LIANXU JIEZHI

连续介质力学

程敬学 编著

广西人民出版社

连续介质力学

程敬学　编著

广西人民出版社

内 容 提 要

连续介质力学属于理论物理的一部分。它包括弹性力学和流体力学两部分，分别研究弹性体和流体的平衡、运动问题。本书可供大专院校物理、数学等系有关专业作补充教材和师生参考。

连 续 介 质 力 学

程敬学 编著

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 7.125印张 155千字

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印 数 1—2,700册

书号：13113·33 定价：0.85元

绪　论

当物体受外力作用时，它的形状、大小都要发生变化，称为变形体。过去我们在理论力学中研究物体的运动时，把物体看作形状大小不会改变的刚体，仅仅是为了研究的方便而已。物体在外力作用下所发生的形状、大小的改变，称为形变。当外力不超过某一定限度（弹性限度）时，物体的形变会随着外力的撤除而消失，物体将恢复原来的形状大小。这种形变称为弹性形变，物体的这种性质称为弹性，具有弹性的变形体称为弹性体。

除固体外，液体和气体也是变形体。由于它们具有很大的流动性，当受外力作用时，就发生流动，故称为流体。流体没有一定的形状，不会反抗形状的改变，故仅具有体积方面的弹性。

一切变形体都是由大量无规则运动的分子组成的，分子之间具有一定的空隙，但为了研究的方便，我们不考虑物体的分子结构，而将变形体看作连续分布于它们所占的空间的媒介质，称为连续介质。连续介质是变形体的理想模型。将变形体看作连续介质，则物体内各物理量都是连续的，因而可以用坐标和时间的连续函数来表示。

在理论力学的基础上进一步研究变形体运动的规律及其应用的学科，称为连续介质力学。在连续介质力学中我们取变形体内任意的微小体元作为研究对象。从宏观观点看来，该微小体元是如此地微小，完全可以认为是一个微小的质

点，从而可将整个变形体认为是由许多连续分布的微小体元所组成的质点系。

把连续介质作为变形体的理想模型是合乎客观实际的。因为在连续介质力学中所取的微小体元，从微观观点看来仍然包含着大量的分子。且不说密度较大的固体和液体，就以密度较小的气体而论，如果从空气中取出一体积为10^{-9}毫米^{3}的微小体元，从宏观观点看来已经十分微小了。但从微观观点看来，它仍然包含着大约$\frac{10^{19}}{10^3}\times10^{-9}=10^7$个空气分子（按数量级估算），因此除了稀薄气体外，在所研究的问题与分子运动无关的情况下，一切变形体都可看作连续介质。

连续介质力学属于理论物理的一部分，它包括弹性力学和流体力学两部分内容，它们分别研究弹性体和流体的平衡和运动问题。

目 录

第二篇　流体力学

第一篇　弹性力学

弹性体因受外力作用而发生形变时，体内各微小体元之间的相对位置即发生变化，也就是说各微小体元之间发生相对位移。正是由于体内各微小体元之间相对位置的变化，形成了弹性体形状、大小的变化。同时，弹性体内部将产生一反抗形变的附加内力，此内力分布于体内的任一截面上。当弹性体形变稳定后分布于某截面上的内力与截面面积之比，称为应力。弹性体的形变一般为长度、形状或体积的变化，此变化与其原来长度、形状或体积之比，称为应变。弹性力学就是研究弹性体在弹性限度内，受外力作用而处于平衡或运动状态时所发生的应力、应变和位移。

在本篇中，我们只限于讨论各向同性的均匀弹性体在弹性限度内的微小形变。所谓均匀是指弹性体的弹性在整个弹性体的各部分都相同，即其弹性系数不随位置而变化。所谓各向同性是指弹性体的弹性在所有各个方向都相同，即其弹性系数不随方向而变化。

如果物体所受外力超过弹性限度，当外力撤除后，形变不能完全消除，物体不能恢复原来的形状大小而保留一定的残余形变，这种形变称为塑性形变，物体的这种性质称为塑性。关于塑性形变的研究属于塑性力学的课题。在本篇中我们所提到的形变都是指弹性形变。

第一章　基本概念

§1.1 应变及其分量

弹性体发生形变时，体内各点因形变而产生的位移是不相同的，令 u、v、w 表示任意点 A 因形变而产生的位移在坐标轴 x、y、z 上的分量，则 u、v、w 必定是位置坐标 x、y、z 的函数。即

$$\left.\begin{array}{l} u=u(x,y,z) \\ v=v(x,y,z) \\ w=w(x,y,z) \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

为了研究弹性体的应变，假想将弹性体分割成许多微小的正平行六面体元。当弹性体发生形变时，这些微小体元也发生形变，了解这些微小体元的应变情况，也就可以了解整个弹性体的应变情况，因此我们任取一微小体元作为研究对象。

