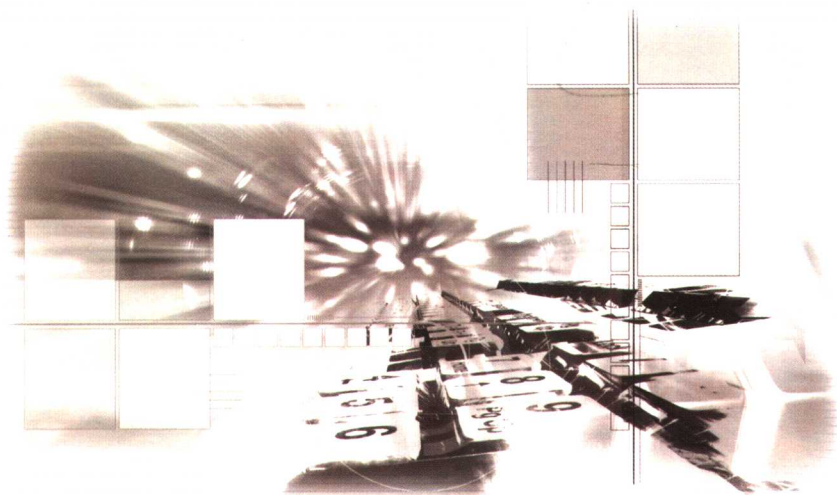


灰色控制

熊和金 徐华中 编著



國防工業出版社
National Defense Industry Press

灰色控制

熊和金 徐华中 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

灰色系统理论自 1982 年问世以来,与灰色系统数学基础、灰色建模、灰色关联分析、灰色预测、灰色规划、灰色决策及灰色控制等相关的理论研究与工程应用都取得了很大的进展。《中国图书馆分类法》已将其列为系统科学的重要内容之一。

灰色控制即灰色预测控制,是灰色系统理论的核心内容之一。灰色控制的突出特点是在贫信息情况下能获得对对象较好的控制效果。灰色控制研究 20 余年来,进展迅速,而目前关于灰色控制的著作比较少。本书试图总结这一领域近年来的研究成果,内容涉及灰色预测建模基础、灰色预测扩展模型、趋势关联与系统云模型、灰色 PID 控制、灰色模糊控制、滞后系统灰色控制、自适应灰色控制、灰色变结构控制及灰色广义预测控制等。

本书除了可以供灰色系统理论研究和应用开发人员参考外,也可以作为相关专业研究生教材和大学高年级选修课教材。

图书在版编目(CIP)数据

灰色控制 / 熊和金,徐华中编著. —北京:国防工业出版社,2005.9

ISBN 7-118-04144-0

I. 灰... II. ①熊...②徐... III. 灰色控制
IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 104375 号

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11½ 258 千字

2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:25.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

灰色系统是指部分信息已知、部分信息未知的系统,也称为贫信息系统。灰色预测控制是灰色系统理论与应用研究的一个重要方面。我们在完成了4项与灰色系统理论相关的国家级及省、部级课题的基础上,试图用本书概括在灰色控制这一领域近20年来取得的卓越成果。专家、学者们富有创造力的成果,为本书的编写提供了有力的素材。本书引用的成果出自于300多位各个领域的专家,笔者由衷地感谢他们,敬重他们。

灰色系统涉及灰色系统数学基础、灰色建模、灰色关联分析、灰色预测、灰色规划、灰色决策与灰色控制等内容。本书内容取材包括了灰色预测建模基础、灰色预测扩展模型、趋势关联与系统云模型、灰色PID控制、灰色模糊控制、滞后系统灰色控制、自适应灰色控制、灰色变结构控制及灰色广义预测控制等。

本书作者之一熊和金感激恩师陈绵云教授将自己引入灰色系统理论与应用研究这一领域。本书也得到了陈绵云教授的大力支持、热情鼓励和细心指导。

灰色控制研究经过近20年的迅猛发展,成果丰硕。尽管我们悉心工作,反复琢磨,但是由于我们的专业素养所限,本书一定存在以偏概全或错误之处,恳请敬爱的读者把发现的问题及时告知我们,我们将不胜感激。

