

经济数学基础之二

线性代数

学习辅导

XIANXING DAISHU

XUEXI FUDAO

主 编 朱弘毅 居环龙
副主编 施国锋 黄玉洁 卜庆海

立信会计出版社
LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

经济数学基础之二

线性代数学习辅导

主 编 朱弘毅 居环龙
副主编 施国锋 黄玉洁 卜庆海

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导/朱弘毅,居环龙主编. —上海:
立信会计出版社,1999.2(2001.2重印)
(经济数学基础)
ISBN 7-5429-0643-7

I. 线… II. ①朱… ②居… III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第05486号

出版发行	立信会计出版社
经 销	各地新华书店
电 话	(021)64695050×215 (021)64391885(传真) (021)64388409
地 址	上海市中山西路 2230 号
邮 编	200233
E-mail	<i>lxaph@sh163c.sta.net.cn</i>
出 版 人	陈惠丽

印 刷	立信会计常熟市印刷联营厂
开 本	850×1168 毫米 1/32
印 张	4.5
字 数	107 千字
版 次	2001 年 2 月第 2 版
印 次	2001 年 2 月第 2 次
印 数	6 000
书 号	ISBN 7-5429-0643-7/F·0589
定 价	8.40 元

如有印订差错 请与本社联系

前 言

《经济数学基础》学习辅导丛书,是与上海高校《经济数学基础》编写组编的《经济数学基础》这套教材(立信会计出版社出版)配套的学习辅导书。丛书共三册:《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率论与数理统计学习辅导》。

这三册学习辅导书的编写体例一致,每册书的最后一章为模拟试题及其解答,其余各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、测试题及其解答四节组成。本丛书旨在帮助、指导读者理解重要的概念、掌握运算方法、解答疑难问题。因此,例题、习题、测试题都是精心选编的,题型基本而又典型。测试题及模拟试题均有解答,供读者自查。编者相信,读者认真阅读本辅导书,必有收获。

《线性代数学习辅导》由朱弘毅、居环龙主编,副主编为施国锋、黄玉洁、卜庆海,参加编写的还有(按姓氏笔画排列)车荣强、王春华、刘志石、李树冬、余敏、沈昕、沈平宝、周伟良、张福康、赵斯泓、费伟劲、桂胜华、钱锦、黄玉洁、龚秀芳、罗爱芳。本丛书的出版得到上海教育考试院院长胡启迪教授、上海市教委高等教育办公室徐国良副主任、东海职业技术学院副院长李重华教授、立信会计出版社孙时平总编辑、蔡莉萍编辑、王征编辑的支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者
2001年1月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 内容提要.....	1
第二节 例题分析.....	4
第三节 习题选解.....	7
第四节 测试题及其解答	16
第二章 矩阵	25
第一节 内容提要	25
第二节 例题分析	28
第三节 习题选解	33
第四节 测试题及其解答	39
第三章 向量	48
第一节 内容提要	48
第二节 例题分析	50
第三节 习题选解	52
第四节 测试题及其解答	55
第四章 线性方程组	62
第一节 内容提要	62
第二节 例题分析	64
第三节 习题选解	69
第四节 测试题及其解答	73

第五章 投入产出数学模型	81
第一节 内容提要	81
第二节 例题分析	84
第三节 习题选解	87
第四节 测试题及其解答	92
 第六章 线性规划问题	 97
第一节 内容提要	97
第二节 例题分析	99
第三节 习题选解	104
第四节 测试题及其解答	109
 第七章 线性代数模拟试题及其解答	 116
第一节 线性代数模拟试题	116
第二节 线性代数模拟试题解答	123

第一章 行列式

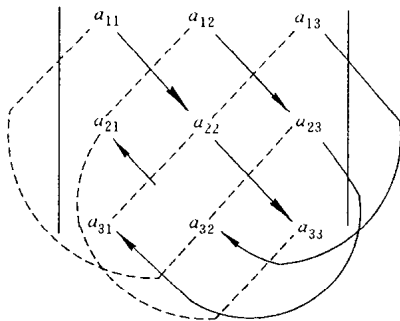
第一节 内容提要

1. 行列式的概念

$$\text{二阶行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \text{三阶行列式 } & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

三阶行列式的计算可按对角线法则进行, 如下图: 三阶行列式等于其中三条实线联接的三个元素乘积之和减去三条虚线所联接的三个元素的乘积之和。



$$n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式。

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 行列式的性质

(1) $D = D^T$ 。

(2) 交换行列式的两行(列), 行列式的值变号。

(3) 如果行列式 D 中有两行(列)的对应元素相等, 则 $D=0$ 。

(4)

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &\quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

