Rd\theta$. 故

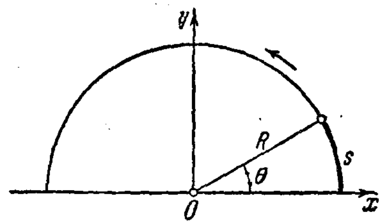

图　3

$$Y=\frac{1}{R}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta=\frac{2}{R}.$$

14) 一单位质量的点 $(m_0=1)$ 与一无穷的均匀直綫$(\rho=1)$的距离为 h，求直綫对这一点的引力。

解　将所求的引力当作由所述直綫上一有限綫段所生引力的极限，假設这一綫段的端点在两头变到无穷远去。如将直綫本身取作 x 軸，而 y 軸通过已知点，則得(考慮在所給的情况下 $ds=dx$)

$$Y=-h\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=-\frac{2}{h}.$$

同样，$X=0$(但由对称性这很明显)。

15) 試求星形綫 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 在第一象限內的弧对位于坐标原点的单位质

量所生的引力，設曲綫在每一点的密度等于这一点到坐标原点距离的立方。

答 $X=Y=\frac{3a^2}{5}$

§2 第二型曲綫积分

520 力場中功的問題 我們轉而討論在实际上更为重要的第二型曲綫积分的概念，这里还是从一个力学問題出发。

設在 xy 平面(或平面的一确定部分)的任一点 M 如放一单位质量，就有一确定的力 $\vec{F}$ 作用于它，**这个力的大小与方向只与点 M 的位置有关**；如放在 M 的质点其质量 m 不等于一，则作用于它的力就等于 $m\vec{F}$。在这种情形下 xy 平面(或所考察的一部分)称作**(平面)力場**，而作用于单位质量的力 $\vec{F}$ 称作**場的引力**。給出力 $\vec{F}$ 的大小与方向相当于給出它在坐标軸上的射影 X, Y，显然射影是点 M 的坐标 x, y 的函数

$$X=X(x,y), Y=Y(x,y).$$

現在假定，位于場中的质点 $M(x,y)$(有单位质量者)运动，且以一确定的方向描出某一連續曲綫 (K)。我們的問題是在这一运动中場的力所做的功 $\mathbf{A}$ 如何計算。

假如作用于点的力保持一常值 F 且保持一固定方向，而点的位移本身以直綫进行，则大家都知道，功 $\mathbf{A}$ 可表为位移 l 与力在位移方向上射影的乘积：

$$\mathbf{A}=Fl\cos\theta,$$

其中 θ 是力 $\vec{F}$ 与位移方向間的夹角。

在非直綫运动以及非常数力的情况下，功要借某一极限过程来确定[比照 344]。例如，我們可以这样来理解。在点的軌道曲綫內，內接一多角形折綫，并确定当沿这一折綫运动时場的力所做的功。这时不計力在折綫的同一段上的变化，所以問題就变成上述的直綫运动以及常数力的最簡单情形了。所得的式子当作所求功 $\mathbf{A}$ 的近似值。它的准确值，总是这样，可以用一极限过程即当折綫的所有各段趋近于零

时*就能得到。

根据所述的計划，現在来进行功 $\mathbf{A}$ 的計算。以 A 表軌道 (K) 的起点，B 表終点(这里当然，哪一点取作起点，哪一点取作終点，不能随便)。用自 A 到 B 方向排好的点

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \cdots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$$

来分曲綫 AB 为許多部分。为使記号对称，将 A, B 写作 A_0, A_n，而它們的坐标分别表为 x_0, y_0 及 x_n，y_n. 最后，作曲綫 (K) 的內接折綫，以上述各点为接續頂点。

为了要确定通过小段 A_iA_{i+1} 时的功 $\mathbf{A}_i$，我們設这时力 $\vec{F}$ 大小与方向都保持不变，例如与点 A_i 处的情形相同。如以 F_i 表力在这一点的大小，θ_i 表小段的方向 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 与力的方向間的夹角，則元素功 $\mathbf{A}_i$ 将(近似地)等于

$$\mathbf{A}_i \doteq F_i \cdot A_iA_{i+1} \cdot \cos\theta_i.$$

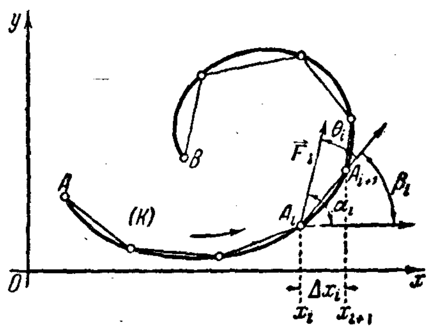

图 4

引进 x 軸与力 $\vec{F}_i$ 間夹角 α_i 以及 x 軸与小段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 間夹角 β_i，則(图 4)$\theta_i = \alpha_i - \beta_i$. 在 $\mathbf{A}_i$ 的表示式中令

$$\cos\theta_i = \cos\alpha_i \cos\beta_i + \sin\alpha_i \sin\beta_i,$$

它就可改写作形状

$$F_i \cos\alpha_i \cdot A_iA_{i+1} \cos\beta_i + F_i \sin\alpha_i \cdot A_iA_{i+1} \sin\beta_i.$$

但是不难看出，$F_i \cos\alpha_i$ 及 $F_i \sin\alpha_i$ 是力 $\vec{F}_i$ 在坐标軸上的射影，所以

$$F_i \cos\alpha_i = X_i = X(x_i, y_i), F_i \sin\alpha_i = Y_i = Y(x_i, y_i).$$

同样，式子 $\overline{A_iA_{i+1}} \cos\beta_i$ 及 $\overline{A_iA_{i+1}} \sin\beta_i$ 是綫段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 在坐标軸上的射

* 在閉曲綫的情形时更正确的說法是：当所有的部分弧的直徑趋近于零时[参看 318]。

影，故它們分别等于

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i,$$

$$y_{i+1}-y_i=\Delta y_i.$$

最后，得到元素功 $\mathbf{A}_i$ 的表示式

$$\mathbf{A}_i \doteq X(x_i, y_i)\Delta x_i+Y(x_i, y_i)\Delta y_i.$$

将这些元素功相加，得所求場力的全部功的近似值：

$$\mathbf{A} \doteq \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i)\Delta x_i+Y(x_i, y_i)\Delta y_i.$$

如已説过的，变到极限，得功的准确值：

$$\mathbf{A}=\lim \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i)\Delta x_i+Y(x_i, y_i)\Delta y_i=$$

$$=\lim \sum_{i=0}^{n-1} X(x_i, y_i)\Delta x_i+\lim \sum_{i=0}^{n-1} Y(x_i, y_i)\Delta y_i. \qquad (1)$$

521 第二型曲綫积分的定义 現在我們脫离开力学中功的問題，而詳尽地研究所得极限的构造。首先来討論第一个极限。

設沿一連續曲綫(AB)已知某一函数 $f(M)=f(x, y)$*. 用点 A_i 分曲綫为許多部分后，在曲綫段 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 上取一任意点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，幷計算出函数在这点的值 $f(M_i)=f(\xi_i, \eta_i)$；再作一和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

[在第 520 目所考察的問題中，我們是取的函数 X 在弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 的起点处的值，但这幷不是非如此不可的。]

如当 $\mu=\max \overline{A_iA_{i+1}}$ 趋近于零时，这一和有一有限极限 I，既与曲綫細分的方法无关，又与点 M_i 的选擇无关，則这一极限称为 $f(M)dx$**

---

* 参看第 2 頁底注*。

** 参看第 11 頁底注。