1978年全国部分省市

中学数学竞赛题解汇集

山西省数学学会编

山西人民出版社

一九七八年全国部分省市

中学数学竞赛题解汇集

山西省数学学会　编

山西人民出版社

一九七八年全国部分省市

中学数学竞赛题解汇集

山西省数学学会　编

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：8　字数：170千字

1978年12月第1版　1979年9月太原第1次印刷

印数：186,000册

书号：7088·799　定价：0.60元

青少年要为四个现代化勤奋学习

山西省革命委员会副主任
山西省中学数学竞赛委员会主任　贾　俊

今年，我省举办了建国以来首次高中学生数学竞赛。这次数学竞赛，在我省广大群众特别是在中学学生中引起了广泛的反响。全省有十万六千名在校中学生热烈参加竞赛；没有参加竞赛的同学，以至教师、家长、各行各业的人也都关心竞赛、支持竞赛。这种情景，生动地反映了粉碎“四人帮”之后，广大青少年为革命而学习的积极性空前高涨，人人争上进，为国家作出贡献，不甘落后的革命风尚正在形成，学校和社会的风气发生了深刻的变化。

实践表明，开展竞赛活动，是促进青少年勤奋学习，勇攀科学高峰的好方法之一，是打破常规，发现人才、培养人才的有效措施。我们除数学竞赛外还计划举行物理和化学的竞赛。但是，在“四人帮”横行的时候，这样深受欢迎的有益活动，却被诬蔑为搞“智育第一”、“分数挂帅”；刻苦学习，勇攀科学高峰的青少年被诬蔑为“修正主义苗子”、“走白专道路”。“四人帮”的这些倒行逆施，严重危害了青少年的成长，阻碍了科学教育事业的发展。华主席为首的党中央一举扫除了这伙祸国殃民的害人虫，挽救了革命，挽救了党，挽救了国家，也挽救了青少年，给青少年重新开拓了又红又专的广阔道路。在党和人民的关怀下，广大青少年

正在德、智、体方面茁壮成长，一批批才智出众的青少年不断涌现出来。

今天，我们祖国进入了一个新的发展时期。华主席带领我们开始了新的长征，到本世纪末，要把我国建设成为现代化的社会主义强国。广大青少年现在是新长征路上的后备军，不久的将来，就要担负起主力军的重任。毛主席说："你们青年人朝气蓬勃，正在兴旺时期，好象早晨八、九点钟的太阳。希望寄托在你们身上。"青少年是祖国的希望，科学的未来，一定要从小树立革命的理想，培养共产主义的道德品质，树雄心，立壮志，为实现四个现代化勇攀高峰，为新长征学好真本领，当好四个现代化闯将。

有了远大的革命理想，还要有脚踏实地的实干精神。首先要不怕困难，树立"攻书不畏难"的好风尚。科学的道路是崎岖不平的，只有付出辛勤的劳动，才能换来丰硕的成果。图轻松，求侥幸的思想是要不得的，一定要从小养成勤奋好学，刻苦钻研的好习惯，学而不厌，孜孜不倦。

其次，要循序渐进，扎扎实实。中、小学是打基础的阶段，要重视学习文化、科学的基础知识。千万不要好高骛远，贪多求快。

在攀登科学高峰的道路上，还要时时戒骄戒躁，不满足于已得的成绩，要牢记伟大领袖和导师毛主席"虚心使人进步，骄傲使人落后"的话，才能逐级登上科学的高山之巅。

海阔凭鱼跃，天高任鸟飞。青少年同学们，让我们来一个竞赛，看谁学得好。向着二〇〇〇年，进军！

掌握基本概念，学好基础知识

山西省数学学会理事长　刘长凯

一九七八年，我省举行了首次全省高中数学竞赛。数学竞赛在我省广大高、初中学生中引起了强烈的反响。人人关心竞赛，支持竞赛。竞赛的试题不但参加竞赛的同学做，没有参加竞赛的同学乃至一些教师以及各方面的一些人士也都在演算，互相传抄，互相切磋。

通过这次竞赛，从中发现和选拔了一批人才，更重要的是通过竞赛大大提高与激发了广大青少年学生对数学的兴趣与钻研精神，引导中学生学好基础课和灵活运用基础知识，从而有利于教学质量的逐步提高。

