□ 高等学校教材

概率论与数理统计简明教程

主编 丁正生 副主编 杨 力 李昌兴

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计
简明教程

主　编　丁正生
副主编　杨　力　李昌兴
编　者　丁正生　杨　力　李昌兴
　　　　乔宝明　廖登洪

高等教育出版社

内容提要

本书在内容选材上，以必需和够用为原则，且符合教学大纲的最基本要求，模块结构，实用简明、易教易学。本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、SPSS及其应用、随机过程的基本知识、马尔可夫链、平稳随机过程。

本书可作为普通高等院校理工类（非数学专业）、经管类学生的教材，也可作为成人教育类（非数学专业）概率论与数理统计课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计简明教程/丁正生主编．—北京：高等教育出版社，2005.6

ISBN 7-04-016628-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．丁…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第030583号

策划编辑　王　瑜　　**责任编辑**　蒋　青　　**封面设计**　王凌波

责任绘图　尹　莉　　**版式设计**　张　岚　　**责任校对**　金　辉

责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年6月第1版
印　　张	16.75	**印　　次**	2005年9月第2次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	17.90元

物料号　16628-00

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科，是我国普通高等院校理工类（非数学专业）、经管类专业的一门重要的基础理论课。本书是面向这些专业概率论与数理统计课程的教材，包括概率论、数理统计和随机过程初步等内容。本书具有以下特色：

1．概念引入自然直观，定理叙述比较严谨。在基本概念、基本定理的描述中，注意背景知识及其应用的介绍，便于学生对于基本概念与基本理论的理解。

2．内容组织系统科学。本书以概率测度、随机变量及其分布、随机过程为纲目，系统完整地讲述了概率论与数理统计的核心内容。在内容选材上，以必需和够用为原则，且符合教学大纲的最基本要求，篇幅不大，但给学生构建了立体框架，为学生进一步学习打下了比较好的基础。

3．本书结构为模块式，便于不同专业、不同要求的学生学习使用，其中带“*”号部分可根据教学实际情况选学。本书叙述由浅入深，循序渐进，符合学生的认识规律，便于教学。

4．注意使用现代数学的概念与术语，以拓宽学生的知识面与视野。

5．结合概率统计课程的特点，本书介绍了大型统计软件 SPSS 的使用方法，这对学生使用统计方法解决实际问题是很有好处的。

6．本书在例题选择方面，注意选择结合生产实际、工程实际、社会科学等方面的例题，提高学生使用所学知识解决实际问题的能力。

本书的主编是丁正生，副主编是杨力、李昌兴。第 1、3 章由乔宝明执笔；第 2、4、9 章由丁正生执笔；第 5 章由廖登洪执笔；第 6、7、8 章由杨力执笔；第 10、11、12 章由李昌兴执笔；最后由丁正生统稿、定稿。

本书的出版得到高等教育出版社王瑜同志的大力支持；西北工业大学赵选民教授仔细地审阅了本书的初稿，提出了许多宝贵的意见；本书在编写过程中还得到叶正麟教授和褚维盘教授的鼓励与支持，特在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中一定存在不少缺点和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 1 月

目　　录

第一章

随机事件与概率

我们在自然界和社会上经常会遇到两类现象,一类是在一定条件下必然发生的现象,例如:向上抛一粒石子必然下落,同性电荷必不相互吸引,等等.这类现象我们称为**确定性现象**.对这类问题我们研究的是这类现象中某些量的确定性关系.另一类现象是在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果,例如:掷一枚硬币,落地时,可能出现正面朝上,也可能出现反面朝上,在每次抛掷之前,无法确定会出现何种结果.又如,用同一门炮向同一目标发射多枚同种炮弹,各次弹着点不尽相同,且在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置.这类现象我们称为**随机现象**.当我们大量重复观察随机现象的时候,就会发现随机现象呈现规律性,这种规律性称为**统计规律性**.

概率论是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.它有自己独特的概念和方法,又与其他数学分支有紧密的联系,它是现代数学的重要组成部分.概率论的理论与方法几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中.

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

在概率论中,我们将具有下述三个特点的**试验**称为**随机试验**.

