初中学习百例丛书

初中数学一题多解百例

浙江少年儿童出版社

初中数学一题多解百例

张永康　编著

浙江少年儿童出版社

责任编辑　刘力行
美术编辑　孙达明
封面设计　刘　炜
插　　图　张　力　张　康

图书在版编目（CIP）数据

初中数学一题多解百例/张永康编著. —杭州：浙江少年儿童出版社，2000. 9
ISBN 7-5342-2276-1

Ⅰ.初… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 32216 号

初中数学一题多解百例　　张永康　编著

浙江少年儿童出版社出版发行
（杭州市体育场路 347 号）
临安曙光印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本 850×1168　1/32　印张 8.5　字数 160000
印数 1—6350
2000 年 9 月第 1 版　　2000 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7—5342—2276—1/G・1250　定 价:10.70 元

写在前面

中学数学中的数学题，大体上可以分为两大类：一类是求证题，即是从问题的条件出发，引用公理、定理、真命题、概念等，运用逻辑规则，从而导出结论，当然此类题有时也可以通过必要的计算辅以证明；另一类是求解题，即是从问题的条件出发，引用公理、定理、真命题、概念等，应用相关公式或公式的变式，求出未知量的值.

所谓解题，就是要把从已知条件出发，到达最后结论（即完成求证或求解的结论）的这一中间过程明确、科学地显示出来. 从条件通往目标的道路，无非是定义、公理、定理、真命题、公式及法则等等的有效组合. 这种组合的方式有可能不是惟一的，不同的组合，形成了不同的解题策略，因此便有了一题多解.

虽然许多数学问题的解法不是惟一的，但人们的习惯往往是在问题获得解决后，心里就感到满足，不再去继续寻求、探索其他的解法了，不再去评析该解法的优劣，这实际上是一种不良的学习习惯.

当然，我们提倡一题多解，并不是要求对每一个问题都实行一题多解，而且事实上也不是每一个数学问题都能一题多解. 我们提倡一题多解，是要求对一批典型的基本问题，都能找出几种不同的解法，并对这些不同的解法进行比较，剖析其优与劣、简与繁，并探究其原因，从而使自己的认知水平、思维能力跃上一个新的水平，久而久之，解题的基本技能熟练了，解题的速度明显提高了，解析数学问题的能力增强了，从而使自己的学习跨入了一个良性循环的轨迹.

为了有效地培养自己一题多解的能力，建议读者从以下几个方面去认真探索，努力实施：

（1）深刻理解并牢记数学的基本知识，对基本概念既要理解它的内涵，又要深刻了解它的外延；对一些数学公式，既要记住它的形式，又要理解它的推导过程，更要掌握这些公式的一些重要变形，在此基础上理解公式的特征和功能；要十分重视各知识点之间的内在联系.

（2）熟练掌握常用的解题技巧和方法，要深入理解这些技巧和方法的适用范围、应用技巧.

（3）准确运用推理格式和推理规则.

（4）从经典的定理和典型的例题中学习、探索一题多解.

（5）要善于总结，对不同的解题方法要善于进行剖析、比较，从中悟出一些基本规律、技巧，特别要从已知条件的挖掘，解题思路的拓宽，解题策略的变化，解题方法的基本特征和解题技巧的应用诸方面去总结、发现规律，不断提高解题水平.

目　录

一　数与式的计算与证明

有关数与式的计算和证明是中学数学中最基础、也是最重要的内容，是中学数学教学的出发点. 许多数学问题的解决均要涉及数的各种运算和代数式的变形. 在中学生中，当前普遍存在的主要矛盾是“会”与“对”的矛盾，这对矛盾在涉及数的运算和式的变形问题中反映最典型、最突出，因此解决数与式的计算和证明的方法与技巧是解决这对矛盾的关键.

绝对值、非负数是实数中的两个重要概念，在解题中有较广泛的应用，巧用它们的性质是解题的重要技巧. 数的运算是最基本的运算，它涉及基本的运算法则和符号法则，正确、合理、简捷的运算是中学数学教学最基本的要求. 数的运算中要做到正确、简捷同样要借助于乘法公式、因式分解公式的恰当、合理的应用.

代数式的化简、求值与证明是恒等变形题的基本形式，乘法公式、因式分解是解决此类问题的最主要的工具. 要重视公式的逆用，熟悉公式的各种变形，恰当应用换元、代入消元、待定系数法等数学方法，掌握转化思想、整体思想处理问题是解决此类问题的重要技巧. 在恒等变形中要注意代数式的结构，善于观察，才能使变形做到有针对性，防止盲目性.