通过这次竞赛，也反映出一些问题，譬如：有不少同学基础知识掌握得不够系统，不够扎实；计算不能做到准确、简捷；思维能力较差等，这些问题主要是由于"四人帮"的干扰和破坏所造成的。我想借此机会，谈谈掌握基本概念的问题。

大家知道，数学是一门研究"数"和"形"的科学。伟大导师恩格斯曾指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边"（《反杜林论》）。恩格斯在这里讲了数学对象的客观实在性，也指出了数学对象和方法抽象性的特点。一

般地说，科学抽象是一切科学理论的共同特征，然而数学抽象和其它学科比较起来却具有不同的特点。首先，自然科学的其它学科都是以一定的物质运动形式做为自己的研究对象，它的抽象理论从这个确定的领域中来，又回到这个领域中去受到客观事实的检验。而数学则是以客观世界的特定的空间形式和数量关系做为其研究对象的，同一个数学概念的现实原型在质的方面可以具有极大的差异。其次，随着实践活动的发展，人们对客观世界的认识逐渐深化，对客观世界的空间形式和数量关系的认识也在不断深化，这种深化的一个重要表现是数学抽象概括程度的不断加深。数学不但研究那些直接从现实世界中抽象出来的空间形式和数量关系，而且还需要在已有的数学理论的基础上形成新概念、新理论。

例如“文字数”是代数中的一个基本概念。“文字数”是从具体数字抽象概括出来的概念。在此基础上再对于“文字数”用不同的条件加以限制，就可得出一些不同的概念。若用文字 x，y，…，代表实数，在没有加以具体条件限制的时候，x，y，…都具有实数的通性。如果令 x 与 y 满足条件 $y=x^2-5x+6$，那么把 x 看作任意实数，y 就不再是一个任意实数了，而要受到等式 $y=x^2-5x+6$ 的限制，这时称 y 是 x 的一个二次函数。

例如二次方程 $x^2-5x+6=0$，这个方程不是对任意实数 x 都成立，只是对一些特殊的 x 成立，我们称满足方程的数 x，是这个方程的解。这些概念，都有它们的涵义与适用范围。对于一些不同的概念，只有明确了它们不同的涵义和适用范围，才能对它们有确切的理解。

我省竞赛第一试题第二题第④小题，要求判断 x^2-5x

$+6=0$ 表示什么平面图形。

平面上任意一点 (x, y)，它的座标 x 与 y 是任意实数，本题给出了 x 所满足的条件，也就是对 x 所加的限制——$x^2-5x+6=0$，它的解是 $x=2$ 与 $x=3$，对 y 没有给以限制，可以是任意实数。因此将这个问题化为比较明确的表达式：

$$\begin{cases} x=2 \\ y \text{ 为任意实数} \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x=3 \\ y \text{ 为任意实数} \end{cases}$$

它们表示过点 $(2, 0)$ 和点 $(3, 0)$ 与 y 轴平行的两条直线。

对于这个问题，有的同学由于概念模糊，回答是一条抛物线，把

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ y \text{ 为任意实数} \end{cases}$$

与 $y=x^2-5x+6$ 两种概念混为一谈了。

第二题中其它小题，实质上都是一个类型的问题，需要讨论给予“文字数” x，y，…，的各种限制条件的涵义与适用范围。这次数学竞赛，第一试第二题回答得不够好的基本原因就在这里。

为什么要掌握好基本概念呢？下面我们来分析一个例子：

求一点 $(1, 0)$ 到抛物线 $y^2=2x$ 上的点的最短距离。

此问题可分三步解决：

第一步，求点 $(1, 0)$ 到平面上任意点 (x, y) 的距离。由距离公式，有

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

或

$$d^2=x^2+y^2-2x+1.$$

第二步，确定点 $(1, 0)$ 到抛物线 $y^2=2x$ 上任意一点

的距离。由于所要确定的是点（1，0）到抛物线 $y^2=2x$ 上任意一点（x，y）的距离，这就要求上式中 x，y 满足关系式 $y^2=2x$，所以可将此关系式代入