目 录

第 1 章 灰色建模基础	1
1.1 GM(1,1)模型	1
1.1.1 GM(1,1)建模	1
1.1.2 GM(1,1)模型的扩展	2
1.1.3 GM(1,1)模型的探讨	2
1.1.4 灰色预测模型的特点	4
1.2 GM(1,1)模型边值分析	5
1.2.1 边值条件	5
1.2.2 边值条件的影响	5
1.2.3 边值修正项的确定	6
1.2.4 实例分析	7
1.3 GM(1,1)模型参数的改进计算	7
1.3.1 GM(1,1)梯形公式计算	7
1.3.2 GM(1,1)模型参数计算格式	8
1.3.3 实例分析	10
1.4 中心逼近式灰色 GM(1,1)模型	11
1.4.1 GM(1,1)模型分析	11
1.4.2 中心逼近式 GM(1,1)模型	12
1.4.3 实例分析	13
1.5 加权灰色预测模型	14
1.5.1 加权 PGM(1,1)模型	14
1.5.2 PGM(1,1)模型的计算	16
1.5.3 实例分析	17
1.6 时序残差 GM(1,1)模型	20
1.6.1 残差问题	20
1.6.2 数学模型	20
1.6.3 实例分析	22
第 2 章 灰色预测扩展模型	25
2.1 不等时距的 GM(1,1)模型	25
2.1.1 直接建模方法	25

2.1.2	拓灰色预测方法	26
2.2	灰色 Gompertz 模型	28
2.2.1	问题背景	28
2.2.2	灰色模型的级差格式	29
2.2.3	灰色 Compertz 建模	29
2.2.4	实例分析	31
2.3	灰色 Logistic 模型	32
2.3.1	背景	32
2.3.2	灰色 Logistic 建模	32
2.3.3	灰色 Logistic 模型计算方法	34
2.3.4	实例分析	35
2.4	GM(1,1)模型与线性回归的组合预测	37
2.4.1	组合预测的必要性	37
2.4.2	GM(1,1)回归模型组合预测	38
2.4.3	实例分析	39
2.5	灰色-马尔柯夫链预测模型	40
2.5.1	灰色-马尔柯夫链组合预测的必要性	40
2.5.2	灰色系统和马尔柯夫链原理	40
2.5.3	灰色-马尔柯夫链预测建模	41
2.5.4	预测分析	43
2.6	相似灰色预测	44
2.6.1	GM(1,1)置疑	44
2.6.2	相似关系模型	44
2.6.3	相似度计算公式	45
2.6.4	输出数据的使用	46
2.6.5	实例分析	47
2.7	多变量灰色模型 MGM(1, n)	47
2.7.1	关于多变量灰色模型	47
2.7.2	MGM(1, n)模型	48
2.7.3	MGM(1, n)模型的求解	49
2.8	灰色神经网络预测模型	50
2.8.1	GM(1,1)模型与人工神经网络的组合	50
2.8.2	最优组合灰色神经网络预测模型的建模	51
第3章	趋势关联与系统云模型	52
3.1	趋势关联灰色建模	52
3.1.1	趋势关联度	52
3.1.2	趋势关联度用于灰色建模	54

3.1.3 实例分析·····	55
3.2 系统云 SCGM(1, h)模型仿真·····	56
3.2.1 SCGM(1, h)模型的意义·····	56
3.2.2 SCGM(1, h)模型的算法·····	56
3.2.3 SCGM(1, h)模型计算流程·····	57
3.2.4 实例分析·····	59
3.3 灰色-马尔柯夫 SCGM(1, h)预测模型·····	60
3.3.1 建模意义·····	60
3.3.2 SCGM(1, 1)模型回顾·····	60
3.3.3 灰色-马尔柯夫模型·····	61
3.3.4 实例分析·····	63
第4章 灰色PID控制 ·····	65
4.1 GM(0, N)灰色PID控制算法·····	65
4.1.1 PID控制的缺憾·····	65
4.1.2 灰色预测原理·····	65
4.1.3 灰色PID控制算法·····	66
4.1.4 仿真分析·····	67
4.2 灰色估计补偿的PID控制·····	70
4.2.1 控制框图·····	70
4.2.2 灰色估计补偿的PID算法·····	70
4.2.3 仿真分析·····	71
4.3 灰色预测PID控制·····	72
4.3.1 灰色预测技术·····	72
4.3.2 灰色预测控制算法·····	72
4.3.3 灰色预测控制算法的应用·····	74
4.4 水压灰色预测控制研究·····	75
4.4.1 控制方案·····	75
4.4.2 仿真分析·····	76
4.5 基于预测变参数的PID控制·····	77
4.5.1 工程实例·····	77
4.5.2 灰色预测变参数PID算法·····	78
4.5.3 实例分析·····	79
4.6 选煤系统灰色预测控制·····	80
4.6.1 跳汰机分选难题·····	80
4.6.2 跳汰机分选灰色预测控制·····	80
4.6.3 跳汰机自动排料灰色预测控制·····	81
4.7 汽轮机调节系统灰色预测控制·····	82