例 1　已知 $x-y=2+\sqrt{3}$，$y-z=2-\sqrt{3}$，求代数式 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$ 的值.

解法一　$\because$　$x-y=2+\sqrt{3}$，$y-z=2-\sqrt{3}$，

$\therefore$　$x=y+2+\sqrt{3}$，$z=y-2+\sqrt{3}$.

$\therefore$　原式 $=(y+2+\sqrt{3})^2+y^2+(y-2+\sqrt{3})^2$

$$
\begin{aligned}
&-y(y+2+\sqrt{3})-y(y-2+\sqrt{3})\\
&-(y+2+\sqrt{3})(y-2+\sqrt{3})\\
=&y^2+4+3+4y+2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}+y^2+y^2\\
&+4+3-4y+2\sqrt{3}y-4\sqrt{3}-4\sqrt{3}\\
&-y^2-2y-\sqrt{3}y-y^2+2y-\sqrt{3}y-y^2\\
&-2\sqrt{3}y+1\\
=&15.
\end{aligned}
$$

解法二 $\because\ x-y=2+\sqrt{3},y-z=2-\sqrt{3}$,

$\therefore\ (x-y)(y-z)=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$,

即 $xy-y^2-xz+yz=1$.

$\therefore$ 原式$=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+xz)$

$$
\begin{aligned}
&=x^2+y^2+z^2-(1+xz+y^2+xz)\\
&=x^2+z^2-1-2xz=(x-z)^2-1\\
&=[(x-y)+(y-z)]^2-1\\
&=(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})^2-1\\
&=4^2-1=15.
\end{aligned}
$$

若能仔细观察已知条件及所求代数式的结构特点,那么下列解法更简捷.

解法三 $\because\ x-y=2+\sqrt{3},y-z=2-\sqrt{3}$,

$\therefore\ x-z=(x-y)+(y-z)=4$. 于是有:

原式$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2]\\
&=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+16]\\
&=\frac{1}{2}[4+3+4+3+16]\\
&=15.
\end{aligned}
$$

例 2 已知 $2a^2-3a-8=0$，且有 $\dfrac{a+2}{a-1}=pa+q$. 求 p,q 的值.

解法一 $\because$ $2a^2-3a-8=0$，$\therefore$ $3(a+2)=2(a^2-1)$，

$\therefore$ $3(a+2)=2(a+1)(a-1)$，即 $\dfrac{a+2}{a-1}=\dfrac{2}{3}(a+1)$.

$\because$ $\dfrac{a+2}{a-1}=pa+q$，$\therefore$ $pa+q=\dfrac{2}{3}(a+1)$.

则 $p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$.

解法二 $\because$ $\dfrac{a+2}{a-1}=pa+q$，

$\therefore$ $a+2=(pa+q)(a-1)$，

$\therefore$ $a+2=pa^2+(q-p)a-q$，

$\therefore$ $3a+6=3pa^2+3(q-p)a-3q$.

又 $\because$ $2a^2-3a-8=0$，$\therefore$ $3a+6=2a^2-2$，

$\therefore$ $3pa^2+3(q-p)a-3q=2a^2-2$.

$$\therefore \begin{cases} 3p=2, \\ -3q=-2, \\ 3(q-p)=0. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} p=\dfrac{2}{3}, \\ q=\dfrac{2}{3}, \\ 3(q-p)=0. \end{cases}$$

则满足题设条件 p,q 为：$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$.

解法三 $\because$ $\dfrac{a+2}{a-1}=pa+q$，$\therefore$ $a+2=(pa+q)(a-1)$，

$\therefore$ $pa^2+(q-p)a-q=a+2$.

$\because$ $2a^2-3a-8=0$，$\therefore$ $2a^2=3a+8$.

则 $2pa^2+2(q-p)a-2q=2a+4$，

$p(3a+8)+2(q-p)a-2q=2a+4$，

$(2q+p)a+(8p-2q)=2a-4$.

$$\therefore \begin{cases} 2q+p=2, \\ 2(4p-q)=4. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} p=\dfrac{2}{3}, \\ q=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$\therefore$ 满足题设条件的 p,q 为：$p=\frac{2}{3}$，$q=\frac{2}{3}$.

解法四 $\because$ $2a^2-3a-8=0$，$\therefore$ $a=\frac{3\pm\sqrt{73}}{4}$.

当 $a=\frac{3+\sqrt{73}}{4}$ 时，$\frac{a+2}{a-1}=\frac{\sqrt{73}+11}{\sqrt{73}-1}=\frac{84+12\sqrt{73}}{72}=\frac{7+\sqrt{73}}{6}$；$pa+q=\frac{3+\sqrt{73}}{4}p+q$，

$\therefore$ $\frac{7+\sqrt{73}}{6}=\frac{3+\sqrt{73}}{4}p+q$.