$$d^2=x^2+y^2-2x+1,$$

得到

$$d^2=x^2+1,$$

这即是点（1，0）到抛物线 $y^2=2x$ 上任意一点的距离。

第三步，确定最短距离。由于

$$d^2=x^2+1$$

所以，当 $x=0$ 时，d^2最小。此时

$$x=0, \qquad y=0; \qquad d=1.$$

即所求最短距离等于 1 。

这个例子，问题是要在抛物线 $y^2=2x$ 上确定一点，使它到点（1，0）的距离比抛物线上其它点到点（1，0）的距离小。但是，抛物线上有无数个点，很难直接确定所要求的点。这里，我们不去直接找这个点，而是先将这个点的范围扩大到整个平面上，从数值来说，就是把 x 与 y 的范围扩大到任意实数，首先求出点(1，0)到平面上任意一点（x，y）的距离，然后根据题设条件，逐步缩小 x 与 y 的范围，求出点（1，0）到抛物线 $y^2=2x$ 上任意一点的距离，最后求出点（1，0）到 $y^2=2x$ 上点的最短距离。

在这个例子里，从“文字数”这一基本概念出发，根据实际问题的需要与条件，适当的扩大与缩小“文字数”的适用范围，以达到问题的正确解决，这是代数中分析问题与解决问题的基本方法之一。这里应该注意到，只有明确地掌握了有关的基本概念，才能用来分析和解决问题。

目　　录

1978年全国部分省市中学数学竞赛

第 一 试 题 解

1.已知　$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当 x 为何值时：

(i)　$y>0$；　　　　(ii)　$y<0$？

（解）　$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$ 的定义域为 $x+3>0$，即

$$x>-3, \tag{1}$$

又　$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，因此

(i)若 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$，则 $\frac{1}{x+3}<1$，即 $x+3>1$，

有 $x>-2$。结合(1)式得　$x>-2$。

(ii)若 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，则 $\frac{1}{x+3}>1$，即 $x+3<1$，

有 $x<-2$。结合(1)式得　$-3<x<-2$。所以当 $x>-2$时，$y>0$；当 $-3<x<-2$时，$y<0$。

2.已知　$\operatorname{tg} x=2\sqrt{2}$（$180^\circ<x<270^\circ$），求 $\cos 2x$，$\cos\frac{x}{2}$ 的值。

〔解〕 $\because\ 180^\circ<x<270^\circ$,

$\therefore\ \sec x=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}=-\sqrt{1+8}=-3$,

$\therefore\ \cos x=\dfrac{1}{\sec x}=-\dfrac{1}{3}$,

因此 $\cos 2x=2\cos^2x-1=2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-1=-\dfrac{7}{9}$.

由 $180^\circ<x<270^\circ$，得 $90^\circ<\dfrac{x}{2}<135^\circ$.

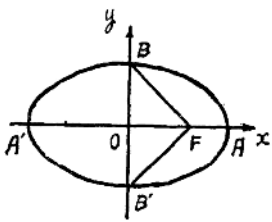
$\therefore\ \cos\dfrac{x}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故 $\cos 2x=-\dfrac{7}{9}$，$\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.设椭圆的中心为原点，它在 x 轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点和长轴上较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程.

〔解〕 如图，设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



F 是它的右焦点.

$\because\ \triangle BB'F$ 为等腰直角三角形，

$\therefore\ OB=OF=OB'$，即 $b=c$.

但 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore\ a^2=2c^2$,

$\therefore\ a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b$，即 $a-c=(\sqrt{2}-1)b$。

又 $a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，

$\therefore\ (\sqrt{2}-1)b=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，即 $b=\sqrt{5}$，

$\therefore\ a=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$。

故所求椭圆方程是$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$。

4.已知方程 $2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

（解） 设 x_1，x_2 为方程 $2x^2-9x+8=0$ 的两个根，则由韦达定理有

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{9}{2}, \\ x_1\cdot x_2=4. \end{cases}$$