4.7.1	汽轮机调节系统贫信息特征	82
4.7.2	灰色预测控制	82
4.7.3	结论分析	83
4.8	空调系统灰色预测 PID 控制	85
4.8.1	空调系统的发展趋势	85
4.8.2	灰色预测 PID 控制	85
4.8.3	仿真分析	86
第 5 章	灰色预测模糊控制	88
5.1	灰色预测模糊 PID 控制	88
5.1.1	PID 分析	88
5.1.2	灰色预测控制	88
5.1.3	灰色模糊 PID 控制系统与设计原则	89
5.1.4	基于灰色预测模糊 PID 控制算法的汽温控制系统	92
5.2	电机灰色预测模糊控制	93
5.2.1	控制系统基本原理	93
5.2.2	在线预测	96
5.3	分解炉灰色预测模糊控制	97
5.3.1	模型预测控制	97
5.3.2	灰色预测模型	97
5.3.3	模糊预测控制器	98
5.3.4	灰模预测步长自调节机制	98
5.3.5	实例分析	99
5.4	热工系统灰色预测模糊控制	100
5.4.1	热工系统控制	100
5.4.2	模型的建立	100
5.4.3	仿真分析	102
第 6 章	滞后系统灰色控制	104
6.1	SCGM 预测控制对纯滞后伺服系统性能的改善	104
6.1.1	SCGM(1,1)模型分析	104
6.1.2	预测补偿控制	105
6.1.3	仿真分析	106
6.2	大滞后系统的 Fuzzy-Gray 预测控制	107
6.2.1	Fuzzy-Gray 预测控制器	107
6.2.2	等维新息滚动预测算法	108
6.2.3	带智能积分的参数自调整模糊控制器	109
6.2.4	仿真分析	110
6.3	延迟时间未知的时延系统灰色预测控制	110

6.3.1	延迟时间未知的时延系统灰色预测控制结构	110
6.3.2	延迟时间的神经网络辨识	111
6.3.3	仿真分析	112
6.4	不确定滞后系统的灰色预测神经元控制	112
6.4.1	灰色预测神经元控制算法的必要性	112
6.4.2	灰色预测模型	113
6.4.3	纯滞后时间的神经网络辨识	114
6.4.4	单神经元控制器	115
6.4.5	仿真分析	115
6.5	SCGM _{mv} (1,1)灰色预测变增益模糊控制	117
6.5.1	变增益模糊控制	117
6.5.2	控制方案	117
第7章	自适应灰色控制	119
7.1	电火花微细孔加工自适应灰色控制	119
7.1.1	电火花微细孔加工	119
7.1.2	自适应灰色预测控制	119
7.1.3	电火花放电状态的判别	120
7.1.4	电压反馈环 GM(1,1)模型的建立	121
7.1.5	短路环控制	122
7.1.6	数据采集系统的组成	123
7.2	复杂系统的自适应预测控制	124
7.2.1	灰色广义预测控制算法的必要性	124
7.2.2	模型的建立及算法步骤	124
7.2.3	在线辨识与校正	126
7.2.4	灰色广义预测控制的算法步骤	126
7.2.5	仿真分析	126
7.3	船舶自动舵灰色预测模型	127
7.3.1	自动舵的特点	127
7.3.2	灰色自适应自动舵	127
7.3.3	仿真分析	129
7.4	时变大滞后自适应灰色预测 PID 控制	130
7.4.1	基于梯度优化的自适应 PID 控制	130
7.4.2	带有灰色预测的 PID 控制	131
7.4.3	稳定性分析	132
7.4.4	仿真分析	133
7.5	微动机器人自适应灰色模糊控制	135
7.5.1	基本思路	135