$\therefore$ $14+2\sqrt{73}=(9p+12q)+3p\sqrt{73}$.

$\therefore$ $\begin{cases}3p=2,\\9p+12q=14.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}p=\frac{2}{3},\\q=\frac{2}{3}.\end{cases}$

当 $a=\frac{3-\sqrt{73}}{4}$ 时，用同样的方法，可得到相同的结果.

$\therefore$ 满足题设条件的 p,q 为：$p=\frac{2}{3}$，$q=\frac{2}{3}$.

例 3 已知实数 x,y,z 满足 $x+y=6$，$z^2=xy-9$. 求证：$x=y$.

解法一 $\because$ $x+y=6$，$z^2=xy-9$，$\therefore$ $y=6-x$.

$\therefore$ $z^2=x(6-x)-9$.

即 $z^2=6x-x^2-9$，$(x-3)^2+z^2=0$. $\therefore$ $x=3$ 且 $z=0$.

则 $y=3$，$\therefore$ $x=y=3$.

解法二 $\because$ $x+y=6$，$z^2=xy-9$，$\therefore$ $xy=z^2+9$.

$\therefore$ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=36-4(z^2+9)=-4z^2$，

即 $(x-y)^2+4z^2=0$，则 $x-y=0$ 且 $z=0$.

$\therefore$ $x=y$ 且 $z=0$.

解法三 $\because$ $x+y=6$，$z^2=xy-9$，$\therefore$ $xy=z^2+9$.

所以 x,y 为方程 $t^2-6t+(z^2+9)=0$ 的两个根，因为 x,y 都是实数，故判别式 $\Delta\geqslant 0$.

即 $36-4\times1\times(z^2+9)\geqslant 0,-4z\geqslant 0,z^2\leqslant 0$.

但 z 为实数，故必有 $z^2\geqslant 0$，$\therefore\quad z^2=0$.

对 $z=0$，此时有 $\Delta=0$，故方程有两个相等的实数根，即$x=y$.

例 4 已知 $a+b=\dfrac{1}{5}$，$a^2+b^2=1$，且 $b<0$. 求 $a:b$ 的值.

解法一 $\because\quad a+b=\dfrac{1}{5}$，$a^2+b^2=1$，

$\therefore\quad \dfrac{1}{25}=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. $\therefore\quad ab=-\dfrac{12}{25}$.

由 $\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{5},\\ ab=-\dfrac{12}{25},\end{cases}$ 可把 a,b 看做是方程 $x^2-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{12}{25}=0$ 的两个实数根，且 $b<0$.

整理有 $25x^2-5x-12=0$，$(5x-4)(5x+3)=0$，

解得 $x_1=\dfrac{4}{5}$，$x_2=-\dfrac{3}{5}$. 即 $a=\dfrac{4}{5}$，$b=-\dfrac{3}{5}$.

$\therefore\quad a:b=\dfrac{4}{5}:\left(-\dfrac{3}{5}\right)=4:(-3)=-\dfrac{4}{3}$.

解法二 $\because\quad a+b=\dfrac{1}{5}$，$a^2+b^2=1$，

$\therefore\quad \dfrac{1}{25}=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. $\therefore\quad ab=-\dfrac{12}{25}$.

又 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1=\dfrac{1}{b^2}$，

$\therefore\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)=ab\cdot\dfrac{1}{b^2}=-\dfrac{12}{25}\cdot\dfrac{1}{b^2}=-\dfrac{12}{25}\cdot\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right]$.

$\therefore\quad 12\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+25\left(\dfrac{a}{b}\right)+12=0$,

$$\left[3\times\left(\frac{a}{b}\right)+4\right]\left[4\times\left(\frac{a}{b}\right)+3\right]=0.$$

则 $\frac{a}{b}=-\frac{4}{3}$,或$\frac{a}{b}=-\frac{3}{4}$.

由 $a+b=\frac{1}{5}$,有 $a=\frac{1}{5}-b$,∴ $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{b}-1$.

∵ $b<0$,∴ $\frac{1}{b}<0$,∴ $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{b}-1<-1$.

∴ $\frac{a}{b}=-\frac{4}{3}$,即 $a:b=-\frac{4}{3}$.

解法三 ∵ $a+b=\frac{1}{5}$,$b<0$,

∴ $a=\frac{1}{5}-b>\frac{1}{5}$,∴ $a-b>0$.

与前面同样的方法可求得 $ab=-\frac{12}{25}$.