(5) $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$

(6) 行列式 D 的某一行(列)的元素全为零, 则 $D=0$ 。

(7) 行列式的某一行(列)元素的公因数可提到行列式外面。

(8) 行列式 D 的两行(列)元素成比例, 则 $D=0$ 。

(9) 行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则这个行列式等于两个行列式之和。

例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

(10) 把行列式的第 i 行(列)的所有元素乘以数 k 后加在第 j 行(列)对应元素的位置上,则行列式的值不变。

例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{kr_2+r_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kb_1+c_1 & kb_2+c_2 & kb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

3. 关于行列式的计算方法

计算行列式常用方法:

(1) 应用行列式的递推法定义,将 n 阶行列式按第 i 行(列)展开,化为 n 个 $(n-1)$ 阶行列式计算。

(2) 应用行列式的性质,将行列式化为上三角形行列式。

(3) 应用行列式的性质,将行列式的某一行(列)除一元素不等于零外,其余的元素均化为零,然后按这行(列)展开,化为低一阶行列式。

4. 克莱姆法则

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D \neq 0$, 则线性方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

特例, 设 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则齐次线性方程组只有零解。另一方面, 如果齐次线性方程组有非零解, 则 $D = 0$ 。

第二节 例题分析

【例 1】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 34 & 215 & 35 & 215 \\ 28 & 092 & 29 & 092 \end{vmatrix}$$

分析: 如果应用行列式定义计算则太繁。注意到第二列各元素与第一列元素的特征, 则可应用行列式性质来计算。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 34 & 215 & 35 & 215 \\ 28 & 092 & 29 & 092 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 34 & 215 & 1 & 000 \\ 28 & 092 & 1 & 000 \end{vmatrix} \\ & = 10^3 \begin{vmatrix} 34 & 215 & 1 \\ 28 & 092 & 1 \end{vmatrix} = 10^3 (34 \cdot 215 - 28 \cdot 092) \\ & = 6 \, 123 \, 000 \end{aligned}$$

【例 2】

$$\text{设} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{求} \quad \begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

分析：我们用行列式的性质来计算。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} \\ & = -2 \times (-3) \times 5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 30 \times 1 = 30 \end{aligned}$$

【例 3】 讨论当 k 为何值时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

分析：注意到第一列(行)的特点，我们应用行列式性质将第一列(行)元素除 1 以外，其余元素均化为零。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (k-1)(k^2-4) \end{aligned}$$

所以，当 $k \neq 1, k \neq \pm 2$ 时，该行列式 $\neq 0$ 。

【例 4】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 \quad \quad - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \quad = -1 \\ 4x_1 \quad \quad + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

所以,线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 0, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{1}{2}$$

【例 5】 k 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解。

解

$$0 = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k - 4 = (k-4)(k+1)$$

所以,当 $k \neq 4$, 且 $k \neq -1$ 时, $D \neq 0$, 则该齐次线性方程组只有零解。

注: 如果将上述问题改为: 如果齐次线性方程组有非零解, 试问 k 取何值? 则计算过程类似, 由 $D = (k-4)(k+1)$, 得 $k=4, k=-1$ 。

第三节 习题选解

习题 1-1

1. 计算下列行列式的值。

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

解 运用计算三阶行列式的对角线法则, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 5 + 1 \times 4 \times 8 + 3 \times 9 \times 1 \\ - 1 \times 1 \times 8 - 1 \times 3 \times 5 - 1 \times 4 \times 9 \\ = 5 + 32 + 27 - 8 - 15 - 36 = 5$$

2. 用行列式解下列线性方程组。

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} &= 14 - 15 = -1, \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} &= 7 - 10 = -3, \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} &= 4 - 3 = 1, \end{aligned}$$

所以, $x_1 = \frac{1}{-1} = -1, x_2 = \frac{-3}{-1} = 3$ 是该方程组的解。

习 题 1-2

2. 计算下列行列式。

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由行列式的定义,得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 16 - 8 + (-3)(2 - 8 + 2) = 20 \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由行列式的定义,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
+ 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
+ 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
+ 4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= -3 + (-4) + 3 + (-8) = -12$$

习 题 1-3

1. 用行列式的性质计算下列行列式。

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

分析：每行(列)均含有 1, 2, 3, 4 元素, 于是我们将各行(列)加在第一行(列)上, 再进行计算。

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_i + c_1 \\ i=2,3,4}]{\quad} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r=2,3,4]{(-1)r_1+r_i} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=10(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[2r_3+r_2]{r_3+r_1} 10 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

2. 计算 n 阶行列式。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 将行列式按第 n 行或第一列展开,得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\ = n(-1)^{1+n}(n-1)! = (-1)^{1+n}n!$$

习 题 1-4

1. 用克莱姆法则解下列线性方程组。

$$(4) \begin{cases} x_1 - 3x_2 & -6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[(-2)r_1+r_3]{(-1)r_1+r_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & -5 & 13 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 3 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{1+2} \times 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (2+7) = 27 \end{aligned}$$

又,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$