设所求方程为 $x^2+px+q=0$，它的两个根为 α、β，据题意 $\alpha=\dfrac{1}{x_1+x_2}=\dfrac{2}{9}$，

$$\beta=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}.$$

$$\therefore\ p=-(\alpha+\beta)=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{161}{36},$$

$$q=\alpha\cdot\beta=\frac{2}{9}\cdot\frac{17}{4}=\frac{34}{36}.$$

故求作之方程为

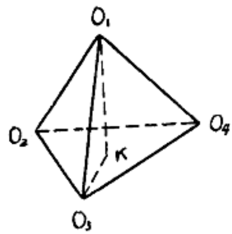
$$36x^2-161x+34=0.$$

5. 把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切．求上层小球最高点离桌面的高度．

(解) 设上层小球球心为 O_1，下层三个小球球心分别为 O_2、O_3、O_4．连接 O_1O_2、O_1O_3、O_1O_4、O_2O_3、O_3O_4、O_2O_4．因为四个球两两相切，所以

$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$，

因此 $O_1-O_2O_3O_4$ 可以看作一个棱长是2的正四面体(如图)．过 O_1 作正四面体的高 O_1K，那么 K 应是正$\triangle O_2O_3O_4$ 的中心．连 O_3K，则



$$O_3K=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ O_1K=\sqrt{O_1O_3^2-O_3K^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

因为 O_2、O_3、O_4 到桌面的距离都等于1，所以平面 $O_2O_3O_4$ 平行于桌面，则球 O_1 之最高点到桌面的距离是

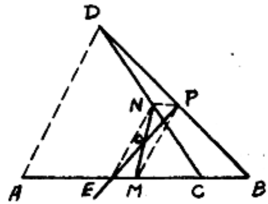
$$1+\frac{2}{3}\sqrt{6}+1=2+\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

6. 设线段 AB 的中点为 M．从 AB 上另一点 C 向直线 AB

的一侧引线段 CD．令 CD 的中点为 N，BD 的中点为 P，MN 的中点为 Q。求证：直线 PQ 平分线段 AC。

（证） 过 P、Q 作直线，交 AC 于 E，连结 NP。

$\because$ N、P 分别是 DC、DB 的中点．$\therefore$ $NP /\!\!/ CB$。



在 $\triangle QNP$ 与 $\triangle QME$ 中，$NP /\!\!/ EM$，$QN = QM$，

$\therefore$ $\triangle QNP \cong \triangle QME$，从而$QP = QE$。

连结 PM、NE，则 $EMPN$ 为一平行四边形，因此 $EN /\!\!/ MP$。

连结 AD，在 $\triangle BAD$ 中，M、P 分别为 BA、BD 的中点，$\therefore MP /\!\!/ AD$。又$\because EN /\!\!/ MP$，$\therefore$ $EN /\!\!/ AD$，$\therefore$ 在 $\triangle ACD$ 中，N 为 CD 中点，则 E 为 AC 的中点，所以直线 PQ 平分线段 AC。

7．证明：当 n、k 都是给定的正整数，且 $n>2$、$k>2$ 时，$n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和。

（证） 设 n 个连续偶数为

$$2a,\ 2a+2,\ 2a+4,\ \cdots,\ 2a+2(n-1)，$$

则它们的和为

$$S_n = \frac{2a+2a+2(n-1)}{2}n$$

$$=[2a+(n-1)]n.$$

令 $[2a+(n-1)]n = n(n-1)^{k-1}$，　则

$$2a+(n-1)=(n-1)^{k-1},$$

$$\therefore \quad a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}.$$

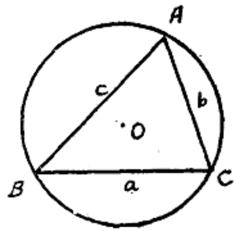
由上式可知，只要 n 为大于2、k 为大于2的整数，那么 a 就一定是正整数。

$\therefore$ a 取 $\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$ 时，

$n(n-1)^{k-1}$ 等于 n 个连续偶数的和。

8.证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半。

（证） 如图，在单位圆 O 内，任作一内接的锐角三角形 ABC。



设 A、B、C 各角所对的边长分别为 a、b、c，其和的一半为 s。

$\because$ $\triangle ABC$ 为一锐角三角形，$\therefore$ $A+B>90^\circ$，

即 $A>90^\circ-B$，从而

$$\cos A<\cos(90^\circ-B)=\sin B. \qquad (1)$$

同理

$$\cos B<\sin C, \qquad (2)$$

$$\cos C<\sin A. \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3)：

$$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C. \qquad (4)$$

又根据正弦定理有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{C}{\sin c}=2,$$