7.5.2	微机器人的估计模型	136
7.5.3	自适应模糊控制	137
7.5.4	灰色预测器的设计	139
7.5.5	仿真分析	140
第8章	灰色变结构控制	142
8.1	灰色变结构速度控制器	142
8.1.1	理论依据	142
8.1.2	灰色滑模控制器设计	143
8.1.3	仿真分析	145
8.2	不确定离散时间系统的变结构控制	145
8.2.1	离散变结构控制的必要性	145
8.2.2	变结构控制设计	146
8.2.3	离散趋近律的存在性	147
8.2.4	改进的变结构控制	147
8.2.5	控制律的实现	148
8.2.6	数值仿真	149
8.3	系统云灰色滑模变结构控制	151
8.3.1	滑模变结构控制	151
8.3.2	交流调速系统灰色模糊滑模控制器设计	151
8.3.3	系统仿真	153
第9章	灰色广义预测控制	155
9.1	灰色广义预测控制算法	155
9.1.1	灰色广义预测控制的特点	155
9.1.2	单步灰色广义预测控制算法	155
9.1.3	多步灰色广义预测控制算法	157
9.1.4	仿真分析	159
9.2	广义预测控制直接算法	160
9.2.1	问题的提出	160
9.2.2	GM(1,2)广义预测控制	161
9.2.3	仿真分析	164
9.3	灰色广义预测控制系统的稳定性和鲁棒性	165
9.3.1	对GGPC算法的思考	165
9.3.2	GGPC的IMC结构及其闭环系统特性	166
9.3.3	模型匹配时GGPC系统的稳定性	168
9.3.4	模型失配时GGPC系统的稳定鲁棒性	169
9.3.5	实例分析	169
参考文献		171

第 1 章 灰色建模基础

1.1 GM(1,1)模型

1.1.1 GM(1,1)建模

灰色系统理论自 1982 年问世以来,理论研究与应用都取得了很大的进展。《中国图书馆分类法》已将其列为系统科学的重要内容之一。灰色预测控制的突出特点是在“贫”信息情况下能获得较好的控制效果。

灰色系统是指既含有已知信息、又含有未知或非确知信息的系统,也称为贫信息系统。对于那些难以精确地建立数学模型的系统都属于灰色系统的范畴。在灰色系统理论中,称抽象系统的逆过程(由系统的行为确立模型)为灰色模型,亦称 GM。它是根据关联度、生成数灰导数,灰微分等观点和一系列数学方法建立起来的连续性的微分方程。通常 GM 表示为 $GM(n, h)$ 。当 $n = h = 1$ 时即构成了单变量一阶灰色预测模型。灰色预测是灰色系统理论的一个重要方面,它利用这些信息,建立灰色预测模型,从而确定系统未来的变化趋势。由于灰色预测模型能够根据现有的少量信息进行计算和推测,因而在人口、经济、生态、农业、医学、工程技术、气象、水文及减灾等许多部门得到了广泛的应用。

典型的灰色预测模型是邓聚龙教授提出的 GM(1,1)模型。GM(1,1)模型设原始序列为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

这是一组信息不完全的灰色量,具有很大的随机性,将其进行生成处理,以提供更多的有用信息。本节选用累加生成,则 m 次累加生成的结果为

$$x^{(m)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(m-1)}(k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

一般用一次累加生成就能使数据呈现一定的规律,若规律不够,可增加累加生成的次数。

在数据生成的基础上,用线性动态模型对生成数据拟合和逼近,其形式为

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} + ax^{(m)} = b$$

微分方程的解为

$$x^{(m)}(t+1) = [x^{(m-1)}(1) - b/a]e^{-at} + b/a$$

微分方程的系数可用最小二乘求出,其向量形式为

$$\hat{a} = [a \quad b]^T = (B^T B)^{-1} B^T \gamma_N$$

式中

$$B = \begin{bmatrix} -0.5[x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)] & 1 \\ -0.5[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -0.5[x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix};$$
$$\gamma_N = [x^{(m-1)}(2) \quad x^{(m-1)}(3) \quad \dots \quad x^{(m-1)}(n)]^T$$

按 $\hat{x}^{m-1}(t+1) = \hat{x}^{(m)}(t+1) - \hat{x}^{(m)}(t)$ 累减生成还原, 计算后得到预测数据。

若建立的模型精度不符合要求, 可计算出残差建立残差序列, 进行数据生成, 建立残差模型, 修正原模型, 最后得到预测方程。

1.1.2 GM(1,1)模型的扩展

在 GM(1,1) 模型基础上, 人们进一步提出了其他扩展的灰色预测模型, 典型的有以下几种。

1. 新息 GM(1,1)模型

一般来说, 研究对象是发展变化的, 虽然系统的历史信息对研究系统有一定的作用, 但与预测时间更接近的时期的信息(新息)对研究系统的特性更有价值。基于这种思想, 可将新息数据充实到原始序列中建立 GM(1,1)模型, 这样建立的模型称为新息 GM(1,1)模型。