1. 可以在相同的条件下重复地进行.
2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果.
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语,这包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面就是一些试验的例子:

E_1:掷一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币掷三次,观察出现正面的次数.

E_3:掷一枚骰子,观察出现的点数.

E_4:记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5:一口袋中装有许多红色、白色、蓝色的小球,在其中任取 2 只,观察它们的颜色.

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

1.1.2 样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的一切可能的结果是已知的,我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**. 例如,上面的 6 个随机试验的样本空间分别为:

$S_1=\{H,T\}$.

$S_2=\{0,1,2,3\}$.

$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$,这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n.

$S_5=\{$红白,红蓝,蓝白,红红,白白,蓝蓝$\}$.

$S_6=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$,这里 x 表示最低温度,y 表示最高温度. 并设这一地区的温度不会小于 T_0,也不会大于 T_1.

1.1.3 随机事件

在随机试验 E 中,我们称某个可能出现的结果为**随机事件**. 随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示,它是样本空间 S 的子集合. 在每次试验中,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,称**事件 A 发生**.

例如在 E_3 中,如果用 A 表示事件“掷出奇点数”,那么 A 是一个随机事件. 由于在一次投掷中,当且仅当掷出的点数是 1、3、5 中的任何一个时,才称事件 A 发生了,所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$. 同样地,若用 B 表示事件“掷出偶点数”,那么 B 也是一个随机事件,$B=\{2,4,6\}$.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 例如,在试验 E_1 中,有两个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$;试验 E_3 中有六个基本事件$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$.

我们把样本空间 S 也作为一个事件,因为在每次试验中必然出现 S 中的某个样本点,也即 S 必然发生,所以称 S 为**必然事件**. 类似地,我们把空集$\varnothing$也作为一个事件,它在每次试验中都不会发生,我们称它为**不可能事件**.

1.1.4 事件间的关系与运算

概率论中讨论的主要内容之一是希望从简单事件的概率推算出复杂事件的概率,而这些简单事件的概率都比较容易获得.因为事件是一个集合,因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的.这样我们就可由简单事件的概率来求得复杂事件的概率.下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) **事件的包含与相等** 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A **包含于**事件 B,记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) **事件的和** 若事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**,记为 $A\cup B$.事件 $A\cup B$ 发生意味着:或事件 A 发生,或事件 B 发生,或事件 A 与事件 B 都发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 发生当且仅当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.称 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件.

(3) **事件的积** 由事件 A 与事件 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记为 $A\cap B$,简记为 AB.事件 $A\cap B$ 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生,即 A 与 B 同时发生.

类似地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 发生当且仅当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

(4) **事件的差** 事件 A 发生而事件 B 不发生,这样构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记为 $A-B$.

(5) **事件的互斥** 在一次试验中,若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互斥**的,或称它们是**互不相容**的.

一般地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥,则称这些事件是**两两互斥**(或**两两互不相容**)的,通常记 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$.

(6) **对立事件** 在一次试验中,若事件 A 与事件 B 两者中有且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 为**对立事件**.通常将 A 的对立事件记为 $\overline{A}$(即 $B=\overline{A}$).

A 和 $\overline{A}$ 满足:$A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\varnothing,\overline{\overline{A}}=A$.

值得注意的是,若事件 A 与事件 B 对立,则事件 A 与事件 B 必互斥,反之不然.

(7) **事件运算满足的定律** 设 A,B,C 为样本空间 S 中的事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$.

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

德摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1 向指定目标射三枪,观察射中目标的情况,用 A_k 表示事件"第 k 枪击中目标"($k=1,2,3$),试用 A_1,A_2,A_3 表示以下各事件:(1) 只击中第一枪;(2) 只击中一枪;(3) 三枪都没击中;(4) 至少击中一枪.