如图1.1所示，设所取微小正平行六面体元的边长分别为 $AB=dx$，$AC=dy$，$AD=dz$。

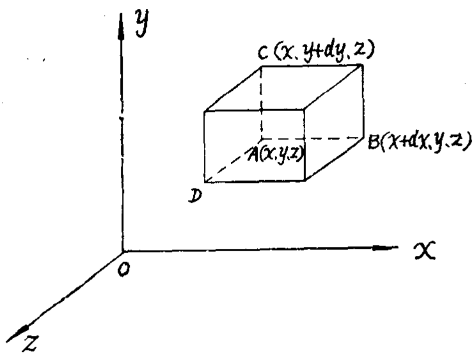

图1.1

形变前，A、B、C 三点的坐标分别为

$A(x,y,z)$

$B(x+dx,y,z)$

$C(x,y+dy,z)$

形变后，A、B、

C三点分别移动到A'、B'、C'，A'、B'、C'三点在xy平面上的投影分别为A''、B''、C''，如图1.2所示。

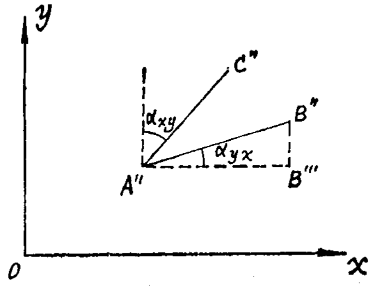

图1.2

由（1.1）式可知A、B、C三点沿x、y、z轴的位移分别为

A：$u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$w(x,y,z)$。

B：$u(x+dx,y,z)$，$v(x+dx,y,z)$，$w(x+dx,y,z)$。

C：$u(x,y+dy,z)$，$v(x,y+dy,z)$，$w(x,y+dy,z)$。

因而A'、B'、C'三点的坐标分别为

$$A'[x+u(x,y,z),y+v(x,y,z),z+w(x,y,z)]$$

$$B'[x+dx+u(x+dx,y,z),y+v(x+dx,y,z),\\ z+w(x+dx,y,z)]$$

$$C'[x+u(x,y+dy,z),y+dy+v(x,y+dy,z),\\ z+w(x,y+dy,z)]$$

微小正平行六面体元的基本形变有两种：一是边长度的变化，即边伸长或缩短。单位边长的长度变化称为正应变，对应于伸长形变称为张应变，对应于压缩形变称为压应变。二是两边夹角的变化，即两边所成直角改变为钝角或锐角。所变化的角度称为剪应变。现分别讨论如下：

1.正应变

现考察AB边沿x方向的变化。

由于AB边沿x方向的绝对伸长$\delta(dx)$等于B点相对于A点沿x方向的相对位移。即

$$\delta(dx)=u(x+dx,y,z)-u(x,y,z) \tag{1.2}$$

将$u(x+dx,y,z)$按泰勒级数展开，并略去dx的二阶以上各项得到

$$u(x+dx,y,z)=u(x,y,z)+\frac{\partial u}{\partial x}dx \tag{1.3}$$

代入（1.2）式得到

$$\delta(dx)=\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

因此AB边沿x方向的正应变为

$$e_{11}=\frac{\delta(dx)}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.4}$$

当$e_{11}>0$时表示张应变，当$e_{11}<0$时表示压应变。

同理可得到AC边沿y方向与AD边沿z方向的正应变分别为

$$e_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{33}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.5}$$

2.剪应变

现考察平面ABD与ACD之间的夹角$\angle CAB$的变化。

由图1.2容易看出角

$$\alpha_{yx}\approx \mathrm{tg}\alpha_{yx}=\frac{B''B'''}{A''B'''} \tag{1.6}$$

由于$B''B'''$为B点相对于A点沿y方向的相对位移，故有

$$B''B'''=v(x+dx,y,z)-v(x,y,z)=\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

又 $$A''B'''=dx+\delta(dx)=dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

代入(1.6)式得到

$$\alpha_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}dx\Big/dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx=\frac{\partial v}{\partial x}\Big/1+\frac{\partial u}{\partial x}$$

我们讨论的是微小形变，$\frac{\partial u}{\partial x}$与1相比较为很小，可以忽略不计，故有

$$\alpha_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.7}$$

同理可得到

$$\alpha_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.8}$$

于是得到平面ABD与平面ACD之间角度的改变为

$$2e_{xy}=2e_{yx}=\alpha_{yx}+\alpha_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.9}$$

当$e_{xy}>0$时表示角度减小；当$e_{xy}<0$时，表示角度增大。

（1.9）式表示平面ABD与ACD之间的剪应变，即相对Z方向的剪应变。同理可得到平面ACB与ABD之间和平面ACB与ACD之间的剪应变，即相对x方向和y方向的剪应变分别为

$$\left.\begin{aligned}2e_{yz}=2e_{zy}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\2e_{zx}=2e_{xz}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

对于均匀形变，正平行六面体元形变后将成为斜平行六面体元。因此根据上述讨论，我们得到了所有的应变分量

$$\left.\begin{aligned}&e_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}\\&e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\&e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