2. 等维灰数递补 GM(1,1)模型

先用已知序列建立的 GM(1,1)模型预测一个值, 然后把这个预测值补充到已知序列中, 同时去掉一个老数据。这样用一个预测灰数新陈代谢, 逐个预测, 逐个递补, 利用这种方法建立的 GM(1,1)模型, 称等维灰数递补 GM(1,1)模型。

3. 等维新息 GM(1,1)模型

该模型的建立与新息 GM(1,1)模型相似, 只是前者在加入新息的同时, 去掉一个老数据, 然后在此基础上建立 GM(1,1)模型。

4. 非等间隔序列建模

建模中, 一般要求原始数据是等距的, 这个要求在以时间为自变量的序列中容易满足, 但在许多实际问题中, 特别是在以空间及像本节中以温度为自变量的序列中, 却难以满足。因此, 人们提出了非等间隔序列建模思想。

1.1.3 GM(1,1)模型的探讨

通过对各种应用实例的分析和多年的理论研究, 人们发现 GM(1,1)模型存在一些值得注意的问题, 主要问题有以下几点。

1. 计算零点不同, 预测值也不同

用于 GM(1,1)建模的原始序列 $x^{(0)}(t)$ 要求是非负序列。因此对于含有负数的序列, 一般是把序列各项同时加上一个正数使其变为非负序列, 即降低计算零点。在灾变预测中, 规定一个阈值 T , 对于 $x^{(0)}(t) \geq T$ 的年份进行灾变映射(如把 1958 年映射为 1), 得到一个灾变日期集, 即是升高计算零点。而有些作者为了减少映射换算中的麻烦, 直接用年份的后两位数来建模, 实际上是把 1900 年作为计算零点的。

由上可见,建模中计算零点是根据各种需要而确定的。但是,必须注意到,GM(1,1)模型的计算零点不同,其预测值也不同。如浙江省金华站具有 1952 年—1995 年的年径流量 W 序列,其中 $W \geq 60$ 亿 m^3 的年份共有 6a。在灾变映射中,如果以 1900 年为计算零点,那么可得灾变日期集 $p_1^{(0)}(t) = \{52, 54, 73, 75, 83, 89\}$;如果以 1951 年为计算零点,那么可得另一灾变日期集 $p_2^{(0)}(t) = \{1, 3, 22, 24, 32, 38\}$ 。

建模中经模型精度检验,删去第一项。由 $p_1^{(0)}(t)$ 建模,可得预测模型为

$$\hat{p}_1^{(1)}(k+1) = 979.7500e^{0.07062k} - 925.7500$$

模型精度属于一级(后验差比值 $c = 0.09 < 0.35$,小误差概率 $p = 1 > 0.95$),那么预测金华站下一个丰水年为 1996 年($\hat{p}_1^{(0)}(6) = 95.10$)。由 $p_2^{(0)}(t)$ 建模,可得预测模型为

$$\hat{p}_2^{(1)}(k+1) = 96.3751e^{0.1968k} - 93.3571$$

模型精度也属于一级($c = 0.08 < 0.35$, $p = 1 > 0.95$)那么预测金华站下一个丰水年为 1998 年($\hat{p}_2^{(0)}(6) = 46.05$)。由此可见,对于同一原始序列,计算零点不同,预测值相差 2a。又如苏州地区具有 1964—1985 年的入梅日序列,其中晚梅年份(入梅日 T 晚于 6 月 17 日)共有 11a。在灾变映射中,如果分别以 1900 年和 1963 年为计算零点,那么可得灾变日期集 $p_1^{(0)}(t) = \{64, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 79, 81, 84, 85\}$ 和 $p_2^{(0)}(t) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 16, 18, 21, 22\}$ 。根据计算,可得苏州地区下一个晚梅年分别为 1989 年和 1996 年,因此预测值相差 7a。

2. 序列长度不同,预测值也不同

原始序列有长有短,因而在 GM(1,1)建模中就有一个长序列长度的取舍问题。为了进行预测,一般取用最新的资料作为序列的右端点(原点);为了使模型达到较高的精度,一般按下面两条标准来确定序列的左端点:(1)拟合中最大相对误差 $e_{\max}$ 不宜过大;(2)后验差检验中模型精度属于一级(即 $c < 0.35$, $p > 0.95$)。但是,必须指出,在达到上面两条标准的情况下,序列的长度不同,GM(1,1)模型的预测值也不同。如陕西省具有 1478 年以来的震级 $M \geq 5$ 级的地震灾变日期集(计算零点为 1486 年)

$$p^{(0)}(t) = \{1, 14, 19, 69, 71, 81, 82, 104, 112, 120, 134, 137, 148, 149, 194, 217, 302, 335, 336, 434, 472\}$$