解 (1) 事件"只击中第一枪",意味着第二枪不中,第三枪也不中.所以,可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 事件"只击中一枪",并不指定哪一枪击中,三个事件"只击中第一枪"、"只击中第二枪"、"只击中第三枪"中,任意一个发生都意味着事件"只击中一枪"发生.同时,因为上述三个事件互不相容,所以,可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(3) 事件"三枪都没击中",就是事件"第一、二、三枪都未击中",所以,可以表示成 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(4) 事件"至少击中一枪",就是事件"第一、二、三枪至少有一次击中",所以,可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

例 1.2 若 A,B,C 表示样本空间 S 中的三个事件,则

(1) A 发生而 B,C 都不发生可以表示为:$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可以表示为:$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;

(3) 所有这三个事件都发生可以表示为:ABC;

(4) 这三个事件恰好发生两个可以表示为:$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

§1.2 概率的统计定义

1.2.1 频率

设 E 为任一随机试验,A 为其中的某一事件,在相同条件下,把 E 独立地重复做 n 次,n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为**频数**).称比值 $f_n(A)=n_A/n$ 为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

人们在实践中发现:在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 很大时,

某事件 A 发生的频率总在某确定的数值附近摆动.一般说,试验次数 n 越大,事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值.这种“频率的稳定性”即通常所说的统计规律性.因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.1 设有随机试验 E,若当试验的次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动,而且随着试验次数的增大,摆动的幅度越来越小,则称数 p 为事件 A 的**概率**,记为

$$P(A)=p.$$

概率的这种定义,称为概率的统计定义.

注意 1. 统计定义是以试验为基础的,但这并不是说概率取决于试验.事件 A 出现的概率是事件 A 的一种属性,它完全决定于事件 A 本身的结果,是先于试验客观存在的.

2. 概率的统计定义只是描述性的,一般不能用来计算事件的概率,通常只能在 n 充分大时,以事件出现的频率作为事件概率的近似值.

概率的另一比较精确的定义为:

定义 1.2 设随机试验 E 的样本空间为 S,若对于 E 的每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应,且 $P(A)$ 满足下列三个条件:

(1) **非负性**:对 E 中的每一个事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) **规范性**:$P(S)=1$.

(3) **可列可加性**:对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(A_k).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1.2.3 概率的性质

由概率的定义及事件的运算关系,可以证明以下性质:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) $P(\varnothing)=0,\ P(S)=1$.

(3) 若 $AB=\varnothing$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

(4) $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(5) $P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$.

特别地,若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A)$.

(6) 对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

这条性质可以推广到多个事件,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.3 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. 在下列三种情况下分别求 $P(B\bar{A})$的值：

(1) A 与 B 互斥；(2) $A \subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 由性质(5)，$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥，所以 $AB=\varnothing$，$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $A\subset B$，所以 $P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) $P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

§1.3 古典概型

1.3.1 古典概型(等可能概型)

我们首先讨论一类最简单的随机试验，这种随机试验具有下列两个特点：

(1) 试验 E 的全部可能结果只有有限个，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，而且事件 $\{e_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 是两两互不相容的.

(2) 事件$\{e_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 的发生是等可能的，即它们发生的概率都一样.

这类随机现象由于它的大量存在，在概率论发展的初期即被注意，许多最初的概率论的结果也是对它做出的，这种试验我们称为**等可能概型**，也称为**古典概型**. $\{e_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 称为**基本事件**.

下面我们给出在古典概型中事件的概率计算公式：

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}$. 若事件 A 包含 k 个基本事件，则 $P(A)=\frac{k}{n}$.

例 1.4 一袋中有 8 个大小相同的球，其中 5 个黑色球，3 个白色球. 现从袋中随机地取出两个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

解 从 8 个球中取出两个，不同的取法有 $\binom{8}{2}$ 种，若以 A 表示事件{取出的

两球是黑球},那么使事件 A 发生的取法为$\binom{5}{2}$种,从而

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{14}.$$

例 1.5 在箱中装有 100 件产品,其中有 3 件次品,为检查产品质量,从这箱产品中任意抽 5 件,求抽得 5 件产品中恰有一件次品的概率.