为了简便起见，在上式中已将脚标x、y、z分别用记号1、2、3代替。

§1.2 弹性位移 应变张量

现讨论弹性体受外力作用而发生形变时，体内任一点P的应变状态。为此先研究体内与P点无限邻近的另一点Q相对P点的位移。

设在形变发生前，P、Q两点相对于静止坐标系$oxyz$的位置矢径分别为

$$\mathbf{r}_p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_p + d\mathbf{r} = (x+dx)\mathbf{i} + (y+dy)\mathbf{j} + (z+dz)\mathbf{k}$$

其中$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$分别是坐标轴x、y、z的单位矢量。

如图1.3所示，形变发生后，P、Q两点将分别移到P'、Q'，它们的位移分别为

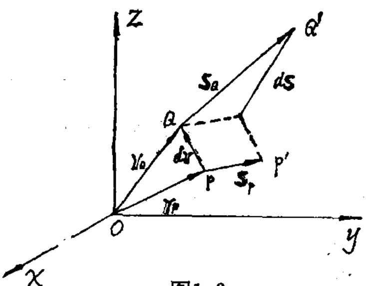

图1.3

$$\mathbf{S}_p = u(x,y,z)\mathbf{i} + v(x,y,z)\mathbf{j} + w(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{S}_Q = u(x+dx, y+dy, z+dz)\mathbf{i} + v(x+dx, y+dy, z+dz)\mathbf{j} + w(x+dx, y+dy, z+dz)\mathbf{k}$$

又 $\mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_p + d\mathbf{s}$

$$= [u(x,y,z)+du(x,y,z)]\mathbf{i} + [v(x,y,z) + dv(x,y,z)]\mathbf{j} + [w(x,y,z) + dw(x,y,z)]\mathbf{k}$$

由此得到

$$
\left.\begin{aligned}
u(x+dx,y+dy,z+dz)&=u(x,y,z)+du(x,y,z)\\
v(x+dx,y+dy,z+dz)&=v(x,y,z)+dv(x,y,z)\\
w(x+dx,y+dy,z+dz)&=w(x,y,z)+dw(x,y,z)
\end{aligned}\right\}
\tag{1.12}
$$

将上式中的函数$u(x+dx,y+dy,z+dz)$，$v(x+dx,y+dy,z+dz)$，$w(x+dx,y+dy,z+dz)$按泰勒级数展开，并略去二阶以上各项，得到

$$
\left.\begin{aligned}
du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\
dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\\
dw&=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz
\end{aligned}\right\}
\tag{1.13}
$$

上式为$d\mathbf{s}$的分量式。它表明$d\mathbf{s}$是以$d\mathbf{r}$当作自变量的线型矢量函数。显然上式与所选坐标系无关。因此它的九个系数组成一个二阶张量

$$
(\pi)=\begin{pmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{pmatrix}
\tag{1.14}
$$

根据张量理论可知，张量(π)可分解为对称张量(e)与反对称张量(ω)两部分，即

$$
(\pi)=(e)+(\omega) \tag{1.15}
$$

引起Q点产生位移$\mathbf{S}_Q$的原因有三方面：①以P点为代表的平动所引起的位移$\mathbf{S}_P$；②以角速度$\boldsymbol{\omega}$绕P点转动所引起的位移$\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}$；③由于形变所引起的位移$\mathbf{b}$。矢量$d\mathbf{s}$正是后两部

分位移的矢量和，如图1.4所示。

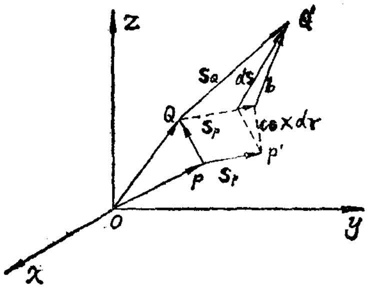

图1.4

由此推知上述对称张量(e)必对应于位移b，反对称张量(ω)必对应于位移$\omega\times d\mathbf{r}$。因此张量(e)的元素应为应变的分量e_{ij}（$i,j=1,2,3$），即

$$(e)=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

代入（1.15）式得到

$$(\omega)=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

其中ω_1，ω_2，ω_3为矢量$\boldsymbol{\omega}$的三个分量，故

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{j}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

即

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{S}_P \qquad (1.18)$$

对称张量(e)称为应变张量，它描述弹性体内任一点P的应变状态。

§1.3 应变二次曲面 应变主轴

现讨论P、Q之间的微小线元$d\mathbf{r}$在形变后的伸长。由上节知，在形变后$d\mathbf{r}$变为

$$d\mathbf{r}'=d\mathbf{r}+d\mathbf{s} \qquad (1.19)$$

如图1.5所示。

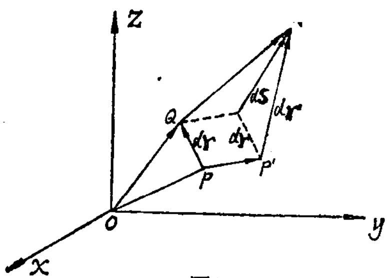

图1.5