∴ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=\frac{1}{25}+\frac{48}{25}=\frac{49}{25}$.

即 $a-b=\frac{7}{5}$.

由 $\begin{cases}a+b=\frac{1}{5},\\ a-b=\frac{7}{5}\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}a=\frac{4}{5},\\ b=-\frac{3}{5}.\end{cases}$

∴ $a:b=\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right)=4:(-3)=-\frac{4}{3}$.

解法四 ∵ $a+b=\frac{1}{5}$,$a^2+b^2=1$,

∴ $\left(\frac{1}{5}-b\right)^2+b^2=1$,$\frac{1}{25}-\frac{2}{5}b+2b^2=1$,

$25b^2-5b-12=0$,$(5b-4)(5b+3)=0$.

∵ $b<0$,∴ $b=-\frac{3}{5}$.

∴ $a=\frac{1}{5}-b=\frac{4}{5}$. ∴ $a:b=\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{3}$.

例 5 已知等式 $a+b+c+d=0$. 求证:$a^3+b^3+c^3+d^3$

$=3(abc+bcd+cda+dab)$.

分析 注意到所证结论的左端是几个数的立方和，故可通过将已知条件 $a+b+c+d=0$ 的不同变式的两边立方的方法试解本例.

证明一 $\because$ $a+b+c+d=0$，$\therefore$ $(a+b)=-(c+d)$.

两边立方得 $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3-d^3-3cd(c+d)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^3+b^3+c^3+d^3&=-3ab(a+b)-3cd(c+d)\\&=3ab(c+d)+3cd(a+b)\\&=3(abc+bcd+cda+dab).\end{aligned}$$

证明二 $\because$ $a+b+c+d=0$，$\therefore$ $a+b+c=-d$.

两边立方 $(a+b+c)^3=-d^3$，

即 $(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)=-d^3$，

$(a+b)^3+c^3+d^3=-3c(a+b)(a+b+c)$，

$a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+d^3=3cd(a+b)$，

$a^3+b^3+c^3+d^3=-3ab(a+b)+3cd(a+b)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^3+b^3+c^3+d^3&=3ab(c+d)+3cd(a+b)\\&=3(abc+bcd+cda+dab).\end{aligned}$$

证明三 $\because$ $a+b+c+d=0$，

$\therefore$ $a+b=-(c+d)$，$(a+b+c+d)^3=0$，

则 $(a+b)^3+(c+d)^3+3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$
$=0$，

$\therefore$ $(a+b)^3+(c+d)^3=0$.

$a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+d^3+3cd(c+d)=0$，

$a^3+b^3-3ab(c+d)+c^3+d^3-3cd(a+b)=0$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^3+b^3+c^3+d^3&=3ab(c+d)+3cd(a+b)\\&=3(abc+bcd+cda+dab).\end{aligned}$$

例 6 已知 $x+y+z=1, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. 求证：$x^2+y^2+z^2=1$.

分析 本例的结论是二次式，条件是一次式，若将条件中 $x+y+z=1$ 两边平方，其左边即会出现 $x^2+y^2+z^2$，同时也会有 $xy+yz+zx$，故本例解题的关键是证明 $xy+yz+zx=0$，此时可利用 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ 这一条件.

证明一 $\because$ $x+y+z=1$,

$\therefore$ $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1$,

即 $x^2+y^2+z^2+2xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$.

$\because$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $\therefore$ $x^2+y^2+z^2=1$.

证明二 $\because$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $\therefore$ $xy+yz+xz=0$.

又$\because$ $x+y+z=1$, $(x+y+z)^2=1$,

即 $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yx)=1$,

则 $x^2+y^2+z^2=1$.

证明三 $\because$ $x+y+z=1$, $\therefore$ $x+y=1-z$,

即 $x^2+y^2+2xy=1-2z+z^2$. ①

又 $\because$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $\therefore$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{z}$,

即 $\frac{y+x}{xy}=-\frac{1}{z}$. $\therefore$ $\frac{1-z}{xy}=-\frac{1}{z}$, $z^2-z=xy$,

即 $2xy=2z^2-2z$.

代入①得：$x^2+y^2+2z^2-2z=1-2z+z^2$.

$\therefore$ $x^2+y^2+z^2=1$.

例 7 若 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，求 $a-\frac{1}{a}$的值.

分析 从本题的结构分析，可将 a 看成一个未知数，解得 a，

求出 $a-\frac{1}{a}$ 的值；也可由恒等式 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4$ 求出结果；也可由 a 与 $\frac{1}{a}$ 互为倒数这一关系式，求出其结果.