解 从 100 件产品中任意抽取 5 件产品,共有$\binom{100}{5}$种抽取方法,事件 $A=$ {有 1 件次品,4 件正品}的取法共有$\binom{3}{1}\binom{97}{4}$种取法,故得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{97}{4}}{\binom{100}{5}}\approx 0.138.$$

例 1.6 将 N 个球随机地放入 n 个盒子中($n>N$),求:(1) 每个盒子最多有一个球的概率;(2) 某指定的盒子中恰有 m ($m<N$)个球的概率.

解 这显然也是等可能问题.

先求 N 个球随机地放入 n 个盒子的方法总数.因为每个球都可以落入 n 个盒子中的任何一个,有 n 种不同的放法,所以 N 个球放入 n 个盒子共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{N}=n^N$ 种不同的放法.

(1) 事件 $A=${每个盒子最多有一个球}发生的放法:第一个球可以放进 n 个盒子之一,有 n 种放法;第二个球只能放进余下的 $n-1$ 个盒子之一,有 $n-1$ 种放法;……;第 N 个球只能放进余下的 $n-N+1$ 个盒子之一,有 $n-N+1$ 种放法,所以共有 $n(n-1)\cdots(n-N-1)$种不同的放法.故事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{n^N}.$$

(2) 事件 $B=${某指定的盒子中恰有 m 个球}发生的放法:先从 N 个球中任选 m 个球放到指定的某个盒子中,共有$\binom{N}{m}$种选法;再将剩下的 $N-m$ 个球任意分配到剩下的 $n-1$ 个盒子中,共有$(n-1)^{N-m}$种放法.故事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{\binom{N}{m}(n-1)^{N-m}}{n^N}.$$

注 有许多问题和本例具有相同的数学模型.例如,假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的(都为 1/365),那么随机选取 N 个人($N\leqslant 365$),

他们的生日各不相同的概率可由本例(1)的结果给出(这里 $n=365$):

$$p_1=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-N+1)}{365^N},$$

因而,N 个人中至少有两人生日相同的概率为

$$p_2=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-N+1)}{365^N}.$$

若取 $N=64$,可计算得 $p_2=0.997$.这意味着,在有 64 个人的班级里,"至少有两人生日相同"这一事件的概率与 1 相差无几,如果做调查的话,几乎总是会出现这种情况的.

例 1.7 在 1—9 的整数中可重复的随机取 6 个数字组成六位数,求下列事件的概率:

(1) 组成的六位数中的 6 个数字完全不同;

(2) 组成的六位数中的 6 个数字不含奇数;

(3) 组成的六位数中的 6 个数字中 5 恰好出现 4 次.

解 从 9 个数中允许重复的取六个数进行排列,共有 9^6 种排列方法.

(1) 事件 $A=\{6$ 个数字完全不同$\}$的取法有 $9\times8\times7\times6\times5\times4$ 种取法,故

$$P(A)=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{9^6}=0.11.$$

(2) 事件 $B=\{6$ 个数字不含奇数$\}$的取法.因为 6 个数字只能在 2,4,6,8 四个数中选,每次有 4 种取法,所以有 4^6 种取法.故

$$P(B)=\frac{4^6}{9^6}.$$

(3) 事件 $C=\{6$ 个数字中 5 恰好出现 4 次$\}$的取法.因为 6 个数字中 5 恰好出现 4 次可以是 6 次中的任意 4 次,出现的方式有 $\binom{6}{4}$ 种,剩下的两种只能在 1,2,3,4,6,7,8,9 中任取,共有 8^2 种取法.故

$$P(C)=\frac{\binom{6}{4}\times 8^2}{9^6}.$$

1.3.2 几何概率

上述古典概型是在有限样本空间下进行的,我们将古典概型推广到有无限结果而又有某种等可能性的场合.这类问题一般可以通过几何方法来求解.

如果一个随机试验 E 具有以下两个特点:

(1) 样本空间 S 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体).

(2) 向区域 S 内任意投一点,该点落在区域内任意点处都是"等可能的".

那么,随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{S\text{ 的计量}}.$$

称上式定义的概率为**几何概率**.

例 1.8 在线段[0,4]上任投一点,求此点落入区间(1,2)内的概率.