表 1-1 是按不同序列长度 n 计算的震级 $M \geq 5$ 级的地震预测年份(原点为 1958 年)。从中可以看到, $e_{\max}$ 随着序列长度的增加而增大, p 均等于 1, c 则随着序列长度的增加而减小,因此模型精度孰优孰劣难以确定。但序列长度不同,预测值也不同,其中预测最早的发震年份为 1978 年,最晚的发震年份为 2051 年,前后相差 73a。

表 1-1 陕西省不同序列长度 n 计算的震级 $M \geq 5$ 级的地震预测年份

n	$e_{\max}(\%)$	c	p	预测值	预测年份
5	-8.50	0.2549	1	540.00	2026
7	-11.46	0.2047	1	546.81	2033
9	-15.33	0.1762	1	564.34	2051
11	-16.02	0.1543	1	560.76	2047
13	-18.43	0.1544	1	544.23	2031
15	-23.78	0.1583	1	524.72	2011
17	-23.74	0.1556	1	510.66	1997
19	-30.26	0.1581	1	491.38	1978
21	-167.10	0.1473	1	524.89	2011

山西省汾河水库具有 1959 年—1984 年的泥沙逐年淤积总量资料。任意地把 1974 年作为序列的右端点(原点),预测 1975 年的年净淤积量。根据计算,可以看到,左端点至 1966 年之后,随着序列长度 n 的产加, $e_{\max}$ 和 c 也呈反向的增减变化,因而同样难以确定模型的优劣程度。预测 1975 年最大的年净淤积量为 $1\,154\text{ 万 m}^3(n=4)$,最小的年净淤积量为 $812\text{ 万 m}^3(n=6)$,两者相差 342 万 m^3 。

3. 累加次数不同,预测值也不同

为了减小数据波动,弱化随机性,在 GM(1,1)建模之前,需要对原始序列进行累加处理。对于非负序列,累加次数越多,随机性弱化越多,白指数律越明显。一般情况下,对原始序列进行一次累加,但有时也进行二次或二次以上的累加。对于逐年的人口总数,大气 CO_2 总含量、森林蓄积总量、泥沙淤积总量和地面沉降总量等,其原始序列相对于欲求的年净增长量来说已是一次累加值,因而属于二次累加的情况。但是,必须注意到,原始序列的累加次数不同,GM(1,1)模型的预测值也不同。如对于自然序列 $x^{(0)}(t) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,随着累加次数的增加, $e_{\max}$ (或平均相对误差 $\bar{e}$) 逐渐增大, c 则逐渐减小,模型精度无法判别,但预测值却随着累加次数的增加而快速增大,见表 1-2。

表 1-2 累加次数不同时的预测值

累加次数	前 5 项预测值					$e_{\max}/(\%)$	$\bar{e}/(\%)$	c	p
1	6.70	8.87	11.75	15.56	20.61	-8.75	3.68	0.090	1
2	9.00	14.42	23.12	37.04	59.35	-21.00	6.25	0.083	1
3	14.35	33.33	72.58	150.17	299.63	-35.93	8.98	0.074	1

某市 1986 年—1990 年地面沉降了 68.2mm ,其逐年沉降总量序列 $x^{(0)}(t) = \{12.6, 12.9, 13.2, 13.8, 15.7\}$ 。为了预测其后几年的年净沉降量,既可根据 $x^{(0)}(t)$ 来计算,也可根据 $x^{(1)}(t)$ 来计算。由 $x^{(0)}(t)$ 计算(一次累加, $e_{\max} = -3.77\%$, $c = 0.3133$),可得 1991 年的年净沉降量为 16.3mm ,1992 年为 17.5mm ,而由 $x^{(1)}(t)$ 计算(二次累加, $e_{\max} = -7.59\%$, $c = 0.0717$),可得 1991 年的净沉降量为 24.4mm ,1992 年为 33.0mm 。因此累加次数不同,预测值的差别是很大的。

1.1.4 灰色预测模型的特点

从 1.1.3 节的分析可以看出,GM(1,1)模型在预测中还存在着一定的问题。事实上,这些问题是由 GM(1,1)模型本身的特点所决定的。

GM(1,1)模型属于指数函数模型,它通过点 $A(0, x^{(0)}(1))$ 和点 $B(\ln(1 - ax^{(0)}(1)/u)/a, 0)$ 。 $\hat{x}^{(1)} = u/a$ 是它的渐近线,随着预测步长 k 的增大, $\hat{x}^{(1)}$ 曲线单调上升。GM(1,1)建模,实际上是要确定一条通过原始资料累加绘成的点群中心的最佳拟合曲线。通过对原始资料 and 最佳拟合曲线的分析,可以得到如下 3 点认识。