解法一 由 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，故有 $a^2-\sqrt{5}a+1=0$.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，或 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

若 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，则 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，

$\therefore\ a-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=1$；

若 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，则 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，

$\therefore\ a-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)=-1$.

综上所述：$a-\frac{1}{a}=1$，或 $a-\frac{1}{a}=-1$.

解法二 $\because\ a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，$a\cdot\frac{1}{a}=1$，

$\therefore\ a$ 与 $\frac{1}{a}$ 是方程 $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ 的两个根.

解此方程得 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，或 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，则 $a-\frac{1}{a}=1$；

或 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$，$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，则 $a-\frac{1}{a}=-1$.

解法三 $\because\ a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，

又 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=5-4=1$，

$\therefore\ \left(a-\frac{1}{a}\right)=\pm1$.

解法四 设 $a-\frac{1}{a}=x$. $\because\ a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，

$\therefore \quad a=\frac{1}{2}(x+\sqrt{5}), \frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-x).$

由 $\quad a \cdot \frac{1}{a}=1$，即 $\frac{1}{2}(x+\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5}-x)=1$，

得 $\quad 5-x^{2}=4, x^{2}=1, \therefore \quad x=\pm 1.$

$\therefore \quad a-\frac{1}{a}=\pm 1.$

例 8 已知非零实数 x, y, z 满足 $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$. 求 $\frac{x+y-z}{x+y+z}$ 的值.

解法一 设 $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}=k \quad (k \neq 0)$. 于是有：

$x=5k, y=4k, z=7k.$

$$\therefore \quad \frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{5k+4k-7k}{5k+4k+7k}=\frac{2k}{16k}=\frac{1}{8}.$$

另解：$\because \quad \frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}, \therefore \quad x=\frac{5}{7}z, y=\frac{4}{7}z.$

$$\therefore \quad \frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{\frac{5}{7}z+\frac{4}{7}z-z}{\frac{5}{7}z+\frac{4}{7}z+z}=\frac{5z+4z-7z}{5z+4z+7z}=\frac{1}{8}.$$

解法二 由 $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$，利用比例性质可得：

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}=\frac{x+y+z}{5+4+7}, \frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{-z}{-7}=\frac{x+y-z}{5+4-7}.$$

$$\therefore \quad \frac{x+y+z}{5+4+7}=\frac{x+y-z}{5+4-7}, \therefore \quad \frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{1}{8}.$$

解法三 $\because \quad \frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}, \therefore \quad \frac{z}{7}=\frac{x+y}{9}$，

即 $\quad x+y=\frac{9}{7}z. \therefore \quad x+y+z=\frac{16}{7}z.$

$$\therefore \quad \frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{x+y+z-2z}{x+y+z}=1-\frac{2z}{\frac{16}{7}z}=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}.$$

小结 （1）本例已知条件给出的是一个比例式，因此解题思

路应围绕比例的性质来展开，解法一、二、三即是.（2）解法四和解法一中的另解运用了方程的思想，将 z 视为已知数，并用 z 分别表示 x,y.

例 9 若 $bc=ad$，求证：$ab(c^2-d^2)=(a^2-b^2)cd$.

证明一 先求所证等式两端的差值.

$$\begin{aligned}ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd&=abc^2-acd^2-a^2cd+b^2cd\\&=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)\\&=(ac+bd)(bc-ad).\end{aligned}$$

$\because$ $bc=ad$，$\therefore$ $bc-ad=0$.

$\therefore$ $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd=0$.

$\therefore$ $ab(c^2-d^2)=(a^2-b^2)cd$.

证明二 从左边或右边出发进行证明.

右边 $=(a^2-b^2)cd=a^2cd-b^2cd$

$=ac\cdot ad-bc\cdot bd$.

$\because$ $bc=ad$，

$\therefore$ 右边 $=ac\cdot bc-ad\cdot bd=ab(c^2-d^2)=$ 左边.

$\therefore$ $ab(c^2-d^2)=(a^2-b^2)cd$ 得证.

证明三 $\because$ $bc=ad$，$\therefore$ $ac\cdot bc=ac\cdot ad$，

即 $abc^2=a^2cd$. ①

同样根据条件 $bc=ad$，有 $bd\cdot bc=bd\cdot ad$，

$\therefore$ $b^2cd=abd^2$. ②

①－②，可得 $ab(c^2-d^2)=(a^2-b^2)cd$.

证明四 考察条件：$bc=ad$.

若 $b=0$，则 $a=0$，或 $d=0$.

此时左边 $=0$，右边 $=0$，$\therefore$ 左边 $=$ 右边.

若 $c=0$，同样可得：左边 $=$ 右边.

不失一般性，可设 $bd\neq0$，于是有