解 因必然事件 S 就是区间[0,4],故按几何概率的定义可得所求概率

$$p=\frac{\text{区间}(1,2)\text{ 的长度}}{\text{区间}[0,4]\text{ 的长度}}=\frac{1}{4}.$$

例 1.9 甲乙两人相约 8—12 点在预定地点会面.先到的人等候另一人 30 分钟后离去,求甲乙两人能会面的概率.

解 以 X,Y 分别表示甲、乙二人到达的时刻,那么 $8\leqslant X\leqslant 12,8\leqslant Y\leqslant 12$;若以$(X,Y)$表示平面上的点的坐标,则所有基本事件可以用这平面上的边长为 4 的一个正方形:$8\leqslant X\leqslant 12,8\leqslant Y\leqslant 12$ 内所有点表示出来.二人能会面的充要条件是 $|X-Y|\leqslant 1/2$(图 1-1 中阴影部分),所以所求的概率

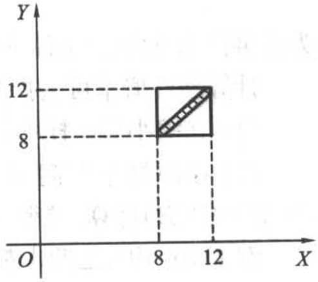

图 1-1

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{16-2\left[\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{16}=\frac{15}{64}.$$

§1.4 条件概率

1.4.1 条件概率

在概率论中,常会遇到这样的问题:在已知事件 B 发生的条件下,求事件 A 发生的概率.这时,因为求 A 的概率是在已知 B 发生的条件下,所以称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.记为 $P(A|B)$.

例如考虑有两个孩子的家庭,假设男女出生率一样,则两个孩子(按大小从左至右排列)的性别为:(男,女),(男,男),(女,男),(女,女)的可能性是一样的.若以 A 记家庭中有一男一女这一事件,则显然 $P(A)=\frac{1}{2}$.但是如果我们预先知道这家庭中至少有一女孩(记为事件 B),则 $P(A|B)=\frac{2}{3}$.

在这里我们看到 $P(A)=\frac{1}{2}\neq P(A|B)=\frac{2}{3}$,这很容易理解,因为在求

$P(A|B)=\frac{2}{3}$时我们是限制在 B 已经发生的条件下考虑A 发生的概率的.

另外,易知:在上例中,$P(B)=\frac{3}{4}$,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{1/2}{3/4}$,故有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由此引入条件概率的一般定义:

定义 1.3 设 A,B 是样本空间S 中的两个事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

为在事件 B 发生的条件下事件A 发生的**条件概率**.

计算条件概率可选择两种方法之一:

(1) 在缩小后的样本空间 S_B 中计算A 发生的概率$P(A|B)$.

(2) 在原样本空间 S 中,先计算 $P(AB)$,$P(B)$,再按公式 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$计算,求得 $P(A|B)$.

例 1.10 甲,乙两市都位于长江下游,根据一百多年来的气象记录,知道一年中雨天的比例甲市占 20%,乙市占 18%,甲、乙两地同时下雨占 12%.若以事件 A 记甲市出现雨天,事件 B 记乙市出现雨天,求 $P(A|B)$,$P(B|A)$.

解 由条件知 $P(A)=0.20$,$P(B)=0.18$,$P(AB)=0.12$,因此,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.18}=0.67,\ P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.20}=0.60.$$

此外,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.20+0.18-0.12=0.26.$$

看来,在下雨这件事情上,应认为甲乙两市是有联系的.

例 1.11 设某种动物由出生起活 20 岁以上的概率为 80%,活 25 岁以上的概率为 40%.如果现在有一只 20 岁的这种动物,求它能活 25 岁以上的概率.

解 设事件 $B=\{$能活 20 岁以上$\}$,事件 $A=\{$能活 25 岁以上$\}$.按题意,$P(B)=0.8$,由于 $A\subset B$,因此 $P(AB)=P(A)=0.4$.由条件概率定义,所求概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

1.4.2 乘法定理

由条件概率的定义,可推得概率的乘法定理:

定理 1.1(乘法定理) 设 $P(A)>0$,$P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

利用这个公式可以计算积事件的概率.乘法公式可以推广到 n 个事件的情