1. 计算零点升高,预测值增大

表 1-3 所示是计算零点不同时 GM(1,1)模型的预测值及其斜率。其中原始序列 $x_1^{(0)} = \{101, 102, 103, 104, 105, 106\}$,建模后根据计算,可得预测值 $\hat{x}_1^{(0)}(7) = 107.55$ 。当 $x_1^{(0)}$ 计算零点升高 100 后,新序列 $x_2^{(0)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。此时 A 点降低 $[(0.101) \rightarrow (0,$

1)], 渐近线 u/a 升高 ($-10457.35 \rightarrow -7.35$), 以致还原曲线 $x_2^{(0)}$ 的斜率 $x_2^{(0)} = a^2(x^{(0)}(1) - u/a)e^{-ak}$ 在原点(右端点)之后增大(见表 1-3), 即还原曲线 $x_2^{(0)}$ 变陡, 这样预测值 $x_2^{(0)}(7) = 8.87$ 。当计算零点降低 100 后, 预测值成为 108.87 (> 107.55)。由此可知, 对于同一原始序列来说, 计算零点升高, 预测值将增大。

表 1-3 计算零点升高前后 GM(1,1)模型的预测值及其斜率

原始序列 $x_1^{(0)}$	101	102	103	104	105	106			
按式计算 $x_1^{(0)}$	101.52	102.50	103.49	105.50	104.50	106.52	107.55	108.59	109.64
$x_1^{(0)}$ 的斜率	0.98	0.99	1.00	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
特点	A(0.101), $u/a = -10457.35$								
新序列 $x_2^{(0)}$	1	2	3	4	5	6			
按式计算 $x_2^{(0)}$	2.04	2.61	3.33	4.26	5.44	6.94	8.87	11.32	14.46
$x_2^{(0)}$ 的斜率	0.50	0.64	0.82	1.04	1.33	1.70	2.17	2.77	3.54
特点	A(0.1), $u/a = -7.35$								

2. 新序列的第二项减小, 预测值增大

理论分析显示, 序列的第一项 $x^{(0)}(1)$ 与 GM(1,1)建模无关, 即不论 $x^{(0)}(1)$ 在区间 $[0, \infty)$ 内取什么数值, 所建模型的预测值不变。因此, 当序列长度增加一项时, 预测值的变化取决于新序列第二项的增减变化。如果新序列的第二项减小, 那么还原曲线的斜率增大(表略), 即该曲线变陡, 因而预测值增大。

3. 累加次数增多, 预测值增大

对于原始序列 $x^{(0)}$ 来说, 若一次累加建模, 那么对 $x^{(1)}$ 一次求导, 即可得原始序列 $x^{(0)}$ 的还原值和预测值, 若二次累加建模, 那么需要对 $x^{(1)}$ 二次求导, 才能得到 $x^{(0)}$ 的还原值和预测值。由于二次累加建模后还原曲线的斜率大于一次累加建模后还原曲线的斜率, 因此, 对于同一原始序列来说, 累加次数增多, 预测值增大。

1.2 GM(1,1)模型边值分析

1.2.1 边值条件

GM(1,1)模型由一个单变量的一阶微分方程构成, 设原始时间序列 $\{x^{(0)}(t)\}_{t=1}^n$ 非负, 其一次累加生成序列为 $\{x^{(1)}(t)\}_{t=1}^n$, 其中, $x^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x^{(0)}(k)$ 。它满足的边值条件为

$$\begin{aligned} dx^{(1)}(t)/dt + ax^{(1)}(t) &= u \\ x^{(1)}(1) &= x^{(0)}(1) \end{aligned}$$

式中: a, u 为待定参数。GM(1,1)模型的主要问题就是确定参数 a 和 u 。关于这一方面的文献很多, 这里不作分析。本书的重点是介绍边值条件在预测中的影响。

1.2.2 边值条件的影响

目前, 求解 GM(1,1)模型中的参数 a 和 u 的方法与边值条件 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 都无

关。 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 的解析表达式为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = [x^{(0)}(1) - u/a]e^{-a(t-1)} + u/a$$

同时,上式也是离散形式解(取 $t=1,2,\dots,n$)。由上式可以导出原始时间序列的预测式(既为解析式,也为离散式)

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (1 - e^a)[x^{(0)}(1) - u/a]e^{-a(t-1)}$$

由此易知生成序列预测值 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 和原始时间序列预测值 $\hat{x}^{(0)}(t)$ 均与边值 $x^{(0)}(1)$ 有关。因此,边值条件的处理直接关系到预测效果。

现在考虑边值条件的修正形式,设修正为 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) + b$, 式中参数 b 为修正项。这时预测式分别为

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(1)}(t) &= [x^{(0)}(1) + b - u/a] \cdot e^{-a(t-1)} + u/a \\ \tilde{x}^{(0)}(t) &= (1 - e^a)[x^{(0)}(1) + b - u/a]e^{-a(t-1)}\end{aligned}$$

由它们可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(1)}(t) &= \hat{x}^{(1)}(t) + be^{-a(t-1)} \\ \tilde{x}^{(0)}(t) &= \hat{x}^{(0)}(t) + b(1 - e^a)e^{-a(t-1)}\end{aligned}$$

可见,修正项 b 对于预测值有着指数修正效用,因而其作用不容忽视。当 $b=0$ 时,就是通常的预测表达式。

1.2.3 边值修正项的确定

对于修正项 b 的确定有多种准则,这里针对生成序列和原始序列,使用均方误差和最小准则分别给出确定边值修正项的计算方法。

准则 I 选取 b ,使得生成序列新预测值的误差在最小二乘意义下最小,即

$$\min_b \sum_{t=1}^n [x^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t)]^2$$

解出

$$b = \left\{ \gamma - \xi \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] - \frac{u}{a} \eta \right\} / \xi$$

式中 $\xi = (1 - e^{-2na}) / (1 - e^{-2a})$;

$\eta = (1 - e^{-na}) / (1 - e^{-a})$;

$$\gamma = \sum_{t=1}^n x^{(1)}(t) e^{-a(t-1)}$$

准则 II 选取 b ,使得原始时间序列新预测值的误差在最小二乘意义下最小,即

$$\min_b \sum_{t=1}^n [\tilde{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t)]^2$$

解出

$$b = \alpha / \beta - [x^{(0)}(1) - u/a]$$

式中 $\alpha = \sum_{t=1}^n x^{(0)}(t) e^{-a(t-1)}$;

$$\beta = (1 - e^a)[(1 - e^{-2na})/(1 - e^{-2na})/(1 - e^{-2a})]$$

在实际运用当中,可先按两种准则分别计算出结果,然后选择较优的一个。

1.2.4 实例分析

讨论 1972 年(标号为 1)—1982 年(标号为 11)全国电视机产量的预测问题,其原始数据为

$$\{x^{(0)}(t)\}_{t=1}^{11} = \{3.23, 6.94, 10.07, 17.07, 18.13, 20.05, 48.77, 132.14, 247.92, 517.40, 553.74\}$$

对 $\{x^{(0)}(t)\}_{t=1}^{11}$ 作 GM(1,1) 分析,分两种情况讨论。

1) 第一种情况

参数 a 和 u 用通常方法得到,边值修正项 b 用两种准则分别计算,见表 1-4。

表 1-4 参数 a 和 u 用通常方法计算时的结果对比

	无修正项	准则 I	准则 II
平均相对误差/%	296.68	46.30	48.62
最大相对误差/%	739.13	173.78	179.55
修正项	0	-26.58	-26.31
参数 a 和 u	$a = -0.482$	$u = 17.467$	

2) 第二种情况

参数 a 和 u 用改进的方法计算,边值修正项 b 用两种准则计算,见表 1-5。

表 1-5 参数 a 和 u 用改进方法计算时的结果对比

	无修正项	准则 I	准则 II
平均相对误差/%	325.72	42.50	43.12
最大相对误差/%	800.32	167.42	168.98
修正项	0	-28.09	-28.03
参数 a 和 u	$a = -0.491$	$u = 18.035$	

可见不管对参数 a 和 u 使用何种方法计算,考虑边值修正项后预测值的相对误差都大大地降低了。

1.3 GM(1,1)模型参数的改进计算

1.3.1 GM(1,1)梯形公式计算

灰色系统理论自创建以来,备受各位学者关注。GM(1,1)模型因其计算简便、实用性强而被广泛应用。由于实际系统都可以看作是广义能量系统,因而灰色系统理论认为原始数据列 $x^{(0)}(k) (k=1, 2, \dots, N)$ 的一次累加生成 $x^{(1)}(k)$ 呈现指数增加的规律。对 $x^{(1)}(k)$ 建立如下形式的微分方程